MAT 354

Corrigé du partiel du 27 octobre 2023.

Exercice 1 - Sommes de série.

1) Il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Elle est donc convergente.

Par ailleurs, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^{n+1}} = 2 \cdot \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2}}{1 - \frac{1}{3}}$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$

2) On remarque que la série est télescopique.

Soit alors $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N+1}} - \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}}$$

On a donc $\displaystyle\lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ceci prouve que la série proposée est convergente, de somme $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 1 Natures de séries

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+3}{n^2+n-1}$. Il s'agit d'une série à termes positifs.

On peut donc appliquer les théorèmes de comparaison.

Or $\frac{n+3}{n^2+n-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente.

La série est donc divergente.

2) Le critère des séries alternées s'applique : la série est convergente puisque $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0.

Par ailleurs $\left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right| = \frac{1}{\ln(n)}$ $\forall n \geq 2$ et $\frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 2$

Puisque $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même pour

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$. La série n'est donc pas absolument convergente.

3). On constate que $\forall n \geq 1$ $\left|\frac{1-\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2}$ (inégalité triangulaire).

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2}$ est convergente. La série $\sum_n \frac{1-\cos(n)}{n^2}$ est donc absolument convergente (Donc convergente).

4) Par un développement limité :

$$\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

La série est donc absolument convergente.

5) Considérons le terme général :

$$\frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

. $\frac{1}{n}$ est le TG d'une série divergente.

. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le TG d'une série convergente (critère des séries alternées)

Leur somme est donc le TG d'une <u>série divergente</u>.

6) Remarquons que

$$\frac{n^2}{n+1} = \frac{(n^2-1)+1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)+1}{(n+1)} = n-1 + \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent, $\sin\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right) = \sin\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$.

$$= (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Or : la suite $\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est décroissante (car $\frac{\pi}{n+1}$ est décroissante,

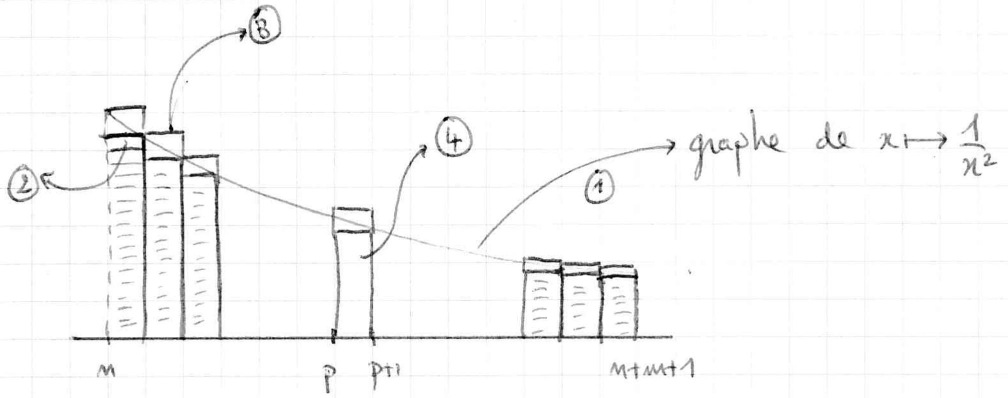
et sin est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$), et tends vers 0 en $+\infty$.

Le critère des séries alternées s'applique donc <u>la série converge</u>.

Exercice 3 Restes et sommes partielles

1. Il s'agit d'une série de Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Elle converge donc (résultat du cours).

2.



① . L'intégrale $\int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^2}$ représente l'aire entre l'axe des x et le graphe de $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

② . La somme $\sum_{k=n+1}^{n+m+1} \frac{1}{k^2}$ représente la somme des aires des rectangles situés sous le graphe.

③ . La somme $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2}$ représente la somme des aires des rectangles situés au dessus du graphe

④ Pour tout entier p tel que $n \leq p \leq n+m$, on a :

$$\frac{1}{(p+1)^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{p^2}$$

On obtient le résultat en sommant de $p=n$ à $p=n+m$.

3.a. En calculant l'intégrale, on a $\int_n^{n+m+1} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}$.

Faisons alors $n=1$, et reportons dans l'inégalité (1).

$$S_{m+2} - 1 = \sum_{k=2}^{m+2} \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{m+2} \leq \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2}$$

On peut réécrire cette double inégalité sous la forme:

$$S_{m+2} \leq 2 - \frac{1}{m+2} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{m+2} \leq S_{m+1}$$

$$\downarrow$$

$$S_{m+1} \leq 2 - \frac{1}{m+2} - \frac{1}{(m+2)^2} \qquad 1 - \frac{1}{m+2} \leq S_{m+1}$$

(on a écrit $S_{m+2} = S_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$)

Par un décalage d'indice $m \to m-1$, on obtient

$$1 - \frac{1}{m+1} \leq S_m \leq 2 - \frac{1}{(m+1)} - \frac{1}{(m+1)^2}$$

3.b. Puisque la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, on peut passer à la limite lorsque $m \to +\infty$. On obtient $1 \leq S \leq 2$.

4.a. Réécrivons l'inégalité (1): (avec l'intégrale calculée).

$$\sum_{k=n+1}^{n+m+1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^2}$$

Puisque la série converge, on peut faire tendre $m \to +\infty$.

On obtient alors $R_n \leq \frac{1}{n} \leq R_{n-1}$, où $\forall n$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n} \quad (*)$

4.b. D'après la question précédente, on a

$$\frac{n}{n+1} \leq nR_n \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc $nR_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Autrement dit $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \geq 0$. On peut donc appliquer le théorème de comparaison, qui donne que la série $\sum_{n\geq 1} R_n$ est divergente.

4.c La somme partielle S_n vérifie $S - S_n = R_n$.
Donc S_n approxime S à 10^{-2} près dès que n est tel que $|S-S_n| = |R_n| \leq 10^{-2}$.

D'après l'inégalité $(*)$ ci-dessus, il suffit que $\frac{1}{n} \leq 10^{-2}$,

c'est à dire $n \geq 100$.