Chapitre 1 : Transformations de Möbius — $PSL_2\mathbb{C}$

1. Transformations conformes.

Le but de ce paragraphe est de revenir sur la notion de transformation conforme, que vous avez peut-être déjà croisée dans le cours d'applications holomorphes. Mais ce n'est certainement pas le point de vue qui y était privilégié.

Rappels pour commencer à la notion de différentielle.

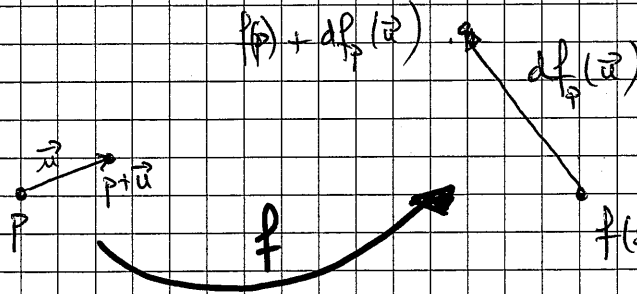
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application (au moins) C^1 définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $p \in U$. Ecrivons le DL à l'ordre 1 de f en un point $p \in U$.

$$f(p+h) = f(p) + \underbrace{df_p(h)}_{\text{↳ } df_p \text{ est une application linéaire. Donc } h \text{ est un vecteur.}} + o(\|h\|)$$

Réécrivons cette formule sous la forme suivante :

$$f(p+\vec{u}) = f(p) + df_p(\vec{u}) + o(\|\vec{u}\|) \quad (*)$$

(j'ai mis des flèches pour bien différencier).



$(*)$ nous dérit l'action de f à l'ordre 1.

Question : où vit le vecteur $\vec{u}$? et $df_p(\vec{u})$? Dans quels ev ?

Nous allons penser à $\vec{u}$ et $df_p(\vec{u})$ comme à des <u>vecteurs tangents</u> respectivement en les points p et $f(p)$.

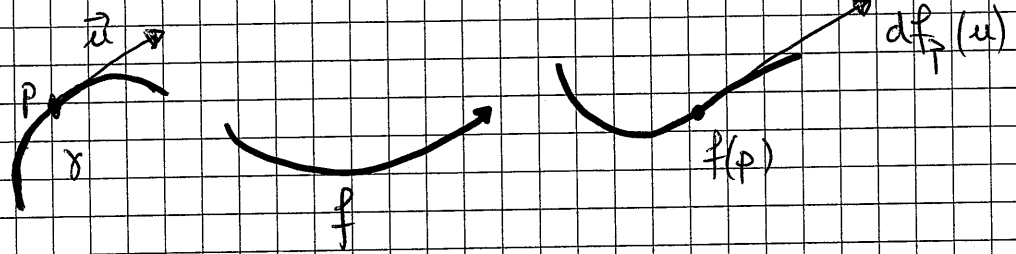
On note T_pU l'espace des vecteurs tangents à U en p.
C'est une copie de $\mathbb{R}^2$ - un plan donc.
Il est souvent commode de penser à un vecteur tangent en p comme à la dérivée d'un chemin C^1 :

$$\vec{u} \text{ vecteur tgent en } p \iff \left[\begin{array}{l} \exists \varepsilon>0 \text{ et } \gamma\ C^1 \text{ tq} \\ \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow U \text{ tq } \gamma(0)=p \text{ et} \\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = \vec{u} \end{array}\right.$$

Il y aurait un peu de travail pour formaliser cette définition, mais remarquez qu'elle permet formellement d'expliquer (*) :

- Soit $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow U$ tq $\gamma(0)=p$ et $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t) = \vec{u}$.
- Considérons alors le chemin $f\circ\gamma$. Il vérifie

$$f\circ\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\cdot\ f\circ\gamma(0) = f(p)$$
$$\cdot\ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f\circ\gamma(t)) = df_p(\gamma'(0)) = df_p(\vec{u})$$



Remarques

- Si $\vec{u}$ est un vecteur tangent en p alors $\lambda\vec{u}$ aussi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

En effet :

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ et } \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow U \text{ tq } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma'(0) = \vec{u}$$

Alors

$$\gamma_\lambda : \left]\frac{-\varepsilon}{\lambda}, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right[\longrightarrow U \text{ défini par } \gamma_\lambda(t) = \gamma(\lambda t) \text{ vérifie}$$

$$\gamma_\lambda(0) = p \quad \text{et } \gamma_\lambda'(0) = \lambda\vec{u}$$

- Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont tangents en p alors pour vérifier que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est aussi un vecteur tangent en p, il suffit de considérer

$$t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\gamma_1(2t) + \gamma_2(2t)\right) \qquad (\text{où } \gamma_i \text{ correspond au vecteur } \vec{u}_i).$$

On a donc obtenu comme ça la multiplication par un scalaire, et la somme de 2 vecteurs tangents. On pourrait alors vérifier que l'ensemble des vecteurs tangents en p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour ces deux opérations.

- Pour se convaincre que c'est un plan (ie que sa dimension est 2), il faudrait travailler modulo la relation d'équivalence :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$$

- Notation : Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ - ou $\mathbb{R}^2$ - on notera T_pU le plan tangent à U en un point $p \in U$. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est différentiable en p $df_p : T_pU \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{C}$ est linéaire

Définition : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soit $f : U \to V$ une application. On dit que f est **conforme** si elle préserve les **angles orientés** entre vecteurs tangents, c'est à dire si :

$$\forall p \in U,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in T_p U,\quad \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{\left(df_p(\vec{u}),\ df_p(\vec{v})\right)} \quad (*)$$

Exemple-exercice : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y^2,\ 2xy).$$

On pose $p = (0,1)$. Vérifier que f vérifie la condition $(*)$ au point $(0,1)$.

Proposition : Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soit $f : U \to V$ une application. Sont équivalentes :

① f est conforme.

② f est holomorphe, et $\forall p \in U,\ f'(p) \neq 0$

Preuve : Nous allons la faire en TD.

"L'argument qui fait que c'est vrai" : f est holomorphe si et seulement si sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. Autrement dit,

$\forall p \in U$ $df_p : T_p U \longrightarrow T_{f(p)} U$

$\sim \mathbb{C}$ $\sim \mathbb{C}$

$\vec{u} \longmapsto f'(p) \cdot \vec{u}$

↳ nombre complexe !

Une telle applicat° préserve les angles.

2. Transformations de Möbius

Notation : On note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la sphère de Riemann.

On munit $\hat{\mathbb{C}}$ d'une topologie en définissant les voisinages de ses points comme suit :

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, \begin{cases} \text{si } z \in \mathbb{C}, \mathcal{V}_z = \left\{ \mathring{D}(0,r),\ r>0 \right\} \\ \text{si } z = \infty \quad \mathcal{V}_\infty = \left\{ \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0,r),\ r>0 \right\} \end{cases}$$

Définition : On appelle transformation de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$ toute application de la forme suivante :

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \quad \begin{cases} \forall z \notin \{-d/c, \infty\} \\ f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \end{cases} \text{ où } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ et } ad-bc \neq 0$$

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

Remarque : Si $c = 0$, on adapte la définition ci-dessus en posant $f(\infty) = \infty$. Dans cette situation f devient une application affine de $\mathbb{C}$, étendue à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $f(\infty) = \infty$

Proposition : Toute transformation de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$ réalise un homéomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$ (muni de la topologie ci-dessus).

Preuve : • On vérifie facilement que la transfo de Möbius donnée par

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} = f(z)$$

réalise une bijection en résolvant l'équation $f(z) = w$ pour z et $w \neq \infty$, ce qui donne

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}, \qquad (*)$$

et en vérifiant $\begin{cases} z = \infty \Leftrightarrow w = \frac{a}{c} \\ w = \infty \Leftrightarrow z = -\frac{d}{c} \end{cases}$

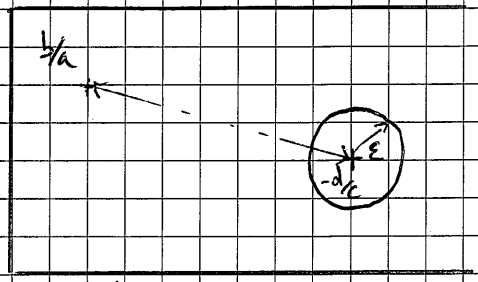
• Par ailleurs, f est clairement continue sur $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-d/c\}$, et vérifie

$$|f(z)| = \left|\frac{a}{c}\right| \cdot \frac{|z + b/a|}{|z + d/c|}$$

Donc pour $|z + \frac{d}{c}| < \varepsilon$ avec ε suffisamment petit, on a

$$|f(z)| > \left|\frac{a}{c}\right| \cdot \frac{1}{2}\left|\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Donc $|f(z)| \longrightarrow \infty$ quand $z \longrightarrow -\frac{d}{c}$.



$|z + b/a| \sim \underbrace{\left|-\frac{d}{c} + \frac{b}{a}\right|}_{\neq 0}$ si ε très petit

• On fait alors de même pour la transformation réciproque, qui est donnée par $(*)$ ci-dessus

Remarque : Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$.

* Si z_0 est tel que $f(z_0) = \infty$, on dit que f est holomorphe en z_0 s'il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\mathring{D}(z_0, r)$, et si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

* On dit que f est <u>holomorphe en ∞</u> si $z \longmapsto f(\frac{1}{z})$ est holomorphe en 0 (éventuellement au sens précédent).

Exemple : • $z \longmapsto \frac{1}{z}$, $z \longmapsto z^2$ sont holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$.

• $z \longmapsto \exp(z)$ n'est pas holomorphe en ∞.
En effet $g(z) = \exp(\frac{1}{z})$ est holomorphe surtout disque $\mathring{D}(0, r)$, mais n'a pas de limite quand $z \to 0$.

Proposition : Toute transformation de Möbius est un biholomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$.

Preuve : Exercice pour utiliser la définition ci-dessus.

Théorème : Soit $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un biholomorphisme.
Alors f est une transformation de Möbius.

Nous allons démontrer ce théorème, mais auparavant nous allons énoncer un résultat que nous utiliserons pour cela.

On note $PGL(2, \mathbb{C})$ l'ensemble des transformations de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$

Proposition :

- $PGL(2,\mathbb{C})$ est un groupe pour la composition des applications.
- L'application

$$\begin{array}{ccc} (GL(2,\mathbb{C}), \times) & \longrightarrow & (PGL(2,\mathbb{C}), \circ) \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto & \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right) \end{array}$$

est un morphisme surjectif dont le noyau est $\left\{ e^{i\theta} I_2, \theta \in \mathbb{R} \right\}$

Preuve : exercice

Remarque : L'application ci-dessus nous dit que $PGL(2,\mathbb{C})$ est donc un quotient de $GL(2,\mathbb{C})$, et l'application π la projection correspondante.

Nous allons jongler constamment entre matrices et transfos de Möbius. Si $A \in GL(2,\mathbb{C})$, nous noterons f_A, $\pi(A)$, ou $[A]$ la transformation de Möbius associée. Des fois même juste A...

Preuve du théorème : [idée importante]

Soit donc $f : \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ un biholomorphisme.

Posons $\alpha = f(\infty)$.

Soit g_α la transformation de Möbius $z \longmapsto \frac{1}{z-\alpha}$, qui est un biholomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$, et vérifie $g_\alpha(\alpha) = \infty$. Par conséquent $\underbrace{g_\alpha \circ f}_{\varphi}$ est un biholomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$, qui vérifie $\varphi(\infty) = \infty$

On peut donc restreindre φ à $\mathbb{C}$: φ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}$. Or, vous avez vu dans l'UE de fonctions holomorphes que les seuls biholomorphismes de $\mathbb{C}$ sont les similitudes,

c'est à dire les applications $z \longmapsto az+b$, qui sont en particulier des transformations de Möbius qui fixent ∞.

Par conséquent φ est une transfo de Möbius, et $f = g_\alpha^{-1} \circ \varphi$ également d'après la proposition.

□

Remarque : La structure de la preuve est intéressante.

On part d'une applicat° quelconque, et on la compose par une transfo de Möbius pour qu'elle fixe un point.

Puis un résultat d'analyse complexe vient à notre secours pour conclure.

Nous retrouverons ça dans le disque, par exemple.

3. Birapport.

Proposition : Soient z_1, z_2, z_3 trois points deux à deux distincts de $\hat{\mathbb{C}}$. Il existe une unique transformation de Möbius f telle que

$$f(z_1) = \infty \qquad f(z_2) = 0 \qquad f(z_3) = 1 \quad . \quad (*)$$

Preuve :

* Existence : $f(z) = \dfrac{(z-z_2)(z_3-z_1)}{(z-z_1)(z_3-z_2)}$ convient.

* Unicité : Soient f et g deux transformations de Möbius vérifiant $(*)$. Alors $f \circ g^{-1}$ est une transformation de Möbius qui fixe ∞, 0 et 1. On vérifie facilement que ceci implique que ceci implique $f \circ g^{-1}(z) = z \quad \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Donc $f = g$.

On peut reformuler cette proposition en disant :

Proposition : L'action de $PGL(2,\mathbb{C})$ sur l'ensemble des triplets (ordonnés) de points deux à deux distincts définie par

$$\forall f \in PGL(2,\mathbb{C}),\quad f \cdot (a,b,c) = (f(a), f(b), f(c))$$

est simplement transitive.

Autrement dit : étant donnés deux triplets de points distincts (a,b,c) et (a',b',c'), il existe une unique $f \in PGL(2,\mathbb{C})$ telle que

$$f(a) = a', \quad f(b) = b', \quad f(c) = c'$$

preuve : Soient deux tels triplets (a,b,c) et (a',b',c').

existence : Soit $f_1 : (a,b,c) \longrightarrow (\infty, 0, 1)$ $\qquad f_i \in PGL(2,\mathbb{C})$

$f_2 : (a',b',c') \longrightarrow (\infty, 0, 1)$

Alors $f_2^{-1} \circ f_1$ envoie (a,b,c) sur (a',b',c').

unicité : Soient f et g deux $PGL(2,\mathbb{C})$ telles que

$f : (a,b,c) \longrightarrow (a',b',c')$

$g : (a,b,c) \longrightarrow (a',b',c')$

Soit f_1 l'unique transfo de Möbius qui réalise $(a,b,c) \longrightarrow (\infty, 0, 1)$.

Alors $f_2 \circ g^{-1} \circ f \circ f_1^{-1} : \begin{matrix} \infty \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \infty \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

Donc $f_1 \circ g^{-1} \circ f \circ f_1^{-1} = id$, donc $f = g$. ∎

Nous venons d'utiliser une idée cruciale en géométrie : on conjugue pour se ramener à une situation favorable.

Remarquez qu'au passage, nous avons montré

Lemme : Une transformation de Möbius ayant au moins trois points fixes deux à deux distincts est l'identité.

On aurait bien sûr pu le faire par le calcul.

Définition : Soient z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points deux à deux distincts de $\hat{\mathbb{C}}$. On appelle **birapport** de (z_1, z_2, z_3, z_4) l'image de z_4 par l'unique transformation de Möbius qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$. On le note $[z_1, z_2, z_3, z_4]$.

On a donc :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_4 - z_2)\cdot(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)\cdot(z_3 - z_2)}.$$

Considérons l'action de $PGL(2,\mathbb{C})$ sur l'ensemble des quadruplets de points de $PGL(2,\mathbb{C})$ définie par

$$\forall f \in PGL(2,\mathbb{C}),\ f\cdot(z_1, z_2, z_3, z_4) = \big(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\big)$$

Proposition : Deux quadruplets (z_1, z_2, z_3, z_4) et (w_1, w_2, w_3, w_4) sont dans la même $PGL(2,\mathbb{C})$-orbite si et seulement si

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

Autrement dit : le birapport est un invariant complet des quadruplets de points distincts pour $PGL(2,\mathbb{C})$.

Preuve

- Commençons par montrer que le birapport est un invariant de $PGL(2,\mathbb{C})$. Soit donc f une transfo de Möbius, donnée par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Soient z et w distincts dans $\hat{\mathbb{C}}$. On a par calcul direct:

$$f(z) - f(w) = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d}$$

$$= (ad-bc)(z-w) \cdot \frac{1}{(cz+d)(cw+d)} \qquad \text{on pose } h(z) = \frac{1}{cz+d}$$

Par conséquent:

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4] \cdot \frac{h(z_4)\,h(z_2)\,h(z_3)\,h(z_1)}{h(z_4)\,h(z_1)\,h(z_3)\,h(z_2)}$$

$$= [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

La condition est donc nécessaire.

- Si maintenant (z_1, z_2, z_3, z_4) et (w_1, w_2, w_3, w_4) ont même birapport égal à b, il existe deux transfos de Möbius f et g telles que

$$f : (z_1, z_2, z_3, z_4) \longrightarrow (\infty, 0, 1, b)$$

$$g : (w_1, w_2, w_3, w_4) \longrightarrow (\infty, 0, 1, b)$$

Alors $g^{-1} \circ f$ nous donne l'existence. ∎

4. Automorphismes du disque

Théorème: Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. L'ensemble des transformations conformes de $\mathbb{D}$ est un sous-groupe de $PGL(2,\mathbb{C})$, qui s'écrit:

$$Aut(\mathbb{D}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}},\ \text{où } a, c \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}$$

Preuve: Vous l'avez déjà vue dans le cours de fonctions holomorphes. Je la redonne pour illustrer le fait que la mécanique de la preuve est exactement la même que pour les biholomorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$. (Notez que 1 transformation conforme de $\mathbb{D}$ est exactement un biholomorphisme de $\mathbb{D}$).

Nous allons montrer que toute biholomorphisme de $\mathbb{D}$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = u \cdot \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1} \quad \text{avec } |u| = 1 \text{ et } |\alpha| < 1 \qquad (*)$$

En notant $\Delta = |\alpha|^2 - 1$ puis $a = \left(\frac{u}{\Delta}\right)^{-1/2}$ et $c = (u\Delta)^{-1/2}\bar{\alpha}$, on obtient la forme annoncée dans l'énoncé.

Premièrement: Toute transformation du type $(*)$ est une transformation conforme de $\mathbb{D}$:

- Elle est holomorphe et vérifie $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{D}$.
- C'est une bijection de $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ (vérification directe).
- Sa bijection réciproque est également conforme et de dérivée partout non-nulle.

Réciproquement: Soit f une transformation conforme du disque.

Posons $f(0) = \beta$, et considérons h donnée par:

$$h(z) = \frac{z - \beta}{\bar{\beta} z - 1}$$

h est une involution (c'est à dire que $h \circ h = id$) qui vérifie $h(\beta) = 0$. En particulier h échange 0 et β.
De plus, h est une transformation conforme du disque d'après le premier point.

Alors $\varphi = h \circ f$ est une transfo conforme du disque qui vérifie $\varphi(0) = 0$. D'après le <u>lemme de Schwarz</u>, on a :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad |\varphi(z)| \leq |z|.$$

Mais ceci est également vrai pour φ^{-1} : $\forall z \in \mathbb{D} \; |\varphi^{-1}(z)| \leq |z|$.

Mais alors : $\forall z \in \mathbb{D}$

$$\begin{array}{ccc} |\varphi^{-1}(\varphi(z))| & \leq & |\varphi(z)| \\ \| & & \\ |z| & \leq & |\varphi(z)| \end{array}$$

Donc $\forall z \in \mathbb{D} \quad |\varphi(z)| = |z|$

D'après la seconde partie du <u>Lemme de Schwarz</u>, il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$ et $\varphi(z) = uz$.

D'où finalement :

$$h \circ f(z) = uz, \quad \text{et donc} \quad f(z) = h(uz) \qquad (h^{-1} = h\,!)$$
$$= \frac{uz - \beta}{\bar{\beta} u z - 1}$$
$$= u \cdot \frac{z - \bar{u}\beta}{u\bar{\beta} z - 1}.$$

On pose alors $\alpha = \bar{u}\beta$, qui vérifie $|\alpha| < 1$ par construction.

<u>Notation</u> : Soit U un ouvert de $\hat{\mathbb{C}}$. On note $\text{Möb}(U)$ le groupe des transformations de Möbius qui préservent U.

Nous venons donc de montrer que $\text{Möb}(\mathbb{D})$ est exactement l'ensemble des biholomorphismes de $\mathbb{D}$, et de le décrire !

Je vous rappelle le lemme de Schwarz :

Soit f holomorphe dans $\mathbb{D}$ telle que :
- $f(0) = 0$
- $\forall z \in \mathbb{D} \quad |f(z)| \leq 1$

Alors $\forall z \in \mathbb{D} \quad |f(z)| \leq |z|$ et de plus $|f'(0)| \leq 1$

Si de plus il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| = 1$ et $\forall z \in \mathbb{D} \quad f(z) = uz$

Définition : On appelle **transformation de Cayley** la transformation de Möbius donnée par

$$C(z) = \frac{z - i}{-iz + 1}$$

Lemme : La transformation de Möbius C réalise une transformation conforme du demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Un calcul direct montre que

$$C(x) = \frac{x - i}{-ix + 1} = \frac{2x}{1 + x^2} - i\,\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

En posant $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ avec $t \in]-\pi, \pi[$ on obtient

$$C\left(\tan \tfrac{t}{2}\right) = (-i)e^{it}$$

Par conséquent C envoie $\mathbb{R} \cup \infty$ sur le cercle $\{|z| = 1\}$

Mais C est 1 homéomorphisme de $\hat{\mathbb{C}}$, donc elle envoie bijectivement le demi plan $\mathbb{H}$ sur l'une des composantes connexes de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{|z| = 1\}$

Puisque $C(i) = 0$, on a donc $C(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$.

Puisque C est de Möbius elle est conforme. □

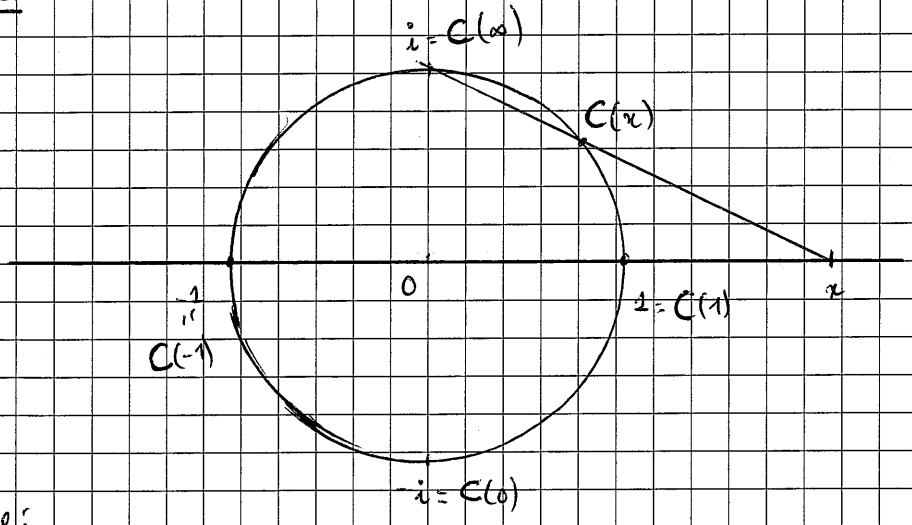
Conséquence

Théorème : Le groupe des biholomorphismes de $\mathbb{H}$ est

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1 \right\}$$

Avant de démontrer le théorème, revenons sur C.

Remarque :



C^{-1} est la projection stéréographique du cercle unité sur $\mathbb{R}$.

Exercice :

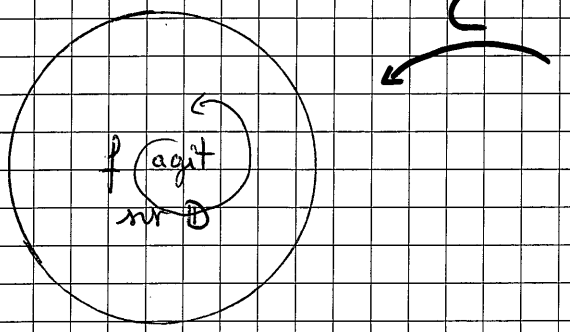
Pour tout réel x, $C(x)$ est l'intersection de la droite (ix) avec le cercle $|z| = 1$.

Preuve du théorème : Nous avons vu que l'ensemble des biholomorphismes du disque $\mathbb{D}$ est le sous-groupe de $PGL(2,\mathbb{C})$ défini par

$$Möb(\mathbb{D}) = \left\{ z \longmapsto \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}},\ a,c \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\} \quad (*)$$

La transformation C réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{D}$.

Par conséquent, les biholomorphismes (ou transformations conformes) de $\mathbb{H}$ sont exactement les conjugués de ceux de $\mathbb{D}$ par C^{-1}.



$C^{-1} \circ f \circ C$ agit sur $\mathbb{H}$

Par conséquent, il nous faut calculer le conjugué par C^{-1} du sous groupe (*). Puisque $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$ est un morphisme, il suffit de le faire au niveau des matrices :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(c) & \mathrm{Re}(c) + \mathrm{Im}(a) \\ \mathrm{Re}(c) - \mathrm{Im}(a) & \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(c) \end{pmatrix}$$

Posons $\alpha = \mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(c)$
$\beta = \mathrm{Re}(c) + \mathrm{Im}(a)$
$\gamma = \mathrm{Re}(c) - \mathrm{Im}(a)$
$\delta = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(c)$

La condition $|a|^2 - |c|^2 = 1$ se réécrit

$$1 = \mathrm{Re}(a)^2 - \mathrm{Im}(c)^2 + \mathrm{Im}(a)^2 - \mathrm{Re}(c)^2$$

$$= \big(\mathrm{Re}(a) - \mathrm{Im}(c)\big)\big(\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(c)\big) - \big(\mathrm{Re}(c) - \mathrm{Im}(a)\big)\big(\mathrm{Re}(c) + \mathrm{Im}(a)\big)$$

Donc $|a|^2 - |c|^2 = 1 \iff \alpha\delta - \beta\gamma = 1$

Par conséquent $\underline{C^{-1}\,\mathrm{Möb}(\mathbb{D})\,C = \mathrm{Möb}(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$.

<u>Remarque :</u> $\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$