TD6 : modules

Exercice 1. On considère le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$.

1. Déterminer $\mathrm{Tor}(\mathbb{Q})$.
2. Quelles sont les familles libres maximales du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$?
3. $\mathbb{Q}$ est-il un $\mathbb{Z}$-module libre ?
4. $\mathbb{Q}$ est-il un $\mathbb{Z}$-module de type fini ?

Exercice 2. Soit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0 \bmod 2\}$.

1. Montrer que M est un sous-$\mathbb{Z}$-module libre de type fini de $\mathbb{Z}^3$ et en donner une base.
2. Décrire le quotient $\mathbb{Z}^3/M$.

Exercice 3. Soit $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et E l'ensemble des matrices de A dont la première colonne est nulle.

1. Montrer que E possède une structure de A-module.
2. Montrer que E est un A-module de type fini mais qu'il n'est pas libre.

Exercice 4. Soient A un anneau commutatif et M un A-module. Montrer que chacune des affirmations suivantes est fausse en exhibant un contre-exemple.

1. Une famille génératrice minimale de M est une base de M.
2. Les familles génératrices minimales de M ont toutes la même cardinalité.
3. Si M est libre alors une famille génératrice minimale de M est une base de M.
4. Si M est libre alors une famille libre maximale de M est une base de M.
5. Si M est libre alors tout sous-module de M est libre.

Exercice 5. Soit A un anneau, M un A-module et v un élément de M qui n'est pas un élément de torsion.

1. Montrer que le sous-module $A.v$ possède un supplémentaire dans M si et seulement s'il existe une forme linéaire $f : M \to A$ qui envoie v sur 1.
2. Montrer que si le sous-module $A.v$ possède un supplémentaire N dans M, alors
   (a) Le module quotient M/N est isomorphe à A.
   (b) Le module quotient $M/A.v$ est isomorphe à N.
3. Montrer qu'il existe des situations où le sous-module $A.v$ ne possède pas de supplémentaire dans M.
4. Dans le cas où $A = \mathbb{Z}$ et $M = \mathbb{Z}^n$, quels sont les n-uplets v pour lesquels le sous-module $A.v$ possède un supplémentaire dans $\mathbb{Z}^n$?
5. Peut-on compléter le triplet $(2, 10, 4)$ en une base de $\mathbb{Z}^3$? Le triplet $(5, 3, 6)$? Si oui, donner une telle base.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif non nul. On rappelle que d'après le lemme de Krull, A possède (au moins) un idéal maximal I.
Si M est un A-module, on désigne par IM le sous-module de M engendré par l'ensemble $\{b.m : b \in I,\ m \in M\}$.

1. Soient $a \in A$ et $m \in M$. Montrer que la classe de $a.m$ dans le quotient M/IM ne dépend que de la classe de a dans A/I et de la classe de m dans M/IM.
   En déduire que M/IM possède une structure de A/I-espace vectoriel.
2. On suppose que M est un A-module libre ; soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de M. Montrer que pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,
$$\sum_{i=1}^{n} a_i.e_i \in IM \quad \iff \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \in I.$$
3. En déduire que l'image d'une base de M par la projection canonique M/IM est une base de M/IM en tant que A/I-espace vectoriel.
4. Soient n et p deux entiers. Montrer que A^n est isomorphe à A^p si et seulement si $n = p$.

Exercice 7. Pour chacune des matrices suivantes :
$$M_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -6 \\ 15 & 9 & 9 \\ 6 & 36 & 30 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice réduite équivalente.
2. Soit N_1 (resp. N_2) le sous-module de $\mathbb{Z}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^4$) engendré par les vecteurs colonnes de M_1 (resp. M_2). Trouver une base de $\mathbb{Z}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^4$) adaptée à N_1 (resp. N_2).
3. Donner un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^4/N_1$ puis $\mathbb{Z}^4/N_2$.

Exercice 8. Calculer la matrice réduite équivalente à la matrice suivante :
$$M = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 8 & 16 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit A un anneau euclidien. Montrer qu'un A-module de type fini est sans torsion si et seulement si il est libre.

Exercice 10. Soit L' un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Z}^n$ de rang égal à n. On note B la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base L'.

1. Montrer que L/L' est de cardinal fini, égal à $|\det_B(B')|$.
2. Soit $P = \{\sum_{i=1}^{n} x_i e'_i : x_i \in [0; 1[$ pour tout $1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{R}^n$. Quel est le nombre des éléments de $\mathbb{Z}^n$ qui appartiennent à P ?

Exercice 11. Pour chacun des sous-modules M de $\mathbb{Z}^n$ suivants, donner une base adaptée de $\mathbb{Z}^n$ et déterminer la structure du quotient :

1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 3y = 2x \text{ et } y \in 4\mathbb{Z}\}$
2. $M = \mathbb{Z}.(1, 3) \oplus \mathbb{Z}.(1, 1)$
3. $M = \mathbb{Z}.(1, 4) \oplus \mathbb{Z}.(2, 2)$
4. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : x + y + z = 0 \text{ mod } 2\}$ (cf. exercice 2)

Exercice 12.

1. Quels sont à isomorphismes près les groupes abéliens qui contiennent exactement 12 éléments ? Donner pour chaque groupe ses facteurs invariants.
2. Même question avec 360 éléments.