TD4 : corps de décomposition, clôtures algébriques

Exercice 1. Soient K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré n. Soit L une extension finie de K de degré m premier avec n. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$.

Exercice 2. Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré n et L un corps de décomposition de P. Montrer que $[L : K]$ divise $n!$. *Indication : procéder par récurrence forte, en distinguant selon que P est irréductible ou non.*

Exercice 3. Soient K un corps et $K(T)$ son corps des fractions rationnelles.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^n - T \in K(T)[X]$ est irréductible.
2. Montrer que $K(T)$ n'est pas algébriquement clos.
3. Soit L une clôture algébrique de $K(T)$. L'extension $L \supset K(T)$ peut-elle être finie ?

Exercice 4.

1. Soit $L \supset K$ une extension algébrique. Montrer que toute clôture algébrique de L est aussi une clôture algébrique de K.
2. Soit $L \supset K$ une extension algébrique telle que tout $P \in K[X] \setminus K$ est scindé dans L. Montrer que L est une clôture algébrique de K.

Exercice 5.

1. Montrer que tout corps algébriquement clos est de cardinalité infinie.
2. Soit K un corps fini. Montrer que l'ensemble des polynômes irréductibles de $K[X]$ est infini.
3. Soit Ω un corps algébriquement clos et K un sous-corps de Ω. Montrer que
$$E = \{x \in \Omega \mid x \text{ est algébrique sur } K\}$$
est une clôture algébrique de K.
4. Soit K un corps de cardinalité au plus dénombrable et L une clôture algébrique de K. Montrer que L est dénombrable.
5. Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ est-il algébriquement clos ?
6. Soit $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ une clôture algébrique du corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(T)$. Montrer que $\mathbb{C}$ contient un sous-corps isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}(T)}$.
Montrer que $\overline{\mathbb{Q}(T)}$ n'est isomorphe ni à $\overline{\mathbb{Q}}$, ni à $\mathbb{C}$.

Exercice 6. Soient K un corps, Ω un corps algébriquement clos, et $\phi : K \to \Omega$ un morphisme de corps.

1. Soit $L \supset K$ une extension finie. Montrer qu'il existe un morphisme de corps $\psi : L \to \Omega$ tel que $\psi_{|K} = \phi$. *Indication : commencer par traiter le cas où l'extension est monogène, i.e. il existe $\theta \in L$ tel que $L = K(\theta)$.*

2. Même question dans le cas où l'extension $L \supset K$ est algébrique. *Indication : utiliser la question 2 de l'exercice 4 avec le théorème de Steinitz.*

Exercice 7. Extensions normales.

On considère un corps K, un polynôme $P \in K[X]$, et L un corps de décomposition de P.

1. Soit Ω une clôture algébrique de L. Montrer que pour tout K-morphisme de corps $\phi : L \to \Omega$, on a $\phi(L) = L$.
2. On se propose de montrer la propriété suivante :

   (N) : $\forall\, Q \in K[X]$ irréductible, Q a une racine dans $L \;\Rightarrow\; Q$ est scindé dans L.

   (a) Soit $Q \in K[X]$ un polynôme irréductible, ayant une racine β dans L. Soit $\gamma \in \Omega$ une autre racine de Q.
   Montrer que $K(\beta)$ et $K(\gamma)$ sont isomorphes.

   (b) Montrer qu'il existe un sous-corps L' de Ω contenant $K(\gamma)$ ainsi qu'un isomorphisme $\psi : L \to L'$ prolongeant l'isomorphisme entre $K(\beta)$ et $K(\gamma)$. *Indication : utiliser l'exercice précédent.*

   (c) Montrer que $L = L'$. Conclure.
3. Réciproquement, soit L une extension algébrique finie de K vérifiant la propriété (N) (on dit que L est une extension **normale** de K).

   (a) Justifier qu'il existe $a_1, \ldots, a_m \in L$ tels que $L = K(a_1, \ldots, a_m)$.

   (b) Montrer que L est le corps de décomposition du polynôme $\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Irr}(a_i, K)$.

Exercice 8. Soient p un nombre premier, et $P = X^4 + pX - p \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Montrer que P a exactement deux racines simples dans $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P et $L = \mathbb{Q}(\alpha)$ un corps de rupture de P, de sorte que $[L : \mathbb{Q}] = 4$. On se propose de montrer par l'absurde que L n'a pas de sous-corps non triviaux.

3. On suppose qu'il existe un corps K tel que $L \supsetneq K \supsetneq \mathbb{Q}$. Montrer que dans $K[X]$ on a

   $$P = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$$

   où $a, b, c, d \in K$.
4. Établir que a^2 est racine du polynôme $Q = X^3 + 4pX - p^2 \in \mathbb{Q}[X]$.
5. Montrer que Q n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$.
6. En étudiant les degrés possibles de $\mathrm{Irr}(a^2, \mathbb{Q})$, montrer que Q admet une racine dans $\mathbb{Q}$. Conclure.

On se propose maintenant de déterminer le degré $[E : \mathbb{Q}]$ où $E \subset \mathbb{C}$ est le corps de décomposition de P.

7. Soient α_1, α_2 deux racines de P et $a = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. En reprenant l'argumentation ci-dessus, montrer que a^2 est racine du polynôme $Q = X^3 + 4pX - p^2$.
8. Montrer que $[\mathbb{Q}(a^2) : \mathbb{Q}] = 3$ et que $[\mathbb{Q}(\alpha_1) = \mathbb{Q}] = 4$.
   En déduire que $[E : \mathbb{Q}] = 12$ ou 24.