TD2 : Compléments sur les anneaux (2ème partie)

1 Corps de fractions

Exercice 1. Sur la définition du corps de fractions

Soient A un anneau intègre et L un corps contenant A tel que tout élément de L est de la forme a/s avec $a \in A$ et $s \in A \setminus \{0\}$. Montrer que L est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 2. Exemples de corps de fractions

Déterminer le corps des fractions des anneaux suivants : $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[1/2]$, $k[X^2, X^3]$, $\{P \in \mathbb{Q}[X] : P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3. Corps de fractions des séries formelles

1. Montrer que le corps des fractions de $k[[X]]$ est

$$k((X)) = k[[X]][X^{-1}] = \left\{ \sum_{k \geq -m} c_k X^k \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

(séries formelles de Laurent).

2. Comparer $k(X)$ et $k((X))$. *Indication : montrer que* $\sum_{k\geq 0} X^{2^k}$ *n'est pas rationnelle.*

Exercice 4. Fractions rationnelles symétriques

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement par automorphismes de corps sur $k(X_1, \dots, X_n)$.
2. Montrer que le sous-corps L des fractions rationnelles invariantes par $\mathfrak{S}_n$ est égal au corps des fractions de $k[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$. *Indication : si P/Q est symétrique, c'est-à-dire invariante par $\mathfrak{S}_n$, poser $D = \prod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} Q^\sigma$.*

Exercice 5. Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles

1. Soit $P/Q \in k(X)$ une forme irréductible non nulle avec $Q = \prod_{i=1}^n Q_i$ où les polynômes Q_i sont non constants deux à deux premiers entre eux.

   Montrer qu'il existe $P_1, \dots, P_n$ tels que $P/Q = \displaystyle\sum_{i=1}^n P_i/Q_i$ avec P_i/Q_i irréductible.
2. Soient $n \geq 1$ et $S, Q \in k[X]$ avec $Q \neq 0$. Montrer qu'il existe $S_0, \dots, S_{n-1}, R_n$ des polynômes tels que $\deg S_k < \deg Q$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$ et $S = S_0 + S_1 Q + \cdots + S_{n-1} Q^{n-1} + R_n Q^n$.
3. En déduire que si $F \in k(X)$ s'écrit sous forme irréductible P/Q avec Q de factorisation en irréductibles distincts $Q = \prod_{i=1}^n Q_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i \geq 1$), alors

$$F = E + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{P_{i,j}}{Q_i^j} \right) \quad \text{avec } E \in k[X] \text{ et } \forall i, j, 0 \leq \deg(P_{ij}) < \deg Q_i.$$

Exercice 6. Groupes $(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Q}^*,\times),\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$.

1. Montrer que le groupe $(\mathbb{Q},+)$ n'a pas de partie génératrice finie.
2. Donner un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{Q}^*,\times)$ puis $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Q}^2$ l'équation $x^2+y^2=1$ en utilisant la paramétrisation du cercle unité privé de $(-1,0)$ par la pente des droites passant par $(-1,0)$. En déduire les solutions entières de l'équation $x^2+y^2=z^2$.

2 Anneaux noethériens

Exercice 8. Théorème de transfert de Hilbert et réciproque

1. Soit A un anneau noethérien, montrer que $A[[X]]$ est noethérien. *Indication : partant d'un idéal $I\neq\{0\}$ de $A[[X]]$, considérer pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\{a\in A : \exists F\in I,\ F$ de la forme $aX^n+\sum_{k>n}c_kX^k\}$.*
2. Soit A un anneau tel que $A[X]$ est noethérien. Est-ce que A est noethérien ?

Exercice 9. Exemples d'anneaux noethériens ou pas

Les anneaux suivants sont-ils noethériens ? Le cas échéant donner une suite d'idéaux strictement croissante infinie et un idéal qui n'est pas de type fini.

1. A/I avec A anneau noethérien et I idéal de A,
2. B anneau tel qu'il existe $f : A\to B$ morphisme surjectif avec A noethérien,
3. $k[X_1,\dots,X_n,\dots]$ des polynômes en une infinité de variables,
4. $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ avec d entier non carré,
5. l'anneau des suites à valeurs entières
6. l'anneau des séries entières complexes à rayon de convergence strictement positif,
7. la sous-algèbre $k[XY^n : n\in\mathbb{N}]$ de $k[X,Y]$.

Exercice 10. Anneau noethérien ou non, suite

1. Soit F l'anneau des fonctions polynomiales $[-1,1]\to\mathbb{R}$. Montrer que $\{f\in F\mid f(0)=0\}$ est un idéal de type fini.
2. Soit $A=\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $I=\{f\in A\mid f(0)=0\}$.
   (a) Montrer que I est un idéal maximal de A.
   (b) Montrer que I n'est pas de type fini.
   Indication : par l'absurde, si $I=(f_1,\dots,f_n)$, considérer $g=|f_1|+\dots+|f_n|$; si g ne s'annule qu'en 0, montrer que $f_i=o(g^{1/2})$ pour tout i.
   (c) En déduire que $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ n'est pas noethérien, et donner une suite strictement croissante infinie d'ideaux.

Exercice 11. Anneau noethérien intégre

Soit A un anneau intègre noethérien. Montrer que si $a\notin A^\times$, alors $\bigcap_{n\geq 1}(a^n)=\{0\}$. Autrement dit, pour tout $b\in A\setminus\{0\}$, il existe un entier k tel que $a^k|b$ et $a^{k+1}\nmid b$.