TD2 : Compléments sur les anneaux (1ère partie)

1 Polynômes en n indéterminées

Exercice 1. Fonctions polynomiales

Soient k un corps infini et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On considère $I_1, \dots, I_n$ des parties infinies de k. Montrer que si $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ vérifie $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_i I_i$, alors $P = 0$.
2. Montrer que k^n n'est pas une réunion finie d'hypersurfaces.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ deux matrices de taille n à coefficient dans k, on souhaite montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   Soit $l \in \{1, \dots, n\}$, on note f_l le coefficient de X^l dans la différence $(\chi_{AB} - \chi_{BA})(X)$, où $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est fixée. En particulier, f_l est une fonction polynomiale en les coefficients (b_{ij}) de la matrice B ; on note $F_l \in k[X_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ son polynôme associé.
   (a) Montrer que si B est inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ et donc $f_l = 0$.
   (b) En déduire la nullité de $F_l \cdot \det \in k[X_{ij} : 1 \leq i, j \leq n]$ pour tout $l \in \{1; \dots; n-1\}$.
   (c) Conclure.

Exercice 2. Non-intégrité des fonctions polynomiales à coefficients dans un corps fini

Soit k un corps fini de cardinalité q. En particulier k est l'ensemble des racines du polynôme $X^q - X$. Soit $\varphi : k[X_1, \dots, X_n] \to \mathcal{F}(k^n, k)$ le morphisme associant à un polynôme la fonction polynomiale correspondante.

1. Montrer que $\ker(\varphi) = (X_1^q - X_1, \dots, X_n^q - X_n)$.
2. Montrer que φ est surjective.

Exercice 3. Ensemble algébrique réduit à un point

Soit A un anneau. Montrer que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, l'idéal des polynômes de $A[X_1, \dots, X_n]$ qui s'annulent en $(a_1, \dots, a_n)$ est $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Cet idéal est-il maximal ?

Exercice 4. Déterminant circulant

Soient $M = \begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_{n-1} & X_n \\ X_n & \ddots & & X_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ X_2 & \dots & X_n & X_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n])$ et $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1} T^k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n][T]$.

On se propose de calculer le déterminant de M.

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M = f(J)$.

2. Soient $\xi = e^{2i\pi/n}$. Pour $0 \leq r \leq n-1$, on pose $U_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{rk} e_k$, où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique. Montrer que U_r est vecteur propre de J associé à la valeur propre ξ^r.

3. En déduire que $\det M = \displaystyle\prod_{r=0}^{n-1} f(\xi^r) = \prod_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \xi^{rk} X_{k+1} \right)$.

2 Séries formelles

Exercice 5. Élements inversibles

Soit A un anneau commutatif. On note $A[[X]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans A, c'est-à-dire l'ensemble des expressions de la forme $\sum_{k\geq 0} a_k X^k$ avec $(a_k) \in A^{\mathbb{N}}$, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication de Cauchy définie par

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k X^k \right) \left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k \right) = \left(\sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) X^k \right).$$

1. Montrer qu'une série formelle $\sum_{k\geq 0} a_k X^k$ est inversible si et seulement si a_0 est inversible dans A.
2. Montrer que $A[[X]]$ est un anneau local si et seulement si A est un anneau local (en particulier $K[[X]]$ est local pour tout corps K).

Exercice 6. Valuation, division euclidienne et conséquences

Soit K un corps. La *valuation* d'une série formelle non nulle $a = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in K[[X]]$ est $v(a) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$; on pose $v(0) = -\infty$.

1. Montrer que pour tout $a, b \in K[[X]]$ on a $v(ab) = v(a) + v(b)$ et $v(a+b) \geq \min(v(a), v(b))$, et que a est inversible si et seulement si $v(a) = 0$.
2. Soient $a = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ et $b = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$ deux séries formelles de $K[[X]]$, avec $b \neq 0$. Montrer qu'il existe $q, r \in K[[X]]$ tel que $a = bq + r$ avec $v(r) < v(b)$ ou $r = 0$.
Indication : on pourra prendre $r = \sum_{k=0}^{v(b)-1} a_k X^k$.
3. Montrer que $K[[X]]$ est principal.
4. Montrer que tout idéal non nul de $K[[X]]$ est de la forme (X^n) pour un certain entier n.

3 Polynômes symétriques et relations racines-coefficients

Exercice 7. Polynômes alternés et symétriques

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que pour tout couple (i,j) avec $i < j$ on ait : $P(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \ldots, X_n) = 0$. Montrer que $\prod_{i<j}(X_j - X_i)$ divise P.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ symétrique tel que $(X-Y)|P$. Montrer que $(X-Y)^2|P$.

Exercice 8. Polynômes symétriques homogènes

Exprimer les polynômes $\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j$ et $\sum_{i<j} X_i^2 X_j^2$ de $A[X_1, \ldots, X_n]$ avec $n = 3$ ou $n = 4$, comme polynômes en les polynômes symétriques élémentaires.

Exercice 9. Formules de Newton

Soit A un anneau de caractéristique plus grande que n. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$ la k-ème somme de Newton dans $A[X_1, \ldots, X_n]$, et σ_k le k-ème polynôme symétrique élémentaire en $X_1, \ldots, X_n$. Soit $P(T) = \prod_{i=1}^n (1 - TX_i) \in A[X_1, \ldots, X_n][T]$.

1. Montrer que
$$P(T) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k T^k \quad \text{et} \quad -T\frac{P'(T)}{P(T)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{TX_i}{1 - TX_i} = \sum_{k=1}^{\infty} S_k T^k.$$
2. En déduire que
   — si $1 \leq k \leq n$, alors $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} S_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0$,
   — si $k \geq n$, alors $S_k - \sigma_1 S_{k-1} + \sigma_2 S_{k-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n S_{k-n} = 0$.
3. En déduire que $A[X_1, \ldots, X_n]^{\text{sym}} = A[S_1, \ldots, S_n]$.

Application : soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Montrer que A et B ont même polynôme caractéristique si et seulement si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.
4. En déduire que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Exercice 10. Discriminant d'une équation cubique

Soient K un corps et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 3}$ les racines du polynôme cubique $X^3 + pX + q \in K[X]$. Déterminer en fonction de p et q

1. $\sum_{i=1}^3 \alpha_i^6$;
2. le discriminant $\Delta = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Indication : faire intervenir les $P'(\alpha_i)$.

Exercice 11. Orbite et stabilisateur

Déterminer l'orbite et le stabilisateur des polynômes suivants dans $A[X_1, \ldots, X_N]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$: $X_1X_2, X_2X_3X_4, X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 12. Signature d'une permutation

Soit $n \geq 2$. On rappelle que la signature $\epsilon(\sigma)$ de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la parité de son nombre d'inversions, i.e.
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$
On note $\delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(X_j - X_i) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$.

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,déterminer $\sigma \cdot \delta$.
2. En déduire que la signature est un morphisme de $\mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$. En particulier, la parité du nombre de transpositions dans toute décomposition de σ donnée ne dépend pas de la décomposition.

Exercice 13. Opérations sur les entiers algébriques

On appelle entier algébrique un nombre complexe qui est racine d'un polynôme unitaire à coefficient entier. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des entiers algébrique, on va montrer dans cet exercice que c'est un anneau.

1. Montrer que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{A} = \mathbb{Z}$.

Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ deux polynômes unitaires de degré n et m respectivement et de racines complexes $(a_i)_i$ et $(b_j)_j$. On pose $S = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (X - a_i - b_j)$ et $T = \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} (X - a_i b_j)$.

2. Montrer que le polynôme symétrique $\tilde{S}(B_1, \ldots, B_m) = \prod_{j=1}^{m} P(X - B_j)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}[X]$. En déduire que $S \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Soit $\tilde{P} \in \mathbb{Z}[X, Y]$ l'homogénéisé de P, montrer que $T = \prod_{j=1}^{m} \tilde{P}(X, b_j)$. Avec un raisonnement similaire à celui de la question précédente, montrer que $T \in \mathbb{Z}[X]$.
4. En déduire que $\mathbb{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
5. Déterminer un polynôme unitaire à coefficient dans $\mathbb{Z}[X]$ dont $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ est racine.