
MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2021-2022

Fiche 5: Produits semi-directs

1. (a) Soient K un corps et E un K -espace vectoriel. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $p : E \rightarrow E/F$ la projection canonique. Montrer que pour tout supplémentaire S de F , la restriction $p|_S : S \rightarrow E/F$ est un isomorphisme.
(b) Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G avec H distingué dans G . Soit $p : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Montrer que la restriction $p|_K : K \rightarrow G/H$ est un isomorphisme si et seulement si $G = H \rtimes K$.
(c) Soit G un groupe et H un sous-groupe distingué de G . Soit $p : G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Peut-on toujours trouver un sous-groupe K de G tel que la restriction $p|_K : K \rightarrow G/H$ soit un isomorphisme?
2. Soit $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note \bar{k} et \hat{k} les classes de k dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, respectivement.
(a) Soit $H_1 = \langle (\bar{2}, \hat{1}) \rangle$. Existe-t-il un sous-groupe K de G tel que $G = H_1 \rtimes K$?
(b) Soit $H_2 = \langle (\bar{2}, \hat{0}) \rangle$. Existe-t-il un sous-groupe K de G tel que $G = H_2 \rtimes K$?
3. (a) Montrer que les groupes \mathbb{A}_4 et \mathbb{S}_4 sont des produits semi-directs non triviaux.
(b) Qu'en est-il pour le groupe \mathbb{S}_n avec $n \geq 5$?
(c) Qu'en est-il pour le groupe \mathbb{A}_n avec $n \geq 5$?
4. (a) Donner un exemple de produit semi-direct non direct $\mathbb{R} \rtimes_\rho \mathbb{R}$.
(b) Pour p et q nombres premiers, à quelle condition peut-on définir un produit semi-direct non direct $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes_\rho \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?

5. On considère les matrices suivantes

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

de $M_2(\mathbb{C})$. On indique ci-dessous les produits non triviaux suivants, où l'élément de la rangée indexée par $M \in M_2(\mathbb{C})$ et la colonne indexée par $N \in M_2(\mathbb{C})$ est $M \times N$:

\times	M_1	M_2	M_3
M_1	$-M_0$	M_3	$-M_2$
M_2	$-M_3$	$-M_0$	M_1
M_3	M_2	$-M_1$	$-M_0$

- (a) En déduire que l'ensemble $Q = \{\pm M_0, \pm M_1, \pm M_2, \pm M_3\}$ est un sous-groupe non abélien de $GL_2(\mathbb{C})$.
- (b) Montrer que tous les sous-groupes de Q sont distingués dans Q .
- (c) Peut-on écrire Q comme produit semi-direct interne de deux sous-groupes non triviaux?

6. On fixe un entier $n \geq 3$. Dans \mathbb{R}^2 , on considère l'ensemble $P_n = \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$, où pour tout $k \in \mathbb{Z}$, A_k est le point d'affixe $e^{2i\pi k/n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On note D_n le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ des isométries de \mathbb{R}^2 qui laissent l'ensemble P_n globalement invariant.

- En utilisant l'action naturelle du groupe D_n sur l'ensemble P_n , montrer que D_n est fini et $|D_n| = 2n$.
- On note $H = D_n \cap SO(\mathbb{R}^2)$. Montrer que $|D_n| = 2|H|$.
- Soient $s \in D_n \setminus SO(\mathbb{R}^2)$ et $K = \langle s \rangle$. Montrer que $D_{2n} = H \rtimes K$.
- Montrer que pour toute rotation r on a $sr s^{-1} = r^{-1}$.
- En déduire que le produit $D_n = H \rtimes K$ n'est pas direct.
- Dans le cas où $n = 6$, le groupe D_6 contient $-\text{id}_{\mathbb{R}^2}$ et une rotation r d'ordre 3. Montrer que $D_6 = H_1 \rtimes K_1$, où $H_1 = \langle r \rangle$ et $K_1 = \langle -\text{id}_{\mathbb{R}^2}, s \rangle$.

7. Soient H et K deux groupes et φ un morphisme de groupes de K dans $\text{Aut}_{\text{Gr}}(H)$. Montrer que le produit semi-direct $H \rtimes_{\varphi} K$ est abélien si et seulement si H et K sont abéliens et φ est trivial.

8. Soit E un K -espace vectoriel. On appelle application affine de E dans E la somme d'une application linéaire et d'une application constante de E dans E . Soit $\text{GA}(E)$ l'ensemble des bijections affines de E dans lui-même. Soit T l'ensemble des translations de E , c'est-à-dire des applications de E dans E de la forme $\tau_c : x \mapsto x + c$ où $c \in E$.

- Montrer que $\text{GA}(E)$ est un groupe et $\text{GL}(E)$ et T des sous-groupes de $\text{GA}(E)$.
Indication : montrer que tout élément de $\text{GA}(E)$ s'écrit de la forme $\tau_c \circ \ell$ avec $\ell \in \text{GL}(E)$.
- Montrer que $\text{GA}(E) = T \rtimes \text{GL}(E)$. À quelle condition ce produit est-il direct ?

9. Montrer qu'un groupe abélien fini est le produit direct de ses sous-groupes de Sylow.

10. Quels sont les sous-groupes de Sylow de \mathbb{A}_4 ? de \mathbb{S}_4 ?

11. Soit G un groupe d'ordre 63.

- Montrer que G contient un unique sous-groupe d'ordre 7, qu'on notera H , et qu'il admet un sous-groupe K d'ordre 9.
- Montrer que G est produit semi-direct interne de H et K .
- Montrer que ce produit interne est direct si et seulement si K est l'unique sous-groupe d'ordre 9 dans G .
- Lorsque ce produit interne n'est pas direct, combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre 9 dans G ?
- Construire un morphisme de groupe non trivial θ de $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ vers $\text{Aut}_{\text{Gr}}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ et en déduire un groupe d'ordre 63 ayant exactement 7 sous-groupes d'ordre 9.

12. Soient H et K deux groupes et φ, ψ deux morphismes de K dans $\text{Aut}_{\text{Gr}}(H)$.

- On suppose qu'il existe un automorphisme $\alpha \in \text{Aut}_{\text{Gr}}(K)$ tel que $\varphi = \psi \circ \alpha$. Montrer que l'application $f : H \times K \rightarrow H \times K$ définie par $f(h, k) = (h, \alpha(k))$ est un isomorphisme de groupes de $H \times_{\varphi} K$ vers $H \times_{\psi} K$.
- Montrer que si H' est un sous-groupe isomorphe à H et K' est un sous-groupe isomorphe à K , alors $H \times_{\varphi} K$ est isomorphe à un produit semi-direct $H' \times_{\varphi'} K'$.
Indication : construire un morphisme φ' de K' dans $\text{Aut}_{\text{Gr}}(H')$ à l'aide d'un isomorphisme f de H vers H' , d'un isomorphisme g de K vers K' et de φ .

- (c) Étant donné $\sigma \in \text{Aut}_{G_r}(H)$ et $\alpha \in \text{Aut}_{G_r}(K)$, on suppose qu'il existe un automorphisme intérieur Int_σ associé à K tel que $\text{Int}_\sigma \circ \varphi = \psi \circ \alpha$. Montrer que l'application $F : H \times K \rightarrow H \times K$ définie par $f(h, k) = (\sigma(h), \alpha(k))$ est un isomorphisme de groupes de $H \times_\varphi K$ vers $H \times_\psi K$.
- 13.** Soient p et q deux entiers premiers avec $p < q$. On se propose de faire la liste des groupes d'ordre pq à isomorphisme près. Soit G un groupe d'ordre pq .
- (a) Montrer que G contient un unique q -Sylow Q et que Q est distingué dans G .
 - (b) Soit P un p -Sylow de G . Montrer que $G = Q \rtimes P$.
 - (c) Montrer que $|\text{Aut}_{G_r}(Q)| = q - 1$ et décrire les éléments de $\text{Aut}_{G_r}(Q)$.
 - (d) Montrer que si p ne divise pas $q - 1$, alors $G = Q \times P$ et G est cyclique.
 - (e) Montrer que si p divise $q - 1$, alors il existe exactement deux groupes d'ordre pq à isomorphisme près.
- 14.** On se propose de faire la liste des groupes d'ordre 12 à isomorphisme près.
- (a) Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que le groupe G contient un sous-groupe distingué d'ordre 3 ou un sous-groupe distingué d'ordre 4.
 - (b) En déduire qu'il existe exactement cinq groupes d'ordre 12 à isomorphisme près. Reconnaître A_4 et D_6 .