
MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2021-2022

Fiche 3: Groupes symétriques

1. Déterminer la signature et l'ordre des permutations suivantes.

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 4 & 5 & 8 & 7 & 9 & 11 & 10 & 1 & 12 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 12)(2\ 3\ 5\ 7\ 10)(4\ 8\ 1)$.

2. Soient $2 \leq m \leq n$ deux entiers et $\gamma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_m) \in \mathbb{S}_n$ un cycle de longueur m . Montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2)\ \dots\ \sigma(a_m))$.

3. Soit G un groupe, engendré par un nombre fini d'éléments g_1, \dots, g_n . Soient h_1, \dots, h_m des éléments de G et $H = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ le sous-groupe qu'ils engendrent.

(a) Montrer que H est distingué si et seulement si $g_i h_j g_i^{-1} \in H$ et $g_i^{-1} h_j g_i \in H$, pour tous $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

(b) Dans \mathbb{S}_4 , on considère les permutations $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4)$, $s_1 = (1\ 2) \circ (3\ 4)$, $s_2 = (1\ 3) \circ (2\ 4)$ et $s_3 = (1\ 4) \circ (2\ 3)$. Montrer que $\langle \gamma \rangle \trianglelefteq \langle \gamma, s_1 \rangle$.

(c) Pour des éléments a, b, c, d de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, deux-à-deux distincts, décomposer en cycles disjoints la permutation $((a\ b) \circ (c\ d)) \circ ((a\ c) \circ (b\ d))$.

(d) Soit $K = \{\text{id}, s_1, s_2, s_3\}$. Montrer que $\langle s_1 \rangle \trianglelefteq K$ et $K \trianglelefteq \mathbb{S}_4$, mais $\langle s_1 \rangle \not\trianglelefteq \mathbb{S}_4$.

4. (a) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier et $n \geq p$ un entier.

(i) Quels sont les éléments d'ordre p dans \mathbb{S}_n ?

(ii) Le résultat subsiste-t-il lorsque p n'est pas premier ?

(b) Montrer que dans \mathbb{S}_8 tout élément d'ordre 10 a pour signature -1 . Montrer que dans \mathbb{S}_n tout élément d'ordre impair a pour signature 1.

5. Soit $n \geq 2$ un entier. Dans \mathbb{S}_n , on considère le n -cycle $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n-1\ n)$ et deux transpositions $\tau_0 = (1\ 2)$ et $\tau = (a_1\ a_2)$.

(a) Montrer que $\{\gamma, \tau_0\}$ engendre \mathbb{S}_n .

Indication : on pourra montrer que $\langle \gamma, \tau_0 \rangle$ contient toutes les transpositions de la forme $(i\ i+1)$.

(b) Montrer que si n est premier, alors $\{\gamma, \tau\}$ engendre \mathbb{S}_n .

Indication : montrer que pour un entier r convenable, on a $\gamma^r(a_1) = a_2$, vérifier que γ^r est encore un n -cycle et conjuguer τ par les puissances de γ^r .

(c) Donner un exemple où $\{\gamma, \tau\}$ n'engendre pas \mathbb{S}_n .

6. Un exemple provenant du mélange d'un jeu de cartes. Vérifier que l'on définit bien une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_{32}$ en posant $\sigma(k) = 2k$ si $k \leq 16$ et $\sigma(k) = 2k - 33$ si $k \geq 17$. Déterminer son ordre et sa signature. Retrouver ce résultat en remarquant que $\sigma(k) \equiv 2k \pmod{33}$ pour tout $k \in \llbracket 1, 32 \rrbracket$.

7. Soient p un nombre premier impair et $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. Pour tout a dans G , on note σ_a et ρ_a les permutations de G dans G définies par $\sigma_a(x) = ax^{-1}$ et $\rho_a(x) = ax$. Déterminer le type, l'ordre et la signature des permutations σ_a et ρ_a . On sera amené à distinguer deux cas, suivant que a possède ou non une racine carrée dans G .

8. *Nombre d'orbites et signature d'une permutation.* Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$. Pour tout $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Ens}}(E)$ et $x \in E$, on note $O_\sigma(x)$ l'orbite de x sous l'action de σ , $N(\sigma)$ le nombre d'orbites de σ et $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-N(\sigma)}$. On cherche à retrouver les principales propriétés de la signature à partir de cette définition.

- (a) Soient $\sigma \in \text{Aut}_{\text{Ens}}(E)$ et la transposition $\tau = (a\ b) \in \text{Aut}_{\text{Ens}}(E)$ pour $a, b \in E$ distincts. L'objet des questions suivantes est de comparer les orbites sous l'action de σ avec les orbites sous l'action de $\tau \circ \sigma$. On note O_1 et O_2 les orbites de a et de b sous l'action de σ .
- Montrer que $O_{\tau \circ \sigma}(x) = O_\sigma(x)$, pour tout $x \in E \setminus (O_1 \cup O_2)$.
 - Dans cette question, on suppose que $O_1 = O_2$. Montrer alors que les orbites de a et b sous l'action de $\tau \circ \sigma$ sont différentes et que leur réunion est O_1 .
 - Dans cette question, on suppose que $O_1 \neq O_2$. Montrer alors que l'orbite de a sous l'action de $\tau \circ \sigma$ est $O_1 \cup O_2$.
 - Quelle relation y a-t-il entre $N(\tau \circ \sigma)$ et $N(\sigma)$? Entre $\epsilon(\tau \circ \sigma)$ et $\epsilon(\sigma)$?
- (b) En déduire les conséquences suivantes :
- le nombre minimum de transpositions nécessaires pour écrire σ comme composée de transpositions est $n - N(\sigma)$;
 - la signature d'une composée de k transpositions est $(-1)^k$;
 - la signature est un morphisme de groupes de $\text{Aut}_{\text{Ens}}(E)$ dans le groupe $\{-1, 1\} = \mathbb{Z}^\times$.

9. *Décomposition en orbites et carré d'une permutation.*

- Décomposer en cycles le carré d'un cycle de longueur ℓ .
- Montrer que le produit de deux cycles de longueur ℓ de supports disjoints est le carré d'une permutation.
- À quelle condition, un cycle de longueur ℓ est-il le carré d'une permutation?
- Soit $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Décrire la décomposition en cycles de σ^2 en fonction de celle de σ .
- À quelle condition une permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ est-elle un carré?

10. *Classes de conjugaison de \mathbb{S}_n .*

- Faire la liste des classes de conjugaison de $\mathbb{S}_3, \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_5$ en indiquant leur cardinal ainsi que la signature et l'ordre des éléments appartenant à cette classe.
- En déduire les sous-groupes distingués de \mathbb{S}_5 .
- Montrer que dans \mathbb{A}_5 , les 3-cycles, les produits de deux transpositions de supports disjoints et les 5-cycles forment respectivement une, une et deux classes de conjugaison. En déduire les sous-groupes distingués de \mathbb{A}_5 .

11. *Sous-groupes distingués de \mathbb{S}_4 .* Dans \mathbb{S}_4 , on note $s_1 = (1\ 2)(3\ 4)$, $s_2 = (1\ 3)(2\ 4)$ et $s_3 = (1\ 4)(2\ 3)$. Soient $E = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $K = E \cup \{\text{id}\}$. On rappelle que K est un sous-groupe distingué dans \mathbb{S}_4 .

- En utilisant l'action par conjugaison de \mathbb{S}_4 sur E , construire un isomorphisme entre \mathbb{S}_4/K et \mathbb{S}_3 .

(b) Soit H un sous-groupe distingué de \mathbb{S}_4 . Montrer que H est égal à $\{\text{id}\}$, K , \mathbb{A}_4 ou \mathbb{S}_4 .

Indication : discuter suivant que H contient ou non un 3-cycle.

(c) On note $D(\mathbb{A}_4)$ le sous-groupe de \mathbb{A}_4 engendré par $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_4$. Montrer que $D(\mathbb{A}_4) = K$.

Indication : pour l'inclusion $D(\mathbb{A}_4) \subseteq K$, montrer que le groupe quotient \mathbb{A}_4/K est abélien. Qu'en déduit-on sur $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$ lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_4$? Pour une autre méthode, si ρ et σ sont des éléments dans \mathbb{A}_4 , il y a deux possibilités : soit ρ et σ sont des 3-cycles, soit ρ ou σ est dans K .

12. Soient $n \geq 2$, G un groupe et $f : \mathbb{S}_n \rightarrow G$ un morphisme de groupes.

(a) Si $G = \mathbb{C}$, montrer que f est soit le morphisme trivial, soit la signature.

(b) Si G est abélien, montrer que $\text{Im}(f)$ est d'ordre 1 ou 2. En déduire que \mathbb{A}_n est le seul sous-groupe d'indice 2 dans \mathbb{S}_n .

(c) On suppose ici que $n \neq 4$. Montrer que $\text{Im}(f)$ est d'ordre 1, 2 ou $n!$. En déduire que si H est un sous-groupe de \mathbb{S}_n tel que $[\mathbb{S}_n : H] > 2$, alors $[\mathbb{S}_n : H] \geq n$.

Indication : utiliser l'action par translation à gauche de \mathbb{S}_n sur \mathbb{S}_n/H .

(d) Exhiber un sous-groupe d'indice n dans \mathbb{S}_n .

13. Soient $n \geq \ell \geq 2$ des entiers.

(a) Quel est le sous-groupe de \mathbb{S}_n engendré par les ℓ -cycles ?

(b) Combien y a-t-il de ℓ -cycles différents ?

(c) On se donne un ℓ -cycle $\gamma = (a_1 \dots a_\ell)$ dans \mathbb{S}_n . Quelles sont les permutations de \mathbb{S}_n qui commutent avec γ ? Combien y en a-t-il ?

Indication : pour tout $\sigma \in \mathbb{S}_n$, $\sigma \circ \gamma = \gamma \circ \sigma$ si et seulement si $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = \gamma$.

14. Automorphismes de \mathbb{S}_n . Soit $n \geq 3$ un entier autre que 6. Soit $\phi \in \text{Aut}_{\text{Gr}}(\mathbb{S}_n)$.

(a) Montrer que $\phi(1\ 2)$ est un produit de transpositions à supports disjoints. On notera r leur nombre.

(b) En déduire que ϕ transforme toute transposition en un produit de r transpositions à supports disjoints et que r est impair.

(c) En déduire que ϕ^{-1} transforme tout produit de r transpositions à supports disjoints en une transposition.

(d) En déduire que

$$r = \binom{n-2}{2r-2} (2r-3) \dots 3 \cdot 1,$$

puis que $r = 1$.

(e) Soit $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$. Quel est l'ordre de la permutation $\phi((1\ k) \circ (1\ 2))$? En déduire que les supports des permutations $\phi(1\ 2)$ et $\phi(1\ k)$ ont exactement un point en commun. Montrer que ce point ne dépend pas de k .

(f) Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{S}_n$ tel que $\phi(i\ j) = (f(i)\ f(j))$, pour tous les points $i \neq j$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire que l'automorphisme ϕ est intérieur.