# TD n° 2 : séries à termes positifs

*Organisation :* les exercices sont divisés en trois catégories : * correspond aux exercices de base, à maîtriser impérativement, ** correspond aux exercices de difficulté moyenne, c'est en gros le niveau requis pour valider l'UE, *** correspond aux exercices plus avancés.

*** Définitions à connaître par cœur**

— somme partielle d'ordre $n$ d'une série, suite des sommes partielles d'une série,

— série convergente, série divergente, somme et reste d'orde $n$ d'une série convergente.

*** Propriétés à connaître par cœur**

— séries géométriques convergentes/divergentes, séries de Riemann convergentes/divergentes,

— terme général positif et suite des sommes partielles majorée $\Longrightarrow$ série convergente,

— comparaison entre termes généraux et implication sur la convergence/divergence pour des séries à termes positifs,

— règle de d'Alembert, règle de Cauchy.

## Exercice 1. * Des suites aux séries : une somme télescopique

1. Déterminer trois réels $a, b, c$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ différent de 0, 1 et $-1$ on ait :
$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$
2. En utilisant cette relation pour $x = 2, 3, \ldots, n$, déterminer pour tout $n \geq 2$ une expression simple de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2(2^2-1)} + \frac{1}{3(3^2-1)} + \cdots + \frac{1}{n(n^2-1)}$.
3. En déduire que la série $\left(\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(k^2-1)}\right)$ converge et donner sa somme.

## Exercice 2. * Convergence d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs.

Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n^2} u_k\right)_{n\geq 0}$ converge.

## Exercice 3. * Séries convergentes ou divergentes

Déterminer la nature des séries de terme général donné.

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}$ (montrer que $u_n$ ne tend pas vers 0),
2. $u_n = \dfrac{2^n}{3^n n^2}$ (comparer à une série géométrique),
3. $u_n = \dfrac{e^{-n}}{4+\sin n}$ (comparer à une série géométrique),
4. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ (comparer à une série géométrique),

5. $u_n = \dfrac{e^{1/n}}{n+1}$ (trouver un équivalent polynomial de $u_n$),
6. $u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ (trouver un équivalent polynomial de $u_n$),
7. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (comparer $u_n$ à $\frac{1}{n^2}$, ou utiliser la règle de d'Alembert),
8. $u_n = ne^{-n}$ (comparer $u_n$ à une suite géométrique, ou à $\frac{1}{n^2}$, ou utiliser la règle de d'Alembert, ou utiliser la règle de Cauchy),
9. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (considérer $\ln(u_n)$).

**Exercice 4. ** Séries convergentes ou divergentes**
Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ ci-dessous sont positives à partir d'un certain rang, et déterminer la nature des séries $(\sum_n u_n)$ correspondantes.

1. $u_n = \dfrac{1 - n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}$ ,
2. $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ ,
3. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ ,
4. $u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$ ,
5. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ ,
6. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$ ,
7. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ ,
8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$
   (discuter selon la valeur du réel $\alpha$),
9. $u_n = n^2 \left(\sin\dfrac{1}{n} + \cos\dfrac{1}{n} + \left(\ln(1 - \dfrac{1}{n})\right)^2 - e^{\frac{1}{n}}\right)$.

**Exercice 5. ** Calculs de sommes de séries**
Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $\left(\sum_{n\geq 0} 3^{-n}\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 3} \dfrac{2}{5^n}\right)$
3. $\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}\right)$
4. $\left(\sum_{n\geq 2} \dfrac{3}{(n-1)!}\right)$
5. $\left(\sum_{n\geq 0} \dfrac{n+2}{n!}\right)$
6. $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^2+n+1}{n!}\right)$

**Exercice 6. **** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n/(1+u_n)$. Montrer que les séries $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ sont de même nature (si l'une converge, l'autre converge).

**Exercice 7. ** Comparaison série - intégrale** Soit $\alpha$ un réel

1. Lorsque $\alpha < 1$, donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Lorsque $\alpha = 1$, donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
3. Lorsque $\alpha > 1$, donner un équivalent de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
4. Montrer que $\ln(n!) \sim n \ln n$.

**Exercice 8. ** Constante d'Euler**

Pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = \ln(n) - \ln(n-1) - 1/n$.

1. En écrivant $u_n = -\ln(1-n^{-1}) - n^{-1}$ et à l'aide d'un développement limité, montrer que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et que la série $(\sum_n u_n)$ converge.
2. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ admet une limite finie quand $n \to +\infty$. Cette limite s'appelle constante d'Euler.

**Exercice 9. ** Équivalence des sommes partielles ou des restes**

Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites positives. On suppose que $u_n \sim v_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

1. Lorsque la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge, montrer que $\sum_{k>n} u_k \sim \sum_{k>n} v_k$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
2. Lorsque la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} = C - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

**Exercice 10. ** Écriture décimale et séries**

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
   (a) Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}\right)$ converge.
   (b) Montrer que si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est un nombre rationnel.
2. Pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On rappelle que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $x$ un réel dans l'intervalle $[0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.
   (b) Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n}\right)$ converge et que sa somme vaut $x$.
   (c) Montrer qu'on ne peut pas avoir tous les $a_n$ égaux à 9 à partir d'un certain rang.
   (d) *** Montrer que si $x$ est rationnel, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang. (Commencer par le vérifier pour un nombre comme $2/7$.)

**Exercice 11. ** Une autre preuve de convergence pour les séries de Riemann, en faisant des paquets**

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.

1. Montrer que les séries $(\sum_n u_n)$ et $(\sum_n v_n)$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle démonstration des critères de convergence des séries de Riemann.
3. Étudier la convergence des séries $\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln n}\right)$ et $\left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}\right)$.

**Exercice 12. *** Séries à terme général positif décroissant**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante telle que $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ on ait $(n-N)u_n \leqslant \varepsilon$.
2. En déduire que $nu_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

3. Donner un exemple de suite positive $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(\sum_{n\geq 0} v_n)$ converge et $nv_n$ ne tende pas vers 0.

**Exercice 13. ** Un calcul de Leibniz**

Dans le texte ci-dessous, Leibniz (1646-1716) souhaite calculer la somme des inverses des nombres triangulaires. On rappelle qu'un nombre triangulaire est de la forme

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

Les premiers nombres triangulaires sont 1, 3, 6, 10, 15.... Leibniz veut donc calculer la somme $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{2}{n(n+1)}$.

**Theorema Arithmeticae infinitorum.**

**Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.**

**series** $\odot\ \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ **etc. in infinitum** $\sqcap$ **2.**

**Demonstratio.**

**Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum**

**series** ☽ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ **etc. in infinitum.**

**Exponatur et series** $\odot$ **dimidiata:**

**series** ☿ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ **etc. in infinitum**

**Quam ajo esse** $\sqcap$ **1.**

**Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit** $\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252}$ **etc. sive depressis fractionum Terminis**

**series** ♀ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ **etc. in infinitum.**

**Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀ Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales.**

**Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ☿ sive series** $\odot$ **erit aequalis binario.**

**Quod demonstrandum sumseramus.**

Son calcul est le suivant. Comme $\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - 1 \qquad (1)$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ ce qui donne la valeur 2 pour la somme des inverses des nombres triangulaires. Le problème du raisonnement de Leibniz est qu'il utilise pour calcul intermédiaire une somme divergente $\sum_n 1/n$ et simplifie de fait par $+\infty$ de chaque côté de (1).

Reprendre le calcul (1) de Leibniz mais en écrivant des sommes partielles plutôt que les sommes complètes qui ne sont pas toutes définies. Montrer alors rigoureusement que $(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)})$ est une série convergente qui a pour somme 1.