DM3

Exercice 6

1. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ est une série alternée. En notant $\forall n\geq 0$, $a_n = \frac{1}{2n+1}$

on a :
- $a_n \geq 0$
- $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2(n+1)+1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} < 0$

  donc $(a_n)_{n\geq 0}$ décroissante.

le critère spécial des séries alternées donne la convergence de la série.

2.
$$J_0 = (-1)^0 \int_0^1 \frac{t^{2\times 0}}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$= \Big[\arctan(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$$
$$= \arctan(1) - \arctan(0)$$
$$= \pi/4 - 0$$
$$= \pi/4.$$

3. Pour tout $t \in [0,1]$, $\quad 1 \leq 1+t^2 \leq 2$

donc $\quad 1 \geq \frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}$

donc $\quad t^{2n} \geq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \geq \frac{t^{2n}}{2}$

donc $\quad \int_0^1 t^{2n}\,dt \geq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \geq \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2}\,dt.$

Une primitive de $t \mapsto t^{2n}$ est $t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

Ainsi, $\left[\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{t=0}^{t=1} \geqslant J_n \geqslant \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{t=0}^{t=1}$

d'où $\dfrac{1}{2n+1} \geqslant J_n \geqslant \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2n+1}$

Par encadrement, $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$J_{n+1} - J_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n}\times t^2}{1+t^2}\,dt - (-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n}\times t^2}{1+t^2} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{2n}(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{2n}\,dt$$

$$= (-1)^{n+1}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = -\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

5. Soit $N \in \mathbb{N}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad Q?4.$$

$$= -\sum_{n=0}^{N}\left(J_{n+1} - J_n\right)$$

$$= -\sum_{n=0}^{N} J_{n+1} + \sum_{n=0}^{N} J_n$$

$l = n+1$,

$$= -\sum_{l=1}^{N+1} J_l + \sum_{n=0}^{N} J_n$$

$$= J_0 - J_{N+1}$$

Or, d'après la question 3, $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi, $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} J_0 + 0$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = J_0 = \frac{\pi}{4}$