DM 2

3.8 Avec d'Alembert ; pour $n \geqslant 1$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)e^{-(n+1)}}{n e^{-n}} = \frac{n+1}{n} e^{-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, $\left(\sum_{n \geqslant 0} u_n\right)$ converge.

4.7 $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} e^{n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} e^{-\sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ceci dit que $\left(\sum_{n \geqslant 1} u_n\right)$ ne diverge pas grossièrement.
Elle peut converger ou diverger.
On va montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
Pour cela on souhaite montrer que $n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
En reprenant les étapes du dessus,

$$n^2 u_n \underset{n \to +\infty}{=} n^2 e^{-\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2} + o(1)}$$

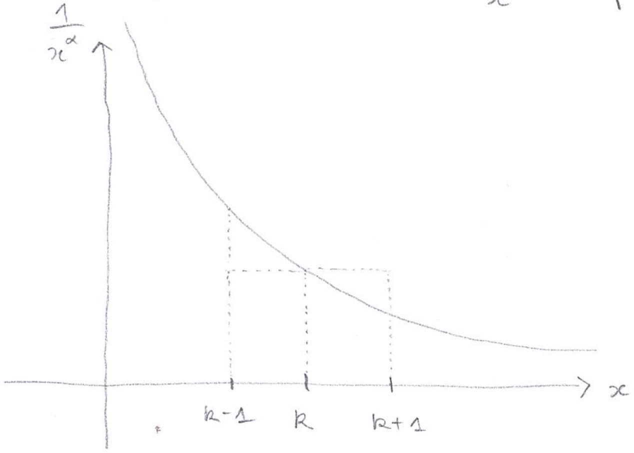
$$= \underbrace{(\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}}}_{\substack{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ \text{(par croissances} \\ \text{comparées)}}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2} + o(1)}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1/2}}$$

d'où $n^2 u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Or, $u_n \geqslant 0$ dès que $n \geqslant 1$, donc comme $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge, par comparaison sur les séries à termes positifs, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

7.3

Lorsque $\alpha > 1$, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ a pour graphe



Pour tout $k \geqslant 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

En sommant pour k allant de $n+1$ à N, on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Or, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est $x \longmapsto \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, donc

$$\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=n}^{x=N}$$

D'où
$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Puisque $1-\alpha < 0$, $N^{1-\alpha} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ et $(N+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$

Donc, en faisant tendre N vers $+\infty$, l'inégalité se récrit :

$$-\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

C'est-à-dire
$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Mais $(n+1)^{1-\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{1-\alpha}$ (à vérifier !)

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$