DM 1

2.7

Soit $x = \frac{1}{n}$

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - 0}{x - 0} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

On reconnait un taux d'accroissement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$. Automatiquement $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \to +\infty}{=} O(u_n)$

Autre preuve que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$:

$$\frac{\sin(1/n)}{1/n} = n \sin(1/n) \underset{n \to +\infty}{=} n \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} 1 + o(1)$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

8.6

1ère résolution :

$$n^2 + 3n - 2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$$

donc $u_n = \dfrac{\ln(n^2 + 3n - 2)}{\ln(n^{1/3})} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n^2)}{\ln(n^{1/3})} = \dfrac{2 \ln(n)}{1/3 \ln(n)} = 6$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

2ème résolution

$$u_n = \frac{\ln\left(n^2\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\right)}{1/3 \ln(n)} = \frac{\ln(n^2)}{1/3 \ln(n)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{1/3 \ln(n)}$$

$$= 6 + \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right)}{1/3 \ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 6$

9.4

$$n^s u_n = n^s \frac{(e^{2/n} - 1)}{\sqrt{n}}$$

$$= n^s \frac{(e^{2/n} - 1)}{n^{1/2}}$$

$$= n^{s-1/2} \left(e^{2/n} - 1\right)$$

Or, $e^{2/n} \underset{n \to +\infty}{\sim} 1 + \frac{2}{n}$

Donc $e^{2/n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$

Puis $n^{s-1/2} \left(e^{2/n} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{s-1/2} \times \frac{2}{n}$

Finalement, $n^s u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\, n^{s-3/2}$

Or, $2\, n^{s-3/2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \iff s < 3/2$

Donc $n^s u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \iff s < 3/2$.