Développements limités usuels

À connaître par cœur...

$$
\begin{aligned}
e^x &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) + o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) + o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right) + o(x^n)\\
\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) &&\underset{x\to 0}{=} \left(-\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{x^k}{k}\right) + o(x^n)\\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o(x^n) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}\right) + o(x^n)\\
\cos x &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right) + o\left(x^{2n}\right)\\
\sin x &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) &&\underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + o\left(x^{2n+1)}\right)\\
\tan x &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Notamment :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Remarque. Le développement limité en 0 de cos est identique à l'ordre suivant par parité de la fonction. De même, celui de sin et de tan sont identiques à l'ordre suivant par imparité.

Thibaut TROUVÉ