CONTRÔLE CONTINU CORRECTION

Questions de cours.

1. On définit la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ par
$$S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n.$$
Si la suite des sommes partielles converge, on dit que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

2. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si
$$\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\eta>0, \forall\,(x,y)\in I^2, |x-y|<\eta \Longrightarrow \left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon.$$

3. La subdivision de $[a,b]$ en n intervalles de même longueur est $\{x_0<\ldots<x_n\}$, avec $x_k = a+k(b-a)/n$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. La somme de Riemann de f associée correspondant à la méthode des rectangles à gauche pour cette subdivision est
$$R_n := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$
Comme f est continue sur $[a,b]$,
$$R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice 1. La fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue, ainsi que la fonction $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $h(x) = f\left(x^2\right)$ pour tout$x\in\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, ces fonctions admettent donc des primitives $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $H:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$g_1(x) = F(x)-F(0), \qquad g_2(x) = F\left(x^3\right)-F(3x), \qquad g_3(x) = H\left(x^3\right)-H(3x).$$
Les fonctions g_1, g_2 et g_3 sont dérivables comme différences de composées de fonctions dérivables et pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$g_1'(x) = f(x) \quad\text{et}\quad g_2'(x) = 3x^2 f\left(x^3\right)-3f(3x).$$
$$g_3'(x) = 3x^2 h\left(x^3\right)-3h(3x) = 3x^2 f\left(x^6\right)-3f\left(9x^2\right).$$

Exercice 2.

1. Pour tout $x>0$,
$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{a}{t}dt+\int_1^x \frac{bt+c}{t^2+2t+5}dt &= \Big[a\ln t\Big]_{t=1}^{t=x}+\int_1^x \frac{b(t+1)}{t^2+2t+5}dt+\int_1^x \frac{c-b}{t^2+2t+5}dt\\
&= a\ln x - a\ln 1+\frac{b}{2}\int_1^x \frac{2t+2}{t^2+2t+5}dt+(c-b)\int_1^x \frac{1}{(t+1)^2+4}\\
&= a\ln x+\frac{b}{2}\Big[\ln\left(t^2+2t+5\right)\Big]_{t=1}^{t=x}+\frac{(c-b)}{4}\int_1^x \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}dt\\
&= a\ln x+\frac{b}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{b}{2}\ln 8+\frac{c-b}{4}\int_1^x \frac{1}{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}dt\\
&= a\ln x+\frac{b}{2}\ln\left(x^2+2x+5\right)-\frac{b}{2}\ln 8+\frac{c-b}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{c-b}{2}\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

2. On cherche des constantes a, b, c telles que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{3t^2+5t+5}{t\left(t^2+2t+5\right)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+2t+5}.$$

En multipliant par t les deux membres et en faisant tendre t vers 0, on trouve $1 = a$. On calcule donc

$$\frac{3t^2+5t+5}{t\left(t^2+2t+5\right)} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2+5t+5-\left(t^2+2t+5\right)}{t\left(t^2+2t+5\right)} = \frac{2t^2+3t}{t\left(t^2+2t+5\right)} = \frac{2t+3}{t^2+2t+5}$$

Ainsi, en prenant $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$ dans la question précédente, il vient

$$\int_1^x \frac{2t^2+5t+5}{t\left(t^2+2t+5\right)} dt = \ln x + \ln\left(x^2+2x+5\right) - \ln 8 + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 3.

1. Pour tout $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = \int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right) dt = \left[2\sqrt{t} - t\right]_{t=1}^{t=x} = 2\sqrt{x} - x - 1.$$

2. On effectue deux intégrations par parties. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 \cos t\, dt &= \left[t^2 \sin t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x 2t \sin t\, dt \\
&= x^2 \sin x - \left(\left[-2t\cos t\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -2\cos t\, dt\right) \\
&= x^2 \sin x - \left(-2x\cos x + \left[2\sin t\right]_{t=0}^{t=x}\right) \\
&= \left(x^2-2\right)\sin x + 2x\cos x.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin^4 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 &= \frac{1}{16}\left(e^{i4t} - 4e^{i3t}e^{-it} + 6e^{i2t}e^{-i2t} - 4e^{it}e^{-i3t} + e^{-i4t}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4t} - 4e^{i2t} + 6 - 4e^{-i2t} + e^{-i4t}\right) \\
&= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^x \sin^4 t\, dt = \left[\frac{3}{8}t - \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{2} + \frac{1}{8}\frac{\sin(4t)}{4}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$$

4. Faisons le changement de variable $u = \sin^4 t$. Ceci implique que $du = 4\cos t \sin^3 t\, dt$. Ainsi

$$\int_0^x \frac{\sin^3 t \cos t}{\sin^4 t + 1} dt = \int_0^{\sin^4 x} \frac{du}{4\left(u^2+1\right)} = \left[\frac{\arctan u}{4}\right]_{u=0}^{u=\sin^4 x} = \frac{\arctan\left(\sin^4 x\right)}{4}$$