

# CC3 Mat 302

6 décembre 2023

*Documents et appareils électroniques interdits.*

*Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.*

*Durée : 1h*

## Questions de cours (4p)

1. Soit  $(\sum_n u_n)$  une série de terme général  $u_n$ . Donner la définition de la convergence de la série.
2. Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle.
3. Soit  $[a, b]$  un intervalle compact et  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  une fonction continue. Donner l'expression de la somme de Riemann fournie par la méthode des rectangles à gauche associée à  $f$  sur  $[a, b]$  quand on subdivise  $[a, b]$  en  $n$  intervalles de même longueur. Quelle est la limite de cette somme quand  $n$  tend vers l'infini ?

**Exercice 1 (3p)** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Dire pourquoi les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par les formules ci-dessous sont dérivables et calculer leurs dérivées.

$$g_1(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad g_2(x) = \int_{3x}^{x^3} f(t) dt, \quad g_3(x) = \int_{3x}^{x^3} f(t^2) dt.$$

## Exercice 2 (5p)

1. Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Calculer pour  $x > 1$  :

$$\int_1^x \frac{a}{t} dt + \int_1^x \frac{bt + c}{t^2 + 2t + 5} dt.$$

2. Calculer pour  $x > 1$  :

$$\int_1^x \frac{3t^2 + 5t + 5}{t(t^2 + 2t + 5)} dt.$$

**Exercice 3 (8p)** Calculer les intégrales suivantes pour  $x > 0$  :

1.  $\int_1^x \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt,$
2.  $\int_0^x t^2 \cos(t) dt,$
3.  $\int_0^x \sin^4(t) dt,$
4.  $\int_0^x \frac{\sin^3(t) \cos(t)}{\sin^8(t)+1} dt.$