Corrigé Partiel Mat 302

23 octobre 2023

Questions de cours Soit $(\sum_n u_n)$ une série de terme général u_n.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. La série $(\sum_n u_n)$ converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ des sommes partielles converge.

2. La série $(\sum_n u_n)$ converge absolument si et seulement si la série $(\sum_n |u_n|)$ converge.

3. Notons $(S_N)_{N\geq 0}$ la suite des sommes partielles de la série $(\sum_n u_n)$. Si la série $(\sum_n u_n)$ converge, la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ a une limite finie S et la suite $(S_{N-1})_{N\geq 1}$ converge vers la même limite. Par différence, $u_N = S_N - S_{N-1}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

4. (a) Règle de d'Alembert. On suppose que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que $|u_{n+1}/u_n| \to \ell$ quand $n \to \infty$. Si $\ell < 1$, la série $(\sum_n u_n)$ converge absolument. Si $\ell > 1$, elle diverge grossièrement.

   (b) Règle de Cauchy. On suppose que $|u_n|^{1/n} \to \ell$ quand $n \to \infty$. Si $\ell < 1$, la série $(\sum_n u_n)$ converge absolument. Si $\ell > 1$, elle diverge grossièrement.

Exercice 1

1. La série $(\sum_n u_n)$ diverge grossièrement puisque la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $1/2 \neq 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $u_n \sim 1/(2n)$ quand $n \to \infty$. Selon les critères de comparaison pour les séries à termes généraux positifs, la série $(\sum_n u_n)$ diverge puisque la série harmonique diverge.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ et
$$(u_n)^{1/n} = \frac{n^2+1}{2n^2+1} \to_{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1.$$
D'après la règle de Cauchy, la série converge.

4. Pour tout $n \geq 0$,
$$e^{\sqrt{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{n})^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^{2004} \frac{(\sqrt{n})^k}{k!} \geq \frac{(\sqrt{n})^{2004}}{2004!} = \frac{n^{1002}}{2004!} > 0.$$
Par passage aux inverses, on obtient pour tout $n \geq 1$, $0 < e^{-\sqrt{n}} \leq 2004! n^{-1002}$, d'où $0 < u_n \leq 2004! \frac{1}{n^2}$. La série $(\sum_n \frac{1}{n^2})$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par le critère de comparaison la série à termes positifs $(\sum_n u_n)$ converge.

   Variante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Par croissance comparée, $x^{2004}e^{-x} \to 0$ quand $x \to \infty$, donc $n^2 u_n = n^{1002} e^{-\sqrt{n}} = \sqrt{n}^{2004} e^{-\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $u_n = o(1/n^2)$ quand $n \to +\infty$. Or la série $(\sum_n \frac{1}{n^2})$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). Par le critère de comparaison la série $(\sum_n u_n)$ converge.

5. Quand $n \to \infty$, $n/(n^2+1)$ tend vers 0 et est équivalent à $1/n$, donc

$$u_n = \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}.$$

La série $(\sum_n \frac{1}{n})$ est à termes positifs et diverge (série harmonique), donc la série $(\sum_n u_n)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et diverge.

6. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!2^n/n^n > 0$. On utilise la règle de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{2^n n!} = 2\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Par continuité de l'exponentielle, quand $n \to \infty$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \to e \text{ car } n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\Big(\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = 1 + o(1) \to 1.$$

Donc $u_{n+1}/u_n \to 2/e$ quand $n \to \infty$. La série $(\sum_n u_n)$ converge alors.

7. Pour tout $n \geq 2$, $u_n = e^{n\ln(1-1/\sqrt{n})}$. Comme $\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$, on obtient

$$n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\Big(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -\sqrt{n} - 1/2 + o(1)$$

Donc $\ln u_n + \sqrt{n} + 1/2 \to 0$ et par continuité de l'exponentielle, $u_n e^{\sqrt{n}} e^{1/2} \to 1$, autrement dit $u_n \sim e^{-1/2}e^{-\sqrt{n}}$. On montre comme à la question 1.4. que $u_n = o(n^{-2})$. Comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit par le critère de comparaison que la série $(\sum_n u_n)$ converge.

Exercice 2

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ est strictement décroissante sur $]1,\infty[$, puisque la fonction $x \mapsto x\ln x$ est croissante et strictement positive comme produit de deux fonctions croissantes strictement positives. On a alors pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}dx \leq \frac{1}{k\ln k}.$$

En additionnant ces inégalités pour $k = 2, ..., n$ et en utilisant la règle de Chasles, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} \leq \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}. \tag{1}$$

2. On a

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x} = \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

L'inégalité (1) montre alors que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

La série $\sum_n 1/(n\ln(n))$ diverge.

3. On déduit de (1) que pour tout $n \geq 2$,
$$S_n - \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n.$$
En retranchant S_n on obtient
$$-\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) - S_n \leq 0,$$
d'où le résultat en passant aux opposés.

Exercice 3

1. La suite $(1/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. Le critère des séries alternées assure donc la convergence de la série $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$.

2. Pour $n \geq 2$, notons
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}.$$
Comme $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ quand $x \to 0$, on a donc
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \quad (2)$$

3. Le développement limité (2) montre en particulier que $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

4. L'équivalent ci-dessus ne garantit que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$ soient de même nature puisqu'il ne s'agit pas de séries à termes positifs.

5. Le membre de droite de (2) comprend quatre termes. La série associée au premier terme converge, voir la question 1 de cet exercice. Les séries associées aux deux derniers termes convergent absolument par comparaison à la série de Riemann convergente $\big(\sum_n 1/n^{3/2}\big)$. Seule la série associée aux deuxième terme (série harmonique $\big(\sum_n 1/n\big)$) diverge. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge (sinon, par différence, la convergence de cette série entraînerait la convergence de la série harmonique).

6. Le critère des séries alternées ne s'applique pas car une des hypothèses n'est pas vérifiée. Par élimination (les autres hypothèses sont vérifiées), il s'agit de la décroisssance (à partir d'un certain rang) de la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n})_{n\geq 2}$.

Exercice 4

1. Pour tout $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} v_n &= \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \\ &= \ln\Big(1+\frac{\alpha}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) - \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \end{aligned}$$
En utilisant le développement limité $\ln(1+x) = x + O(x^2)$ quand $x \to 0$, on obtient
$$\begin{aligned} v_n &= \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{\alpha}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \alpha\Big(\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= O\Big(\frac{1}{n^2}\Big). \end{aligned}$$
La série de terme général v_n converge alors absolument.

2. Calculons les sommes partielles

$$\begin{aligned} S_N := \sum_{n=1}^{N} v_n &= \sum_{n=1}^{N} \ln\left((n+1)^{-\alpha} u_{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{N} \ln\left(n^{\alpha} u_n\right) \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} \ln\left(n^{-\alpha} u_n\right) - \sum_{n=1}^{N} \ln\left(n^{\alpha} u_n\right) = \ln\left((N+1)^{-\alpha} u_{N+1}\right) - \ln(u_1). \end{aligned}$$

Comme la suite $(S_N)_{N\geq 1}$ converge vers un réel S, $\ln\left(N^{-\alpha} u_N\right) = S_{N-1} + \ln(u_1)$ tend vers $S + \ln(u_1)$ donc $N^{-\alpha} u_N$ tend vers $e^S u_1 > 0$, c'est-à dire $u_N \sim e^S u_1 N^{\alpha}$.

3. D'après le théorème de comparaison pour des séries de terme général positif et le théorème sur les séries de Riemann, la série $(\sum_n u_n)$ converge si et seulement si $\alpha < -1$.

Barème Le barème sur 4+7+3,5+4+4,5 = 23 tient compte de la longueur.
Question de cours : 0,5+0,5+1+2 = 4 points
Exercice 1 : 0,5+0,5+1+1,5+1+1,5+1 = 7 points
Exercice 2 : 1,5+1+1 = 3,5 points
Exercice 3 : 0,5+1+0,5+0,5+1+0,5 = 4 points
Exercice 4 : 2+1,5+1 = 4,5 points

Remarques sur les copies Eviter d'écrire des inégalités hasardeuses (fausses une fois sur deux) simplement parce que c'est pratique pour répondre à la question. Quand une inégalité ou un développement limité à montrer est donné dans l'énoncé, il faut bien expliquer comment on l'obtient au lieu de tomber miraculeusement sur la formule de l'énoncé.

Ne pas confondre 'être équivalent à', et 'être égal à'. Les équivalents ne passent pas ni au logarithme ni à l'exponentielle, seulement aux fonctions puissances (avec un exposant constant).

On rappelle que les critères de comparaison s'appliquent aux séries à termes positifs.

Question de cours, question 3. Il était possible d'appliquer à la suite des sommes partielles le critère de Cauchy pour les suites, mais il faut le faire bien.

Question de cours, question 4. Il faut supposer que les limites de $|u_{n+1}/u_n|$ ou de $|u_n|^{1/n}$ existent, car ce n'est pas toujours le cas. Lorsque ces limites valent 1 ou lorsqu'elles n'existent pas, les critères ne permettent pas de conclure. Ces critères fournissent donc des implications, mais pas des équivalences. Savoir que $|u_{n+1}/u_n| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $|u_n|^{1/n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ne suffit pas à conclure : la limite si elle existe peut très bien valoir 1.

Dans les livres, les règles de d'Alembert et de Cauchy pour les séries sont souvent énoncées pour des séries à termes positifs, auquel cas on n'a pas besoin de mettre des valeurs absolues... tant qu'on précise que les termes sont (réels) positifs.

Exercice 1, plusieurs fautes sur les calculs de puissances.

Exercice 2. L'exercice s'inspire de la preuve du théorème de comparaison série-intégrale, et invite à refaire la preuve dans un cas particulier. Ce théorème a des hypothèses (fonction continue décroissante positive sur $\mathbb{R}_+^*$). Question 1, beaucoup d'étapes sont sautées, parce que la preuve a été mal comprise. Question 2, beaucoup de réponses vagues pour passer déduire que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} dx \to +\infty$ du fait que $\int_2^{n+1} 1/(x\ln(x))dx \to +\infty$, alors qu'il suffisait d'utiliser l'une des inégalités de la question 1.

Exercice 3. Les réponses aux questions doivent être cohérentes avec l'énoncé, qui demande de montrer que la série $\sum_n (-1)^n/\sqrt{n}$ converge mais que la série $\sum_n (-1)^n/(\sqrt{n} + (-1)^n)$ diverge, bien que leurs termes généraux soient équivalents !

Exercice 4. Beaucoup de O qui deviennent des o. Quand on a $v_n = \alpha/n^2 + O(1/n^2)$, on ne peut pas en déduire que $v_n \sim \alpha/n^2$ mais seulement que $v_n = O(1/n^2)$. Comme on ne connaît pas le signe de v_n, il faut étudier la convergence absolue de la série $\sum_n v_n$.