Partiel Mat 302

23 octobre 2023

Documents et appareils électroniques interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 2h

Questions de cours Soit $(\sum_n u_n)$ une série de terme général u_n.

1. Donner la définition de la convergence de la série.
2. Donner la définition de la convergence absolue de la série.
3. On suppose que la série converge. Montrer que (u_n) tend vers 0.
4. Enoncer les règles de d'Alembert et de Cauchy.

Exercice 1 Etudier la nature de la série $(\sum_n u_n)$ pour les séries de terme général u_n suivantes. Justifier votre réponse.

1. $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2+1}$,
2. $u_n = \frac{n^2+1}{2n^3+1}$,
3. $u_n = \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$,
4. $u_n = n^{1000}e^{-\sqrt{n}}$,
5. $u_n = \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$,
6. $u_n = \frac{n!2^n}{n^n}$
7. $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Exercice 2 Dans cet exercice on considère la série $\left(\sum_k \frac{1}{k\ln k}\right)$. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln k}$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k\ln k} \leq \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln x}dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$
2. En calculant l'intégrale montrer que la série $\left(\sum_k \frac{1}{k\ln k}\right)$ diverge.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a
$$0 \leq S_n - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(2)) \leq \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

T.S.V.P.

Exercice 3

1. Démontrer que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

2. Démontrer que pour $n \to \infty$ on a :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \tag{1}$$

   Indication : on pourra écrire $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\right)$ et utiliser un développement limité de $\frac{1}{1+x}$ proche de $x = 0$.

3. Montrer que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Pourquoi est-ce qu'on ne peut pas déduire de 3. la convergence de la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$?

5. Montrer que la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right)$ diverge.

6. Pourquoi est-ce qu'on ne peut pas utiliser le critère sur les séries alternées ?

Exercice 4 Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose

$$v_n = \ln\left((n+1)^{-\alpha}u_{n+1}\right) - \ln\left(n^{-\alpha}u_n\right).$$

1. Montrer que la série de terme général v_n converge.

2. En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}^*$, pour lequel $u_n \sim_{n\to\infty} An^{\alpha}$.

3. En déduire que la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha < -1$.