CONTRÔLE CONTINU CORRECTION

Barème : exercice 1 (3 points), exercice 2 (7 points), exercice 3 (10 points).

Exercice 1. Cours.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
   Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon \cdot |v_n|$.
   Autre possibilité : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de la convergence de $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$.
   On définit la suite des sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ par :
   $$S_N := \sum_{n=0}^{N} u_n.$$
   Si la suite des sommes partielles converge quand N tend vers $+\infty$, on dit que la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

3. Énoncer le théorème de convergence sur les séries de Riemann.
   La série de Riemann $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pour celles qui sont vraies, proposer une preuve et pour celles qui sont fausses, s'appuyer sur un contre-exemple.

1. La série $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{e}{2^n}\right)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{2^n} = e$.
   L'affirmation est vraie. La série $\left(\sum_{n\geq 1} \dfrac{e}{2^n}\right)$ converge, car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} < 1$. Ses sommes partielles sont données par la formule :
   $$\begin{aligned} S_N &= (\text{premier terme}) \cdot \frac{1 - \text{raison}^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}} \\ &= \frac{e}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= e \cdot \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) \end{aligned}$$
   Ainsi, $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

2. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\left(\sum\limits_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

   L'affirmation est fausse. La série harmonique $\left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge. Pourtant, la suite de terme général $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

   L'affirmation est vraie. La condition $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ implique qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $|u_n - v_n| \leq |v_n|$. En particulier, $|u_n| \leq 2|v_n|$ et on a trouvé une constante $C=2$ et un entier N tel que pour tout $n\geq N$, $|u_n|\leq C|v_n|$. Ceci correspond précisément à la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

   Autre possibilité : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, comme la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée, c'est-à-dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.

4. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $\left(\sum\limits_{n\geq 0} v_n\right)$ diverge alors $\left(\sum\limits_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge.

   L'affirmation est fausse. On l'illustre avec un contre-exemple : soient les deux suites constantes définies par $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a bien $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ car $\frac{u_n}{v_n} = 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Cependant, la série $\left(\sum\limits_{n\geq 0} v_n\right) = \left(\sum\limits_{n\geq 0} 1\right)$ diverge grossièrement (v_n ne tend pas vers 0) alors que la série $\left(\sum\limits_{n\geq 0} u_n\right) = \left(\sum\limits_{n\geq 0} 0\right)$ converge vers 0 (sommes partielles nulles).

Exercice 3. Donner la nature des séries suivantes. Justifier votre réponse.

1. $\left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2n^2+1}{3n^2+n}\right)$

   La série diverge grossièrement car :

$$\frac{2n^2+1}{3n^2+n} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} \neq 0$$

2. $\left(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}\right)$

   On souhaite appliquer le critère de d'Alembert, on considère pour cela le rapport des termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} &= 3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 3\cdot e^{-n\cdot\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} 3\cdot e^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

   Ainsi le rapport tend vers $\frac{3}{e} > 1$ quand n tend vers $+\infty$. D'après le critère de d'Alembert, la série diverge.

3. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$

On note $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ le terme général de la série. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\cdot\left(1+o(1)\right) \end{aligned}$$

En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et comme la série harmonique $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge, alors par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ diverge également.

4. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{4^{-n}}{1+\ln(n)}\right)$

On a $0 \leq \frac{4^{-n}}{1+\ln(n)} < 4^{-n}$. Or, la série géométrique $\left(\sum_{n\geq 1} 4^{-n}\right)$ de raison $\frac{1}{4} < 1$ converge. Donc, par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ converge.

5. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{ne^{-n}}{2+\cos(n)}\right)$

Notons tout d'abord que $0 \leq \frac{1}{2+\cos(n)} \leq 1$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot ne^{-n} = 0$ par croissance comparée. Ainsi,

$$\frac{\frac{ne^{-n}}{2+\cos(n)}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2\cdot ne^{-n}}{2+\cos(n)} \leq n^2\cdot ne^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, $\frac{ne^{-n}}{2+\cos(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, la série de Riemann $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (car $\alpha = 2 > 1$). Ainsi, par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{ne^{-n}}{2+\cos(n)}\right)$ converge également.