CONTRÔLE CONTINU

Durée : 1h. Documents et appareils électroniques interdits. La présentation, la clarté des explications et la rigueur mathématique seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1. Cours.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Donner la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donner la définition de la convergence de $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$.
3. Énoncer le théorème de convergence sur les séries de Riemann.

Exercice 2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pour celles qui sont vraies, proposer une preuve et pour celles qui sont fausses, s'appuyer sur un contre-exemple.

1. La série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e}{2^n}\right)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e}{2^n} = e$.
2. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.
3. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
4. Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ diverge alors $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ diverge.

Exercice 3. Donner la nature des séries suivantes. Justifier votre réponse.

1. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+1}{3n^2+n}\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}\right)$
3. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
4. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{4^{-n}}{1+\ln(n)}\right)$
5. $\left(\sum_{n\geq 0} \frac{ne^{-n}}{2+\cos(n)}\right)$