
Examen
Durée : 2 heures

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits.

Nous rappelons qu'il faut prouver les résultats énoncés.

La qualité de la rédaction sera prise en compte : nous vous conseillons
d'indiquer les numéros des exercices et des questions, et de souligner ou encadrer les résultats.

Exercice 1 ($\sim 6=1+1+2+2$ points).

(a) Trouver la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z_1 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{1+i}.$$

(b) Mettre z_1 sous forme exponentielle.

(c) Résoudre $Z^2 = z_1$.

(d) Mettre sous forme algébrique

$$z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{57}.$$

Exercice 2 ($\sim 5=1+2+1+1$ points). Soit $M = (3, 4)$, $A = (2, 2) \in \mathbb{R}^2$ et $B = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ trois points donnés.

(a) Trouver une équation cartésienne de la droite (AB) .

(b) Trouver le projeté orthogonal P de M sur (AB) .

(c) Donner une équation paramétrique de la droite orthogonale à (AB) passant par M . (d) Calculer l'aire du triangle APM .

Exercice 3 ($\sim 6=2 + 2 + 2$ points).

(a) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{\sin(x^2)}.$$

(b) Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (3^k)^2.$$

(c) Calculer et écrire le résultat sous forme algébrique

$$\prod_{k=1}^7 2e^{ik\pi/8}.$$

Exercice 4 ($\sim 3=2+1$ points).

(a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}.$$

(b) Calculer les primitives de $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$.