Université Grenoble Alpes **Année** 2019 – 20
Licence 1ère **année - Mat102**

Examen, 1ère session

Les calculatrices, téléphones portables et documents sont interdits. Nous rappelons qu'il faut prouver les résultats énoncés. La qualité de la rédaction sera prise en compte : nous vous conseillons d'indiquer les numéros des exercices et des questions et de souligner ou encadrer les résultats.

Exercice 1

1.1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(1-i)}{i(1+i)}, \qquad z_2 = \prod_{k=0}^{7}\left(\frac{e^{ik\frac{\pi}{8}}}{\sqrt{3}+i}\right)$$

1.2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (4+3i)z + (7+i) = 0.$$

Exercice 2

2.1. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A + s\vec{u} + t\vec{v},\ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

où on a posé

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculez $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
- Soit $M \in P$. Calculer le produit scalaire $\vec{AM}.\vec{w}$ et expliquez le résultat.
- En déduire une représentation implicite de P.

2.2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Trouver les coordonnées de la projection orthogonale du point $B = (1,2,3)$ sur cette droite.

Exercice 3
On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 4|x|-3 & \text{pour } x \leq 1 \\ \dfrac{-3x}{x^2-4} & \text{pour } x > 1, \end{cases} \\ f_2(x) &= \sqrt{1+\sqrt{2+x^2}}, \end{aligned}$$

Pour ces deux fonctions,

- donnez leur ensemble de définition,

- déterminez l'ensemble des points où elles sont continues,

- déterminez l'ensemble des points où elles sont dérivables,

- déterminez leur fonction dérivée.

Exercice 4
Calculez les primitives suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2x-2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ I_2 &= \int \frac{x-4}{2+x^2}\,dx \\ I_3 &= \int \cos(x)\sin(2x)\,dx \\ I_4 &= \int x^3 \ln x\,dx \end{aligned}$$