Fiche d'exercices n°5 : primitives et intégrales

Prenez l'habitude de vérifier systématiquement vos résultats, par exemple avec `www.wolframalpha.com`.

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int (x^4-3x+1)\,dx$ b) $\int (t+1)^2\,dt$ c) $\int (x-1)^3\,dx$ d) $\int \sqrt{s+2}\,ds$

e) $\int (x+1)^{1/3}\,dx$ f) $\int \frac{dy}{\sqrt{3y+1}}$ g) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$ h) $\int \sin(2t)\,dt$

i) $\int \sin(1-x)\,dx$ j) $\int \sin(3u-2)\,du$ k) $\int \cos(5x+1)\,dx$ l) $\int e^{2s}\,ds$

Exercice 2. En utilisant le formulaire des primitives usuelles, calculer les intégrales :

$$I_1=\int_0^1 (x^3+x^2+x+1)\,dx \qquad I_2=\int_0^1 (1+t)^2\,dt \qquad I_3=\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx \qquad I_4=\int_0^{\pi/2} \cos 2u\,du$$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 t\,e^x\,dt \qquad I_2=\int_0^1 t\,e^x\,dx \qquad I_3=\int_0^1 e^{tx}\,dx \qquad I_4=\int_0^1 e^x\,dt$$

Exercice 4.

a. Soit $u(x)$ une fonction dérivable. Quelles sont les primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$?

b. En déduire les primitives de la fonction $\tan x$.

Exercice 5. Soient F et G deux fonctions données. On rappelle que $(F(G(x)))'=F'(G(x))\,G'(x)$. En utilisant ce résultat, calculer les primitives suivantes :

a) $\int y'(x)y(x)\,dx$ b) $\int u'(x)u(x)^4\,dx$ c) $\int u'(x)u(x)^n\,dx$ d) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

e) $\int \frac{y'(s)}{y(s)^2}\,ds$ f) $\int \frac{v'(x)}{\sqrt{v(x)}}\,dx$ g) $\int \frac{u'(x)}{u(x)^7}\,dx$ h) $\int \frac{v'(t)}{1+v(t)^2}\,dt$

i) $\int y'(t)e^{y(t)}\,dt$ j) $\int u'(x)\sin u(x)\,dx$ k) $\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1-y(x)^2}}\,dx$ l) $\int y'(x)(1+\tan^2 y(x))\,dx$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{dx}{1+x^2}$ b) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$ c) $\int \frac{dx}{3+27x^2}$ d) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

e) $\int \cos x\,e^{\sin x}\,dx$ f) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$ g) $\int \frac{dx}{2x+3}\,dx$ h) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

i) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ j) $\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+2}\,dx$ k) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ l) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\,dx$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

$$I_1=\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos x\,dx \qquad I_2=\int_0^1 e^u\cos(e^u)du \qquad I_3=\int_0^{\pi/4} \tan^3 x\,dx$$

$$I_4=\int_1^2 (3t-1)^{-2/3}\,dt \qquad I_5=\int_1^2 \frac{u+1}{\sqrt{u^2+2u}}du \qquad I_6=\int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \qquad I_7=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

Exercice 8. Calculer les primitives ci-dessous. Dans chaque cas, on cherchera un changement de variable transformant le polynôme du second degré en un polynôme du type $1+X^2$ ou $1-X^2$ ou X^2-1 :

$$a)\ \int \frac{dt}{t^2+4} \qquad b)\ \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-4}} \qquad c)\ \int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}} \qquad d)\ \int \frac{dt}{t^2+2t+5}$$

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties :

a) $\int xe^x\,dx$ b) $\int t\sin t\,dt$ c) $\int \ln x\,dx$ d) $\int \ln(2s+3)\,ds$

e) $\int x\,\cos x\,dx$ f) $\int \ln(1+u^2)\,du$ g) $\int \arctan x\,dx$ h) $\int \ln^2 s\,ds$

i) $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ j) $\int u\ln u\,du$ k) $\int e^x \sin x\,dx$

Exercice 10.

a. Trouver a et b tels que $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$. En déduire les primitives de $\dfrac{1}{x(x-1)}$.

b. De façon plus générale, soit $P(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré admettant deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{\alpha}{x-r_1} + \dfrac{\beta}{x-r_2}$

Exercice 11. De façon similaire à l'exercice précédent, calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$ b) $\int \frac{dt}{(t+2)(t+3)}$ c) $\int \frac{ds}{s^2-1}$ d) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$

e) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$ f) $\int \frac{dy}{y^2+4y+4}$ g) $\int \frac{du}{u^2-2u+1}$ h) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+9}\,dx$

Exercice 12. Identifier a priori la (ou les) méthode(s) qui semble(nt) adéquate(s) pour calculer chacune des primitives suivantes, puis les calculer effectivement :

a) $\int \frac{du}{u^2+5}$ b) $\int \frac{\ln t}{t}\,dt$ c) $\int x\ln x\,dx$ d) $\int \tan^3 s\,ds$

e) $\int e^x\cos x\,dx$ f) $\int \frac{3y}{\sqrt{y^2-5}}\,dy$ g) $\int \frac{\cosh x}{\sinh^5 x}\,dx$ h) $\int (u^2+u+1)\,e^u\,du$

i) $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^3}\,dx$ j) $\int ye^{y^2}\,dy$ k) $\int t\arctan t\,dt$ l) $\int e^u\sin(e^u)\,du$

m) $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ n) $\int \frac{ds}{s^2-4}$ o) $\int \frac{ds}{s^2+2s+5}$ p) $\int \frac{\ln(x)}{x^n}dx \quad (n\in\mathbb{N})$

Exercice 13. On note $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $J = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$. On va dans cet exercice calculer ces intégrales de plusieurs façons différentes.

1. *Méthode 1*

1.a. Simplifier l'expression de $I+J$ et calculer cette valeur.

1.b. Par intégration par parties dans I, donner une relation entre I et J.

1.c. En déduire les valeurs de I et J.

2. *Méthode 2*

2.a. Faire le changement de variable $t = x + \frac{\pi}{2}$ dans I. En déduire une relation entre I et J.
2.b. En utilisant la relation trouvée à la question 1.a., en déduire les valeurs de I et J.

3. *Méthode 3*
3.a. Rappeler les différentes expressions de $\cos 2x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3.b. En utilisant ces expressions, calculer directement les valeurs de I et J.

Exercice 14.
a. Exprimer $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$, et exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.
b. En déduire les valeurs des intégrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$

Pour vous entrainer...

Exercice 15. Calculer les primitives suivantes :

$$a)\ \int e^{2x}dx \qquad b)\ \int e^{-7x}dx \qquad c)\ \int \cos 3x\,dx \qquad d)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \qquad e)\ \int \sqrt{2x+1}\,dx$$

Exercice 16. Calculer les primitives suivantes :

$$a)\ \int xe^{x^2}dx \qquad b)\ \int x^2e^{x^3+1}dx \qquad c)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad d)\ \int \sqrt{e^x}\,dx \qquad e)\ \int \frac{dx}{x(\ln x+1)}$$

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int \frac{2x+5}{(x^2+5x+9)^m}dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{(\ln|u|)^3}{u}\,du \qquad \text{c)}\ \int \frac{\sinh(x)}{\cosh^4(x)}\,dx \qquad \text{d)}\ \int x^4(x^5+3)^{1/3}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int (\tan^4 x + \tan^2 x)\,dx \qquad \text{f)}\ \int x(x^2+1)^3\,dx \qquad \text{g)}\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad \text{h)}\ \int \frac{dx}{x(\ln x)^2}\,dx$$

Exercice 18. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t\,e^{t^2}\,dt \qquad I_2 = \int_0^1 t^2\,e^t dt \qquad I_3 = \int_0^1 t\,e^t dt \qquad I_4 = \int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{dx}{x\,\ln x}\,dx$$

Exercice 19. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\,dx \qquad \text{c)}\ \int \sin x \cos x\,dx \qquad \text{d)}\ \int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx \qquad \text{f)}\ \int f'(s)\cos f(s)\,ds \qquad \text{g)}\ \int \frac{y'(t)}{\cos^2 y(t)}\,dt$$

Exercice 20. Trouver a, b et c tels que $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$. En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$

Exercice 21. Calculer les primitives suivantes :

$$\text{a)}\ \int x^2 \arctan x\,dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{\ln x}{x}\cos(1+\ln^2 x)\,dx \qquad \text{c)}\ \int \cos^3 x\,dx \qquad \text{d)}\ \int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

$$\text{e)}\ \int x\cos(3x)\,dx \qquad \text{f)}\ \int \ln(x^2+1)\,dx \qquad \text{g)}\ \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \qquad \text{h)}\ \int (x+1)\sin(2x)\,dx$$

Pour aller plus loin...

Exercice 22. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-2e^x}{e^x+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+2x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2-x}{x^2-2x+2}\,dx$

Exercice 23. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt\,.$
Établir une relation entre I_n et I_{n+1}, et en déduire la valeur de I_n.

Exercice 24. *Intégrales de Wallis*
On pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$

a. Par le changement de variable $t = \pi/2 - x$, montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx.$

b. Calculer W_0, W_1 et W_2.

c. Pour $n \geq 2$, remarquer que $W_n = W_{n-2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,\cos^2 x\,dx$. Par intégrations par parties, en déduire que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

d. En déduire l'expression de W_n (on différenciera les cas n pair et impair).

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un nombre réel. On pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n\,e^t\,dt.$

a. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation liant $I_n(x)$ à $I_{n+1}(x)$.

b. Calculer $I_0(x)$, $I_1(x)$ et $I_2(x)$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 (t^2-3t+1)\,e^t\,dt$

Exercice 26. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et continûment dérivable.
On considère les deux intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 f(t)dt \ \text{ et } I_2 = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(s)ds.$$

a. Rappeler pourquoi f admet une fonction réciproque .
b. Faire le changement de variable $s = f(u)$ dans l'intégrale I_2.
c. Calculer I_2 en fonction de I_1.
d. Faire un dessin faisant apparaître f et f^{-1}, et interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 27.

a. Rappeler les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\sin\frac{x}{2}$ et $\cos\frac{x}{2}$. En divisant ces expressions par $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}$, déduire l'expression de $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$.

b. Grâce au changement de variable $t = \tan x/2$, calculer les primitives : $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$.

Exercice 28. Faire la division euclidienne de x^3 par x^2+4, c'est-à-dire trouver les polynômes $P(x)$ et $R(x)$ tels que $x^3 = P(x)\,(x^2+4) + R(x)$, avec $R(x)$ de degré inférieur ou égal à 1. En déduire les primitives de $\dfrac{x^3}{x^2+4}$.

Exercice 29. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{e^x-1}$.

Exercice 30. Essayer de calculer les primitives de $\dfrac{1}{\ln x}$.