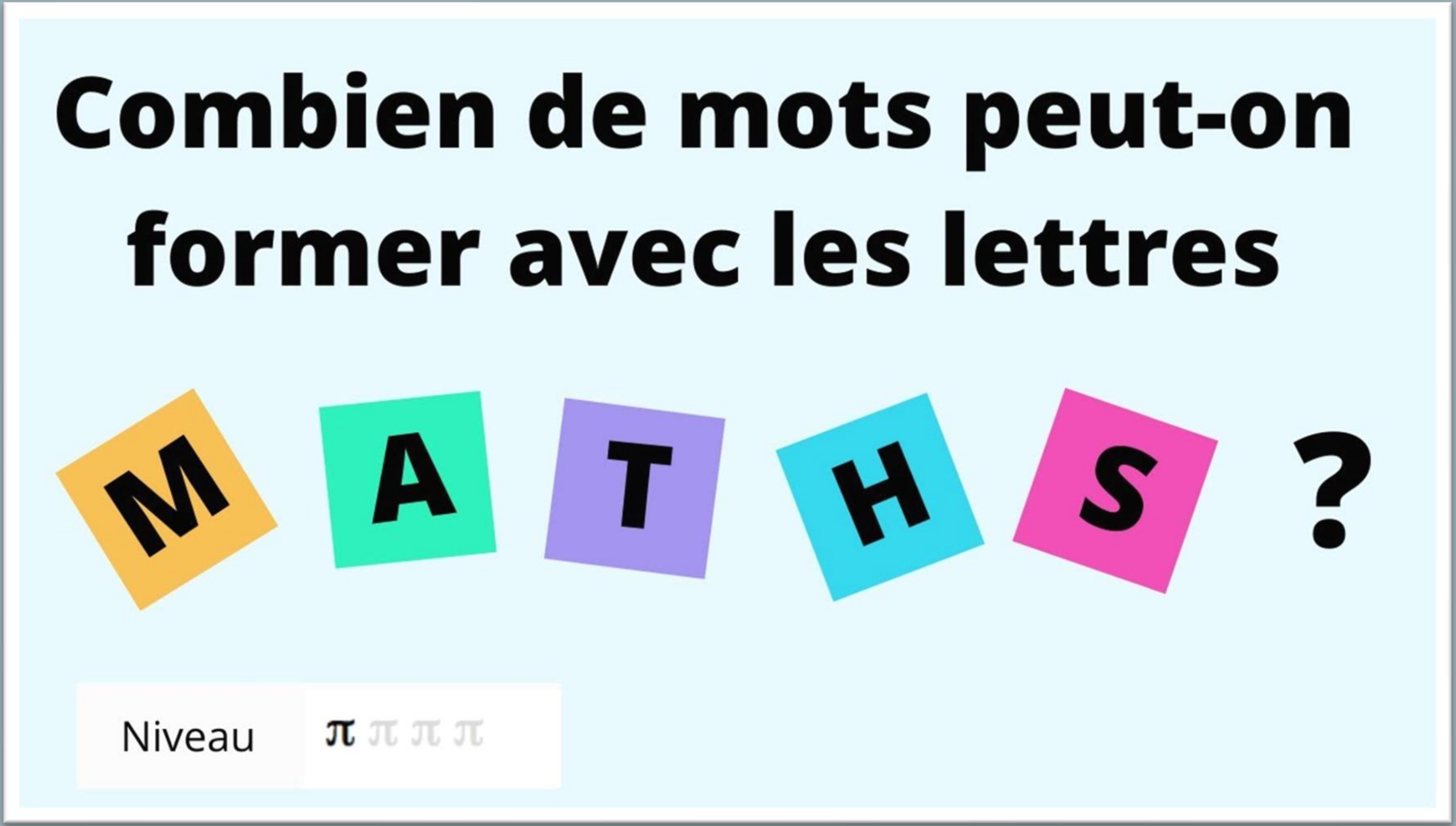
CTD6 – calcul littéral

Inspiré en partie d'un cours donné par S. Térouanne



Retour sur le DM2

Exercice.
Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$. Démontrer que les points I, E, F et K sont coplanaires.

8 résolutions mathématiques différentes !

Retour sur le DM2

Résolution 1. Calculer les coordonnées I, E, F et K dans la base affine $\left(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$ puis montrer que $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IE}$.
Idir, Clara, Baptiste, Corentin, Quentin.

Résolution 2. Idem, mais résolution d'un système linéaire pour trouver la relation liant $\overrightarrow{IF}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IE}$.
Coralie.

Résolution 3. Utilisation du déterminant 3×3.
Aurélien.

Retour sur le DM2

Résolution 4. $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IE}$ colinéaires, $\overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{KF}$ colinéaires. D appartient donc à (KF) et (IE).
Loïc.

Résolution 5. $\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{EF}$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de deux vecteurs de $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)$.
Liz.

Résolution 6. $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires en utilisant le théorème des milieux.
Antoine, Clara, Marie, Liz, Hugo, Romain, Romane, Maxime, Lucie.

Retour sur le DM2

Résolution 7. $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KF}$.

Lucie.

Résolution 8. Se placer dans $\left(E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EI}\right)$ et montrer que $K \in (EIF)$.

Vincent.

Production 1 : géométrie repérée

Élève 1

Il est clair que $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ *est un repère de l'espace. Dans ce repère, on a :* $I(0\,;\,0\,;\,1/2)$, $K(1/2\,;\,0\,;\,0)$, $F(1/3\,;\,1/3\,;\,0)$ *et* $E(0\,;\,1/3\,;\,1/3)$. *J'en déduis :* $\overrightarrow{IE}(0\,;\,1/3\,;\,-1/6)$ *et* $\overrightarrow{FK}(1/6\,;\,-1/3\,;\,0)$.

Je calcule $xy' - yx'$: $0 \times \frac{-1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}$.

$xy' - yx'$ *n'est pas nul, donc* (IE) *et* (FK) *ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes et donc coplanaires.*

I, E, F *et* K *sont bien coplanaires.*

Production 1 : géométrie repérée

Outils. Base affine de l'espace, coordonnées de points, de vecteurs, déterminant, parallélisme.

Erreurs.

- Le tétraèdre n'est pas aplati,
- calcul des coordonnées de $F, E, \overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{FK}$ juste mais pas explicité,
- dans $\mathbb{R}^3$, l'implication « $xy' - yx' \neq 0 \Longrightarrow$ droites non parallèles » est vraie (le prouver !) mais il est légitime de se demander si ce n'est pas plutôt une confusion avec la caractérisation de la colinéarité dans $\mathbb{R}^2$ utilisant le déterminant,
- dans $\mathbb{R}^3$, il existe des droites non parallèles et non sécantes (cube).

Production 2 : géométrie naturelle

Élève 2

J'ai tracé une figure. Sur la figure, j'ai tracé (IE) *et* (FK)*. Elles sont sécantes.*

Production 2 : géométrie naturelle

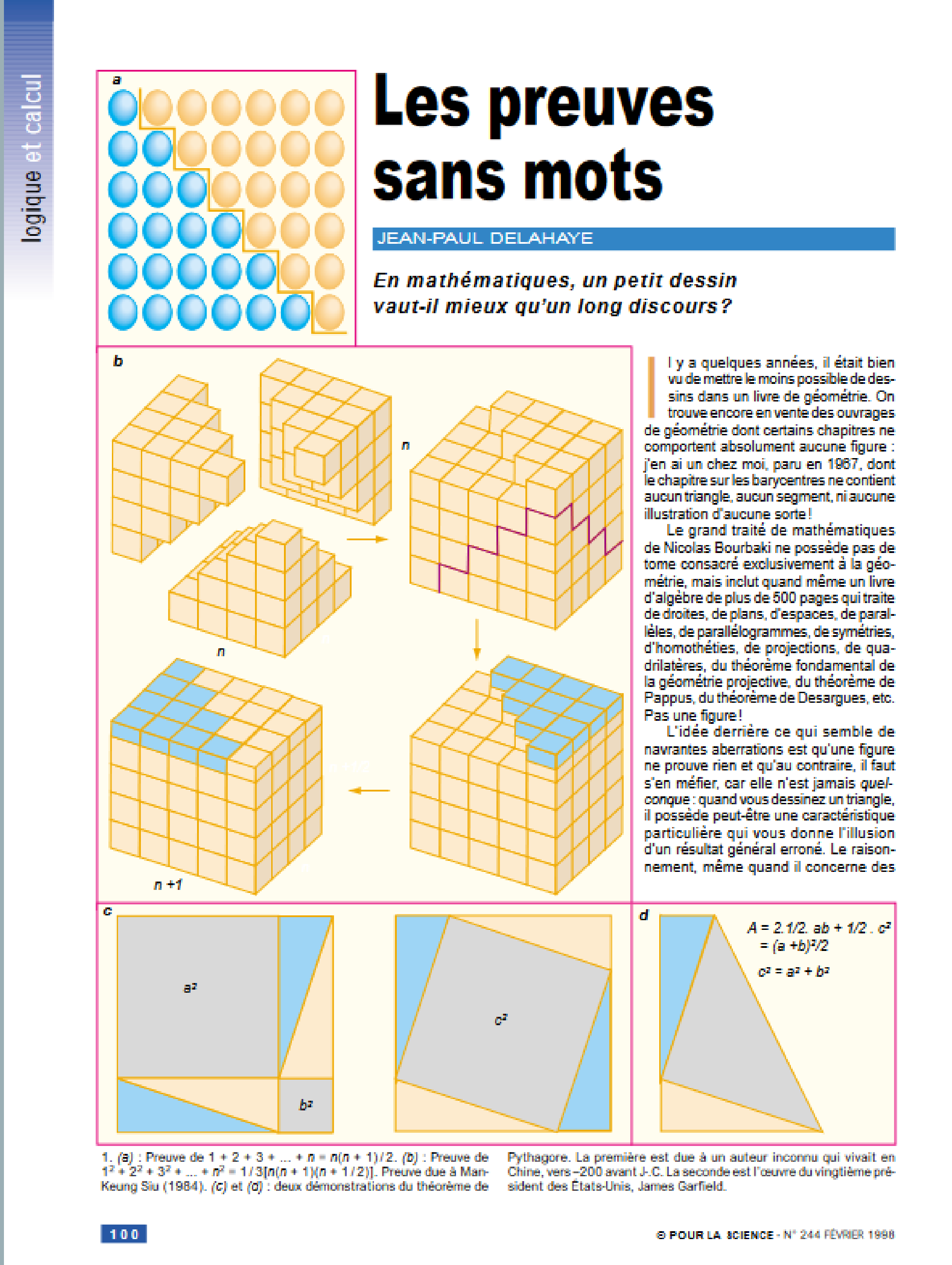
Outils. Dessin ou figure.

Erreurs.

- Le lien « droites (EI) et (FK) sécantes $\Longrightarrow E, I, F, K$ coplanaires » non explicité,
- la lecture peut être fausse (est-ce vraiment sécant ?),
- ici, cela ne constitue pas une preuve, mais on peut orienter l'élève vers une résolution visant à montrer que les droites (EI) et (FK) sont sécantes.

Des preuves sans mot

Delahaye, J.-P. (1998). Les preuves sans mots. *Pour la science*, (244), 100-105.



logique et calcul

Les preuves sans mots

JEAN-PAUL DELAHAYE

En mathématiques, un petit dessin vaut-il mieux qu'un long discours?

Il y a quelques années, il était bien vu de mettre le moins possible de dessins dans un livre de géométrie. On trouve encore en vente des ouvrages de géométrie dont certains chapitres ne comportent absolument aucune figure : j'en ai un chez moi, paru en 1967, dont le chapitre sur les barycentres ne contient aucun triangle, aucun segment, ni aucune illustration d'aucune sorte !

Le grand traité de mathématiques de Nicolas Bourbaki ne possède pas de tome consacré exclusivement à la géométrie, mais inclut quand même un livre d'algèbre de plus de 500 pages qui traite de droites, de plans, d'espaces, de parallèles, de parallélogrammes, de symétries, d'homothéties, de projections, de quadrilatères, du théorème fondamental de la géométrie projective, du théorème de Pappus, du théorème de Desargues, etc. Pas une figure !

L'idée derrière ce qui semble de navrantes aberrations est qu'une figure ne prouve rien et qu'au contraire, il faut s'en méfier, car elle n'est jamais *quelconque* : quand vous dessinez un triangle, il possède peut-être une caractéristique particulière qui vous donne l'illusion d'un résultat général erroné. Le raisonnement, même quand il concerne des

1. *(a)* : Preuve de $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$. *(b)* : Preuve de $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/3[n(n + 1)(n + 1/2)]$. Preuve due à Man-Keung Siu (1984). *(c)* et *(d)* : deux démonstrations du théorème de Pythagore. La première est due à un auteur inconnu qui vivait en Chine, vers –200 avant J.-C. La seconde est l'œuvre du vingtième président des États-Unis, James Garfield.

Production 3 : géométrie vectorielle

Élève 3

$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, *d'après le théorème des milieux.*

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$

Je vois sur la figure que $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, *mais je n'arrive pas à le montrer.*

Production 3 : géométrie vectorielle

Outils. Théorème des milieux, relation de Chasles, figure (ou dessin ?), .

Erreurs.

- Manque de détails dans l'application du théorème des milieux,
- même si l'égalité $\overrightarrow{FE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ n'est pas prouvée, l'élève aurait pu finir l'argumentation.

Conseils pour l'analyse de productions

- Rester sur l'idée de l'élève tant que peut se faire,
- ne pas discriminer trop vite un dessin ou une figure,
- pas de « paradigme 1 »,
- considérer toutes les éventualités,
- bien avoir conscience du niveau des élèves.

Ces productions d'élèves montrent l'intérêt d'anticiper les résolutions possibles pour pouvoir les aider correctement. Ceci fait partie de l'**analyse *a priori***.

Calcul littéral au cycle 4

Utiliser le calcul littéral

Connaissances

- Notions d'inconnue, d'équation, d'indéterminée, d'identité.
- Propriétés de distributivité (simple et double).
- Annulation d'un produit (démonstration possible par disjonction de cas).
- Factorisation de $a^2 - b^2$.

Compétences associées

- Développer, factoriser, réduire des expressions algébriques dans des cas très simples.
- Utiliser le calcul littéral pour traduire une propriété générale (par exemple la distributivité simple), pour démontrer un résultat général (par exemple que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois), pour valider ou réfuter une conjecture, pour modéliser une situation.
- Mettre un problème en équation en vue de sa résolution.
- Résoudre algébriquement des équations du premier degré ou s'y ramenant (équations produits), en particulier des équations du type $x^2 = a$.

Il est attendu de démontrer au moins une propriété du calcul fractionnaire en utilisant le calcul littéral et la définition du quotient.

À l'issue d'activités rituelles de calcul et de verbalisation de procédures et la résolution de problèmes, menées tout au long du cycle, d'abord dans le cadre numérique, puis dans le cadre algébrique, les élèves doivent avoir mémorisé ou automatisé :

- les règles de calcul sur les nombres relatifs et les fractions, notamment la condition d'égalité de deux fractions (si $ad = bc$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et réciproquement) ;
- les conventions d'écritures du calcul littéral ;
- les formules de distributivité simple et double ;
- l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- les procédures de résolution d'équations du type $ax = b$ et $a + x = b$.

Des erreurs d'élèves

$$(0{,}5)^{n+1} - 0{,}5^n = 0{,}5$$

$$3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-3}$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x + 1$$

Dans le cursus scolaire, il y a une quinzaine de règles du calcul algébrique que l'on retrouve dans les mémentos de manuels. Elles constituent l'une des parties essentielles des savoirs institutionnels enseignés en algèbre, du collège au lycée.

Comprendre & appliquer les règles du calcul algébrique

L'écriture $a^2 + b^2$ est ostensivement plus proche de $(a+b)^2$ que $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui fait concurrence à la règle mathématique adéquate…

Nécessité de revenir au sens pour comprendre.

Mais doit-on systématiquement repasser par $(a+b)(a+b)$ pour calculer $(a+b)^2$?

Nécessité d'oublier le « sens » au profit d'une règle formelle.

Comprendre & appliquer les règles du calcul algébrique

Dialectique outils-objet

Il y a donc un réglage à trouver, à insérer dans le temps d'apprentissage, entre contrôle par le sens pour éviter un usage malheureux d'une règle inadéquate, et oubli du sens pour une pratique usuelle du calcul algébrique.

Quel sens donner à ces expressions ?

10 minutes, en groupe

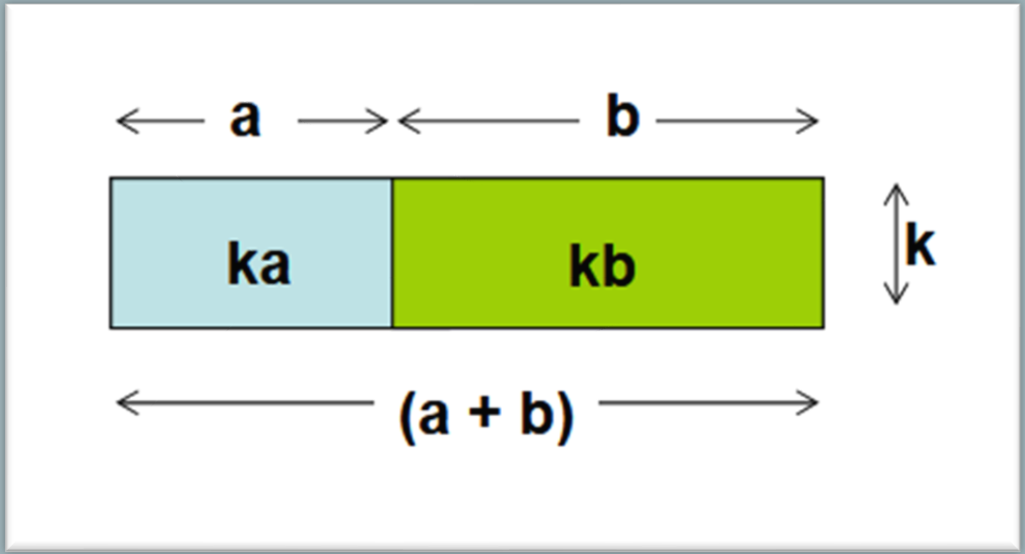
$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Quel sens donner à ces expressions ?

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

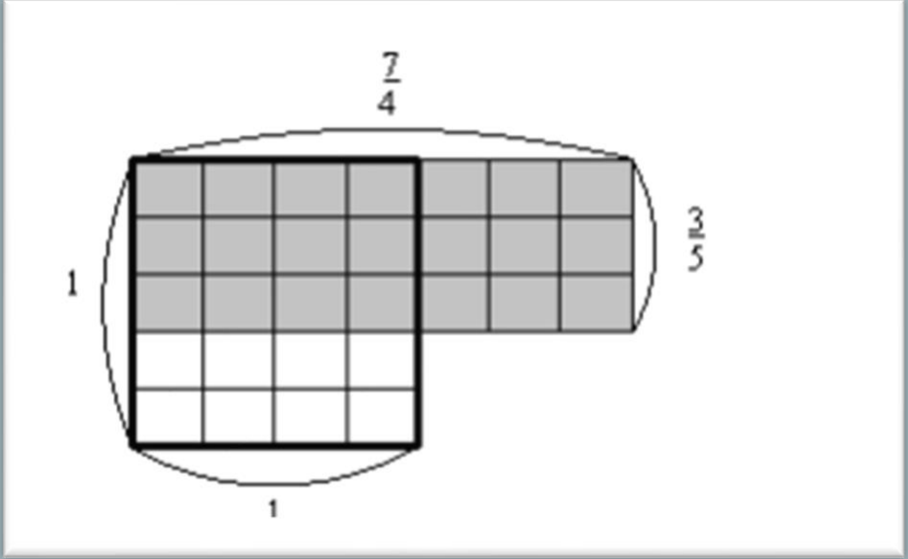
Utilisation des aires



Quel sens donner à ces expressions ?

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Utilisation des aires sur un exemple générique en prenant pour unité de longueur la longueur du côté du carré et pour unité d'aire, l'aire de ce carré



Éduscol, le calcul numérique au collège, 2016

Quel sens donner à ces expressions ?

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Par le calcul :

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times b \times d = \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d = a \times c$$

La mise en place en classe de 5e des règles de calcul d'un produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ne saurait se limiter à la preuve sur des aires. La preuve ci-dessus qui s'appuie sur la notion de quotient est accessible à des élèves de ce niveau, soit en recourant au calcul littéral, soit à un exemple générique, selon la classe.

Éduscol, le calcul numérique au collège, 2016

Quel statut de la lettre dans ces expressions ?

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $x(2 + x^2) = 2x + x^3$

Dans ces expressions les lettres en présence sont des **indéterminées**.

Quels autres statuts de la lettre possibles ?

Dès le cycle 3 :

- symboliser une unité (m, cm, g, …),
- désigner un objet mathématique (π, un point A),
- désigner une grandeur (l, L, $\mathcal{A}$, …).

Au cycle 4 :

- variable (dans une formule, une fonction, un programme de calcul),
- indéterminée (dans les identités, valeur d'universalité à expliciter),
- inconnue (ici, l'égalité n'est pas toujours vraie : on cherche la valeur de l'inconnue pour que l'identité soit vraie),
- paramètre, par exemple coefficient directeur d'une fonction linéaire.

Éduscol, utiliser le calcul littéral au cycle 4, 2016

Analyser et présenter des activités

En groupe, 30 minutes de préparation + 5 minutes de présentation

Consigne. Lire les 5 activités suivantes puis analyser l’activité qui vous a été attribuée en identifiant :

- les objectifs d’apprentissage,
- le niveau scolaire et place dans la progression,
- les stratégies attendues,
- les variables didactiques.

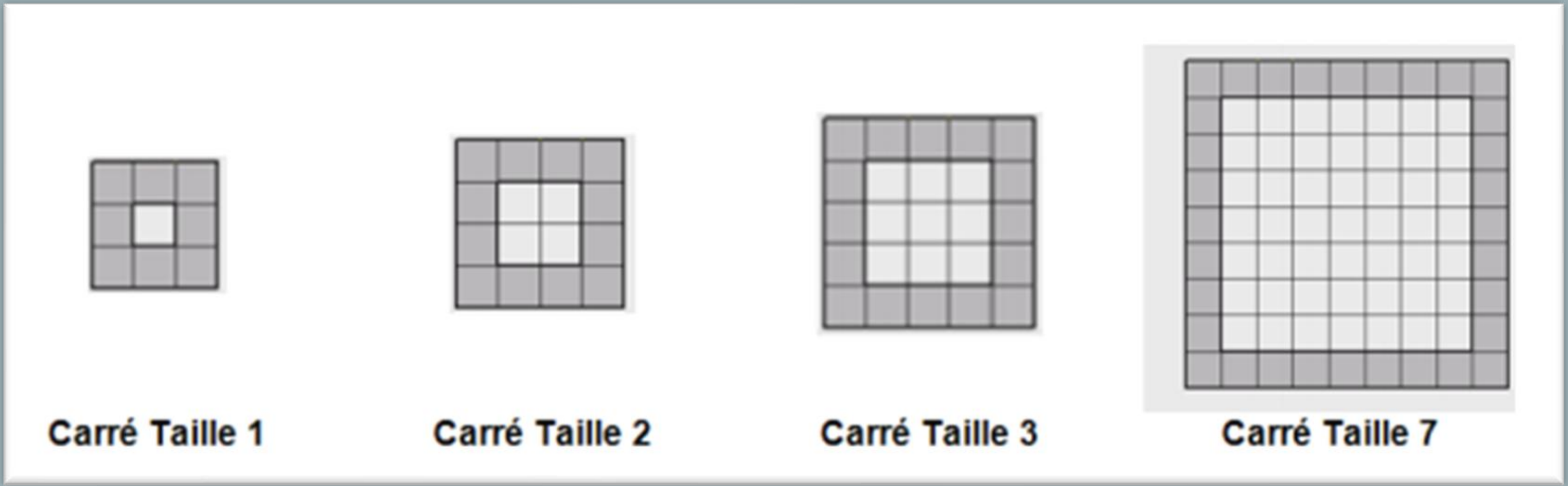
Préparer un tableau qui servira de support de présentation.

Utiliser le calcul littéral au cycle 4 – Éduscol

Les carrés bordés

Éduscol

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque. Il dispose ses carreaux gris autour de différents carrés formés de carreaux blancs. En voici quatre.



Les carrés bordés

1. Combien y a-t-il de carreaux gris entourant le carré blanc de taille 1 ? Celui de taille 2 ? Celui de taille 3 ?
2. Produire un calcul qui donne le nombre de carreaux gris entourant un carré blanc de taille 7, puis de taille 56.
3. Expliquer par une phrase ou par un programme de calcul comment on peut calculer le nombre de carreaux entourant un carré de n'importe quelle taille.
4. Si on double le côté du carré blanc, double-t-on le nombre de carrés gris de la bordure ? Toujours ? Jamais ? Dans certains cas ? Si oui, lesquels ?
5. Peut-on obtenir des bordures de 100, 150, 200, 250 carreaux ?
6. Étant donné un nombre de carreaux gris, peut-on savoir s'il correspond au nombre exact de carreaux d'une bordure ?

Les carrés bordés

Pistes pédagogiques

Les questions 1) et 2) peuvent être proposées dès la classe de 5e, la question 2) étant un travail numérique permettant l'anticipation de l'introduction d'une lettre.
La suite de l'activité peut être soumise aux élèves à partir de la classe de 4e.
Dès le carré blanc de taille 7, les élèves vont être conduits à remplacer le simple comptage par des stratégies de dénombrement qui donneront lieu aux généralisations.
La question 3) vise à produire des formules (aspect fonctionnel du calcul formel par opposition avec la mise en équation) correspondant à différentes stratégies de dénombrement. La variété des formules produites au sein de la classe crée le besoin de s'assurer de leur validité en transformant leurs écritures à partir de la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Rectangles cousins

Sésamaths (Magnard)

Dans cette activité, on s'intéresse uniquement aux rectangles dont le périmètre est 40 cm.

1. Un rectangle a pour longueur $L = 16{,}5$ cm. Calcule sa largeur l puis son aire.
2. Donne les mesures d'un autre rectangle de même périmètre
3. La longueur peut-elle valoir 8 cm ? Et 21 cm ?
4. Écris une expression pour calculer la largeur l en fonction de la longueur L.
5. En voulant exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de sa longueur L, des élèves ont donné les réponses suivantes :

Gaël : $\mathcal{A} = L \times 20 - L$
Hamid : $\mathcal{A} = L \times (20 - L)$
Karen : $\mathcal{A} = 20L - L^2$
Inès : $\mathcal{A} = 2 \times L + 2 \times (20 - L)$
José : $\mathcal{A} = L \times 20 - 2 \times L$
Liam : $\mathcal{A} = L^2 - 20 \times L$

Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Y-a-t-il plusieurs bonnes réponses ?

Rectangles cousins

Sésamaths (Magnard)

Dans cette activité, on s'intéresse uniquement aux rectangles dont le périmètre est 40 cm.

1. Un rectangle a pour longueur $L = 16{,}5$ cm. Calcule sa largeur l puis son aire.
2. Donne les mesures d'un autre rectangle de même périmètre
3. La longueur peut-elle valoir 8 cm ? Et 21 cm ?
4. Écris une expression pour calculer la largeur l en fonction de la longueur L.
5. En voulant exprimer l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle en fonction de sa longueur L, des élèves ont donné les réponses suivantes :

Gaël : $\mathcal{A} = L \times 20 - L$ **Hamid :** $\mathcal{A} = L \times (20 - L)$ **Karen :** $\mathcal{A} = 20L - L^2$

Inès : $\mathcal{A} = 2 \times L + 2 \times (20 - L)$ **José :** $\mathcal{A} = L \times 20 - 2 \times L$ **Liam :** $\mathcal{A} = L^2 - 20 \times L$

Parmi ces expressions, lesquelles sont fausses ? Y-a-t-il plusieurs bonnes réponses ?

Le calendrier

[Éduscol]

On peut grouper les cases de chaque mois de ce calendrier en carrés de différentes tailles.

En dessiner quelques-uns de taille donnée (on pourra commencer par des carrés de 3 jours sur 3 jours). Pour chacun d’eux, calculer la différence entre les produits des deux nombres situés aux extrémités des diagonales.

Que constate-t-on ? Démontrer le résultat observé.

janvier 1

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

février 2

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28

mars 3

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

avril 4

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

mai 5

L	M	M	J	V	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

juin 6

L	M	M	J	V	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

juillet 7

L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

août 8

L	M	M	J	V	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

septembre 9

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30			

octobre 10

L	M	M	J	V	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

novembre 11

L	M	M	J	V	S	D
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					

décembre 12

L	M	M	J	V	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Le calendrier

Pistes pédagogiques

Les élèves font plusieurs essais, sur des carrés d'une même taille pouvant être pris dans des mois différents ; les deux valeurs possibles (selon l'ordre dans lequel on effectue le calcul) émergent facilement. La démonstration passe par la modélisation et la réduction de l'expression algébrique correspondant à la différence entre les produits des nombres situés aux extrémités des diagonales. La simplification de l'expression obtenue requiert une double attention : d'une part, le développement du produit des deux sommes suppose deux utilisations successives de la distributivité simple, d'autre part, les produits sont séparés par un signe « moins ». Cette difficulté peut nécessiter de revenir à ce que signifie « soustraire une somme ».

Le nombre d'Alice et Bertrand

Éduscol

Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent le même nombre sur leur calculatrice. Alice multiplie le nombre affiché par 2,1 puis retranche 0,4 au résultat obtenu. Bertrand, lui, multiplie le nombre affiché par 1,3 puis ajoute 0,1 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent exactement le même résultat.

Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Le nombre d'Alice et Bertrand

Pistes pédagogiques

Inspirée d'une activité extraite de l'ouvrage « Les débuts de l'algèbre au collège », INRP 1996, cette situation, centrée sur la mise en équation d'un problème du premier degré, a deux objectifs :

- modéliser un problème à l'aide d'une équation du type $ax + b = ax + d$. Il s'agit de repérer la grandeur (le nombre d'Alice et Bertrand) qui va être remplacée par une lettre et donner lieu à l'égalité de deux expressions.
- développer et réduire une expression littérale contenant des nombres décimaux.

Cette situation permet une différenciation pédagogique par la modification possible des variables didactiques (les coefficients a, b, c, d de l'équation à résoudre) selon l'objectif fixé et les aptitudes des élèves.

Le magicien

Éduscol

- Le magicien : *Pensez à un nombre, multipliez-le par 2, enlever 3, multipliez le résultat par 3 et enlevez le nombre de départ. Quel est le nombre que vous obtenez ?*
- Un spectateur : *31.*
- Le magicien : *Le nombre pensé au départ est ...*
- Un spectateur : *C'est exact.*

Quelle était la réponse du magicien ?

Le magicien

Pistes pédagogiques

Il s'agit, par cette activité, de permettre aux élèves de dépasser le travail sur le calcul numérique et de saisir l'intérêt du calcul littéral comme représentation de calculs numériques équivalents. L'usage du tableur permet dans un premier temps de passer d'une suite d'instructions à une expression numérique puis littérale.

La forme réduite de l'expression pourra être obtenue dans un premier temps en observant la régularité des résultats produits.
Le développement et la réduction de l'expression reposent essentiellement sur la distributivité.

La résolution de l'équation ne pose pas de difficulté particulière.

Rappel : partiel le 18/04

- Aucun document,
- 14h – 17h (+ 1h pour les 1/3 temps),
- arriver en avance,
- revoir les activités faites en cours et les concepts didactiques,
- la salle sera communiquée ultérieurement,
- copies et brouillons fournis.

Concepts didactiques vus en cours

- Connaissances naïves/conceptions,
- cadre,
- savoir & savoir-faire,
- dialectique outil/objet,
- variable didactique,
- analyse *a priori*.