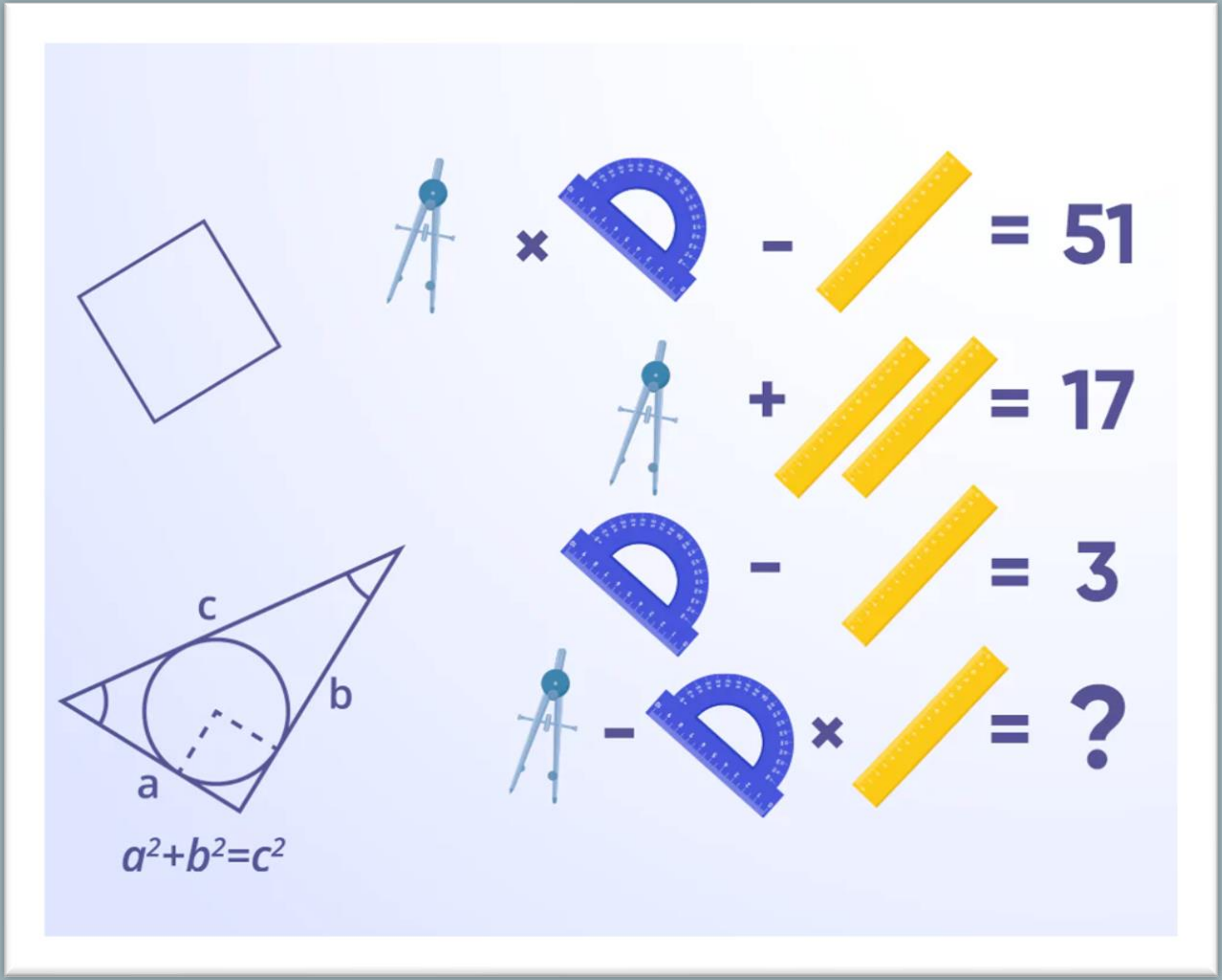
CTD5 – de la géométrie à l'algèbre

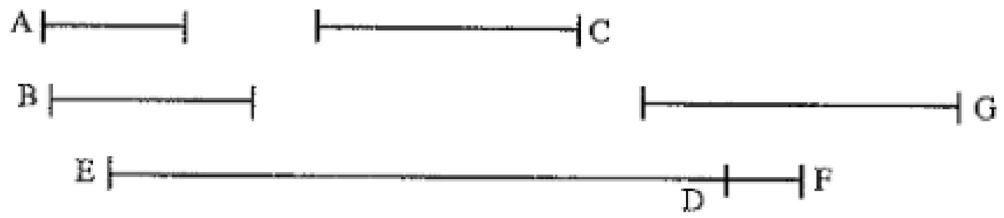
Inspiré en partie d'un cours donné par J. Trgalová



Constitution de l'écriture symbolique

Résolutions rhétoriques chez Euclide (environ -300) : texte entièrement rédigé en langue naturelle sans aucune écriture symbolique.

Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.



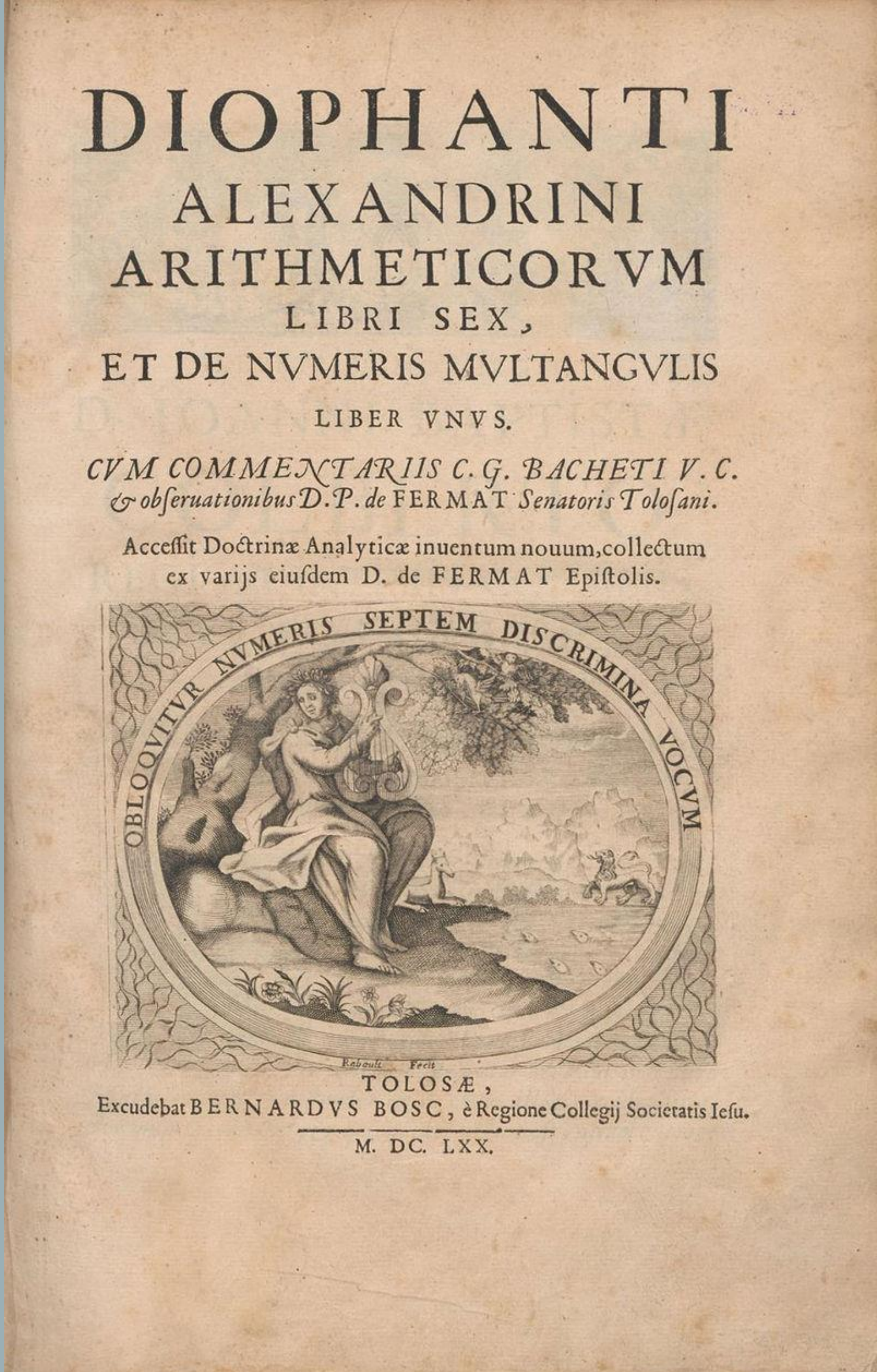
Soient les nombres premiers proposés A, B, C. Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que A, B, C.

En effet, que soit pris le plus petit [nombre] mesuré par A, B, C[35], et que ce soit DE et que l'unité DF soit ajoutée à DE. Alors ou bien EF est premier ou bien non. D'abord qu'il soit premier ; donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, EF, plus nombreux que A, B, C.

Mais alors que EF ne soit pas premier ; il est donc mesuré par un certain nombre premier (VII. 32). Qu'il soit mesuré par le [nombre] premier G. Je dis que G n'est pas le même que l'un quelconque des A, B, C. En effet, si c'est possible, qu'il le soit. Or A, B, C mesurent DE ; donc G mesurera aussi DE. Mais il mesure aussi EF ; il mesurera aussi l'unité DF restante tout en étant un nombre ; ce qui est absurde. G n'est donc pas le même que l'un des A, B, C. Et il est supposé premier. Donc sont trouvés les nombres premiers A, B, C, G, plus nombreux que la multitude proposée des A, B, C. Ce qu'il fallait démontrer.

Constitution de l'écriture symbolique

Des codifications de l'inconnue apparaissent chez Diophante (environ 300) : ζ est la plus fréquente. Il recherche un nombre entier « contenant une multitude indéterminée ou indéfinie d'unités ».


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Constitution de l'écriture symbolique

L'écriture symbolique s'est constituée dans une période assez courte sous l'impulsion de Viète avec son *Isagoge* en 1591. Viète introduit une écriture (un système même) symbolique pour l'indéterminé, représenté par une lettre : les inconnues sont dénotées par des voyelles majuscules dans le calcul, les données par des consonnes.

Constitution de l’écriture symbolique

« Toute chose nouvelle se présente ordinairement à son origine rude et informe, pour être polie et perfectionnée dans les siècles suivants. L'art que je produis aujourd'hui est un art nouveau, ou du moins tellement dégradé par le temps, tellement sali et souillé par les barbares, que j'ai cru nécessaire de lui donner une forme entièrement neuve, et après l'avoir débarrassé de toutes ses propositions erronées, afin qu'elle ne retînt aucune souillure, et qu'elle ne sentît la vétusté, imaginer et produire des mots nouveaux auxquels les oreilles étant jusqu'à présent peu habituées, il sera difficile que plusieurs personnes n'en soient pas dès le seuil même épouvantées et offensées. »

Constitution de l'écriture symbolique

Rudolff introduit la notation cossique :

> Si la chose était connue et telle que 2 2e: + 6 soient égalés à 11, alors la chose vérifierait pareillement l'égalité obtenue par division par 2 : 1 2e: + 3 égalés à 5, 5 c'est-à-dire que 1 2e: + 3 serait connu et ensuite égalé à 5,5(...).

Descartes introduit la position haute dans la ligne pour désigner le carré ou le cube de indéterminé. Les signes d'opérations apparaissent tardivement (15ème siècle pour le signe +, 16ème pour le signe =).

Difficultés liées à l’entrée dans la pensée algébrique

À titre d’exemple :

- la lettre ne désigne plus un objet mais un nombre,
- le signe d’égalité est vu comme un symbole d’équivalence,
- une lecture par blocs est nécessaire,
- des implicites apparaissent dans l’écriture ,
- la terminaison d’un calcul algébrique peut être une expression comportant encore des signes opératoires.

Un problème d'algèbre

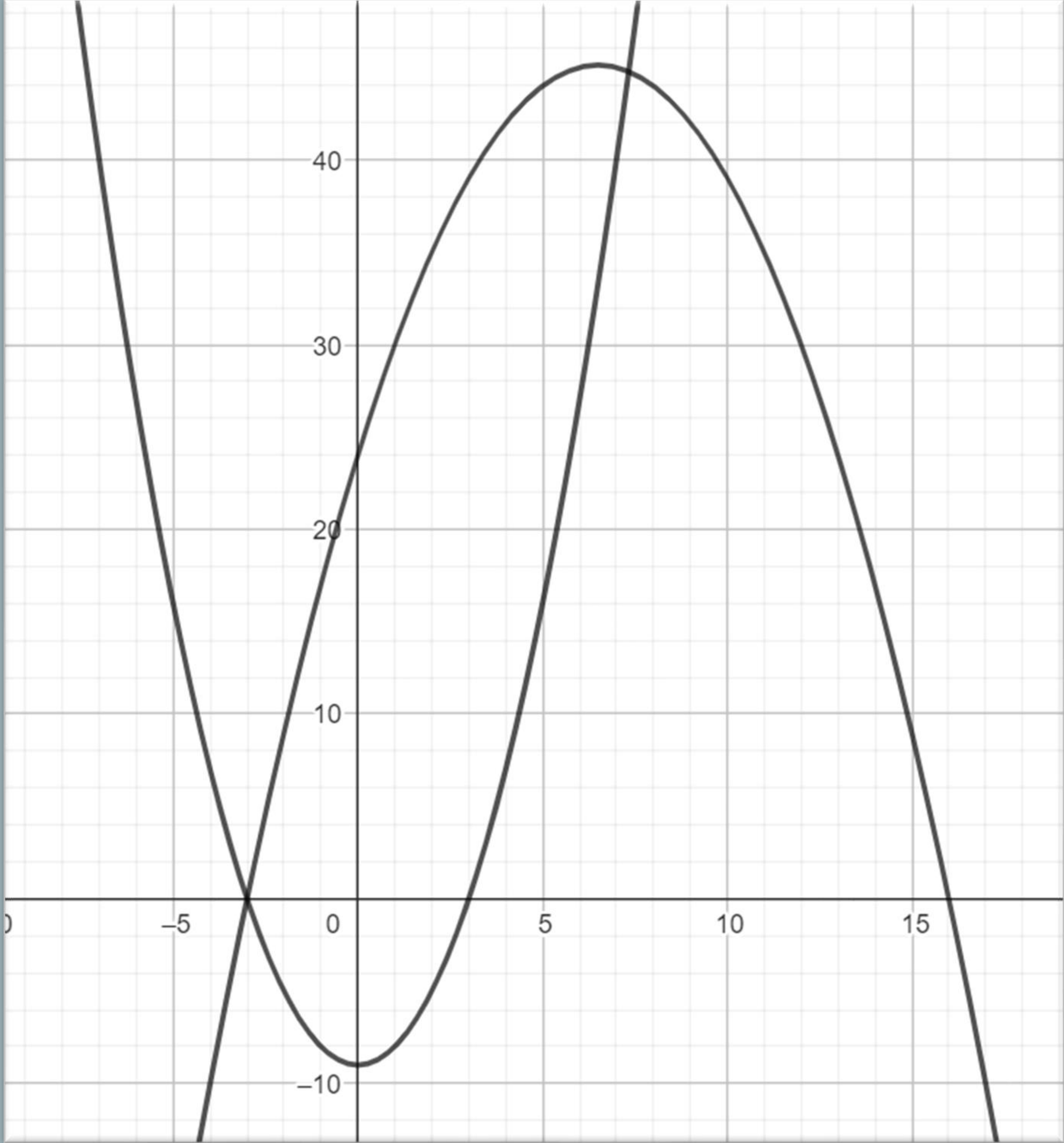
En groupe ou binôme, 30 minutes

1. Résoudre le problème.
2. Ce problème est proposé pour travailler des notions d'algèbre à la fin de la classe de troisième ou en début de la classe de seconde. Quels peuvent-être les **objectifs d'apprentissage visés** ?
3. Quelles sont **les connaissances mathématiques supposées disponibles** que les élèves peuvent mobiliser dans le problème ?

27. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré.

Résolution du problème

Points communs à E et F :
$(-3;\ 0)$ et $(22/3;\ 403/9)$



Analyse du problème

Objectifs d’apprentissage visés :

- travailler sur les factorisations et développements d’expressions algébriques,
- montrer l’intérêt de différentes formes d’écriture d’une expression en fonction du traitement envisagé (outil),
- donner du sens au calcul algébrique (au collège, les exercices sur les factorisations et développements sont presque toujours uniquement techniques).

Analyse du problème

Connaissances mathématiques mobilisables par l'élève :

- un produit de 2 facteurs est nul si et seulement l'un d'eux est nul
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
- calcul littéral,
- l'image d'une fonction est uniquement déterminée par l'antécédent,
- une même image peut avoir deux antécédents,
- on ne divise jamais par 0,
- placer des points sur un repère orthogonal,
- résoudre une équation du premier degré.

Un problème d'algèbre

En groupe ou binôme, 30 minutes

4. Quelles sont les **variables didactiques** du problème et quels sont leurs **effets sur les procédures des élèves** ?
5. Ce problème peut-il être vécu comme une situation au sein de laquelle l'élève construit ou modifie son rapport à l'objet de savoir comme réponse aux exigences d'un milieu et non au désir de l'enseignant ? Argumentez.

Variable didactique : Paramètre à disposition de l'enseignant dont le choix de la valeur influence la hiérarchie des stratégies de résolution.

Analyse du problème

Variables didactiques :

- le choix des solutions (entières dans un premier temps, puis rationnelle dans la partie C) pour que l'élève utilise l'outil algébrique et ne fasse pas au tâtonnement comme il aurait pu le faire pour les premières valeurs,
- une expression (F) permet de voir facilement que chaque image a deux antécédents alors que l'autre (E) non, même si le graphe le suggère,
- la forme des expressions dans E (factorisée), dans F (développée), il faut donc les manipuler.

Analyse du problème

Situation adidactique : Situation au sein de laquelle l'élève construit ou modifie son rapport à l'objet de savoir comme réponse aux exigences d'un milieu et non au désir de l'enseignant

- Le jeu entre le cadre graphique et le cadre algébrique offert par le milieu permet à l'élève de valider ou d'invalider ses réponses,
- la connaissance visée (nécessité de transformer les expressions) est la meilleure approche pour résoudre le problème,
- la partie A permet d'entrer dans le problème et vérifier que les élèves ont bien les prérequis, la partie B permet de vérifier que ce qui a été vu dans la partie A est compris, et ceci prépare à la question C.

Un problème d'algèbre

En groupe ou binôme, 30 minutes

6. Quels sont les **objets mathématiques en jeu** ? Quelle est leur « nature » ?
7. Quelles sont les interactions / articulations attendues entre ces objets ? Dans quel but ?

Analyse du problème

Objets mathématiques en jeu :

- algébriques : expressions - polynômes, équations, solutions d’équations,
- graphiques : repère, points du plan, représentations graphiques des relations

Analyse du problème

Interactions / articulations attendues :

- questions souvent posées sur des objets graphiques, mais leur résolution nécessite le traitement sur des objets algébriques

But :

- rendre le recours à l’algèbre nécessaire par l’impossibilité de résoudre le problème à partir du graphique.

Modéliser

[Programme du cycle 4]

Modéliser

- Reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème.
- Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques).
- Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.
- Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).

Modéliser

Exemple du dispositif ResCo de l’équipe DREAMaths de l’IREM de Montpellier.

1. Commencez à résoudre le problème. Écrivez les questions que vous vous posez à destination d'un autre groupe.

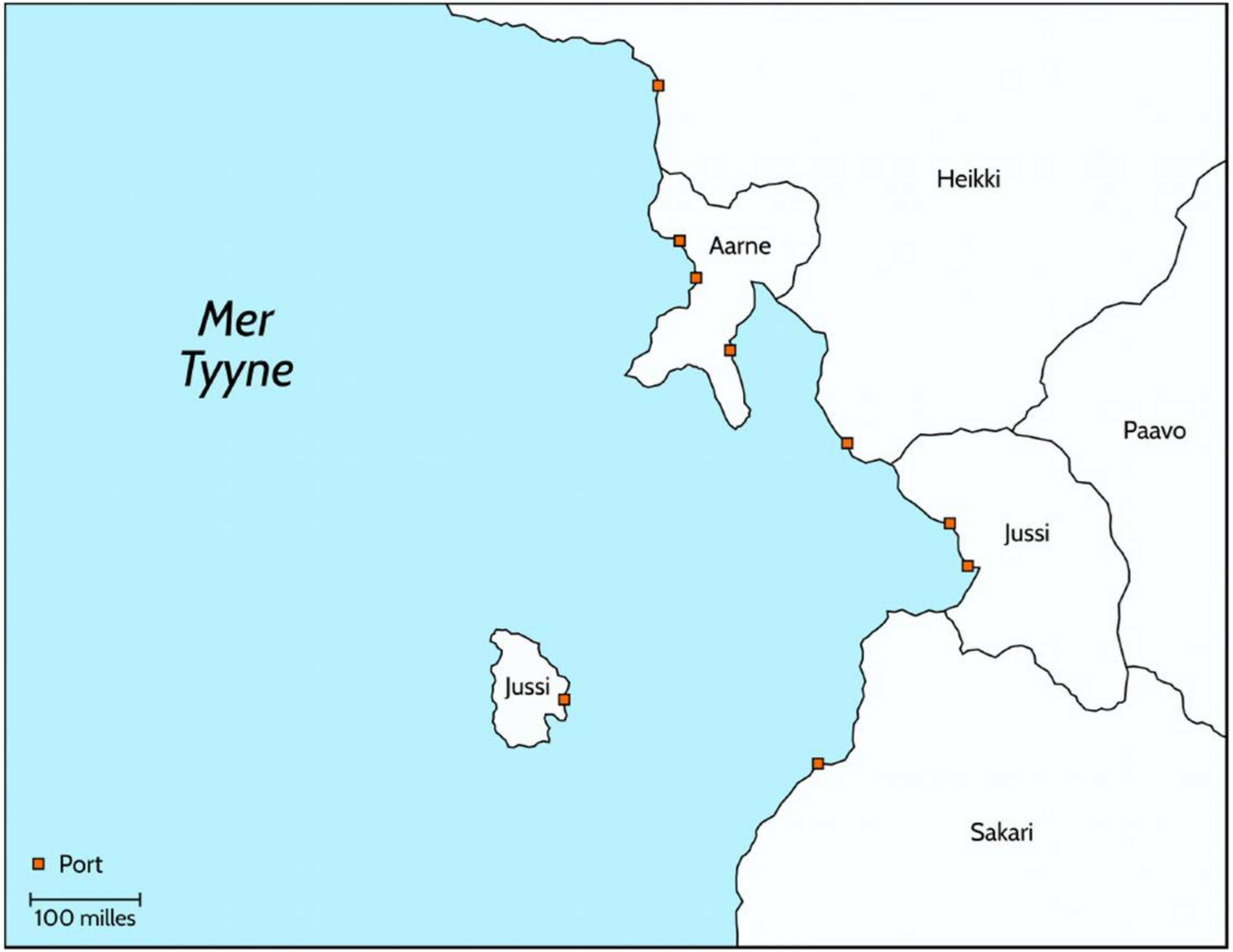
2. Échangez vos questions avec un autre groupe et rédigez les réponses aux questions reçues.

3. Récupérez vos questions et prenez connaissance des réponses qui y ont été associées.

FRONTIÈRES MARITIMES

Les pays de la mer Tyyne doivent se mettre d'accord sur le tracé de leurs frontières maritimes.

Pouvez-vous les aider en proposant un tracé de frontières maritimes qui soit équitable ?



Modéliser

Selon vous, à quoi sert la phase de questions-réponses ?
En quoi est-elle porteuse d’apprentissages ?
Et au regard de la modélisation mathématique ?

Modéliser

La phase de questions-réponses permet aux élèves de :

- prendre conscience qu'il est nécessaire de faire des choix de modélisation et que plusieurs choix sont possibles pour résoudre le problème pour passer d'une situation extra-mathématique au monde mathématique,
- émettre des hypothèses simplificatrices (généralement pris en charge par les manuels ou l'enseignant),
- expliciter les choix de modélisations qu'ils ont entrepris.

identification de grandeurs pertinentes	recherche d'un modèle (mathématique)	Questionnement d'éléments de contexte
100 milles c'est quelle distance en km ?	Que veut dire équitable ? : - Un territoire proportionnel à la superficie du pays ? - Au nombre de ports ? - Au périmètre du littoral - La mer appartient–elle au pays le plus proche ?	Est-ce que Paavo va avoir une frontière maritime ? Comment PAAVO peut-il avoir une frontière maritime ?
Combien fait la surface de la mer ?	Doit-on faire une bande le long des côtes ? Si oui, de quelle largeur ?	Qu'est-ce qu'une frontière maritime ?
Quelle est la distance maximum entre un pays et sa frontière maritime ?	Doit-on répartir la totalité de la mer ?	Est-ce que les pays qui ont des plages ou des particularités (la pêche, des zones avec des espèces protégées, des coraux, des récifs, des phares, des criques, des activités nautiques …) ont des droits particuliers leur accordant plus d'espace maritime ?

Modéliser

Ray (2013). Une **fiction réaliste** est une situation ayant les caractéristiques suivantes :

- elle est a priori non mathématique,
- son contexte est fictif mais réaliste,
- la prise en charge efficace de cette situation demande une phase de modélisation,
- la phase de modélisation peut renvoyer à plusieurs problèmes mathématiques selon les choix qui sont faits.

Ces situations sont placées dans un contexte (un fragment de réalité) qui soulève une question nécessitant la construction d'un modèle.

Dispositif ResCo du groupe DREAMaths de l'IREM de Montpellier

Pour mardi prochain (12/03)

Rien !