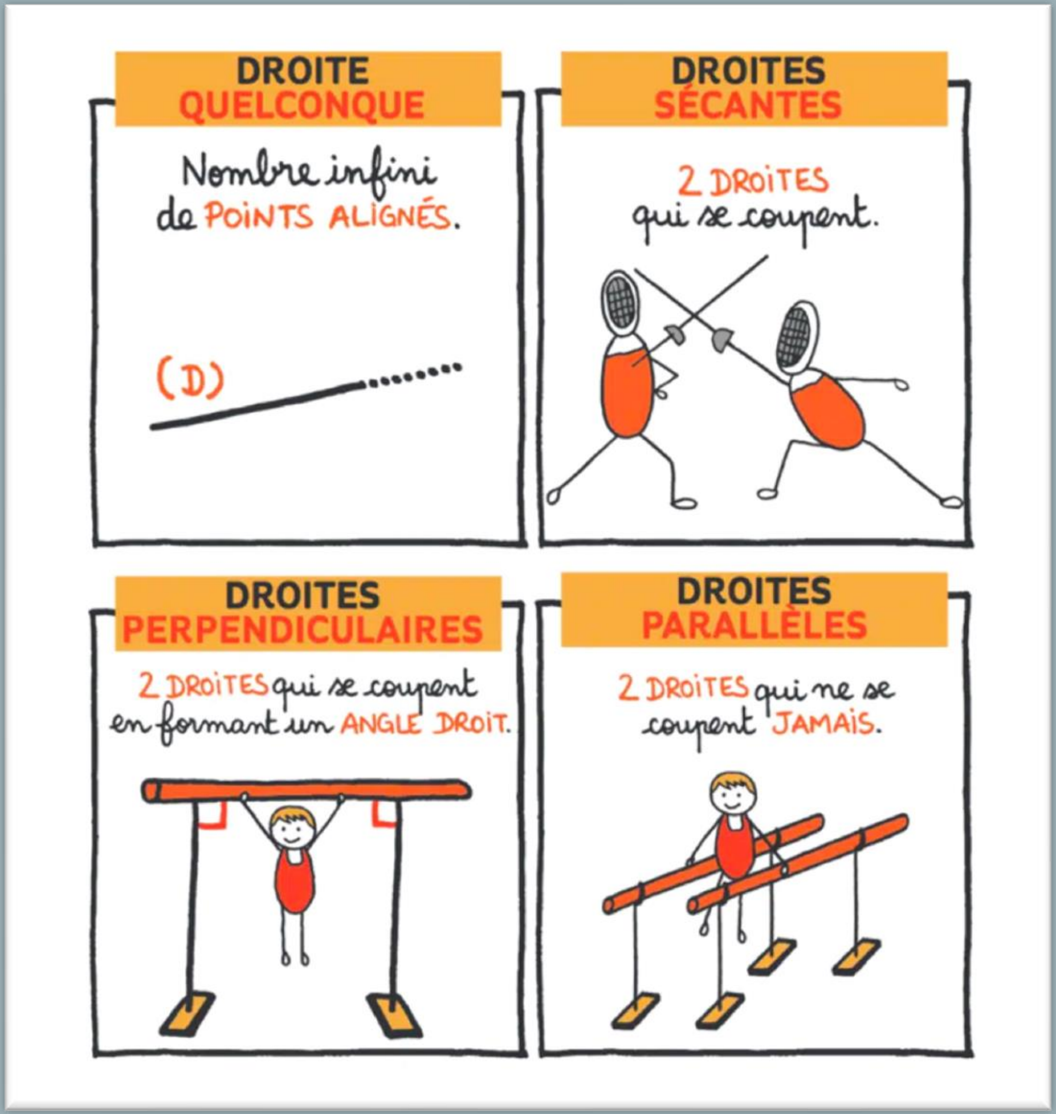
CTD4 – équations de droites



Retour sur le DM1

72 Dans chaque cas, dire si le point C appartient à la droite (AB).

a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)

b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)

c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

L’énoncé de cet exercice s’inscrit dans le cadre de la **géométrie plane repérée**. La notion principale visée est celle d’**alignement de points**.

Cet exercice met en scène trois fois le même type de tâche avec des données différentes pour chaque question. Il n’est **pas guidé**, ce qui ouvre à différentes résolutions possibles. Cet exercice en trois temps peut avoir une visée :

- de **découverte** d’un savoir(-faire) nouveau,
- d’**application** d’une nouvelle technique de vérification de l’alignement,
- d’**entrainement** pour stabiliser et consolider une technique de vérification de l’alignement.

Découverte d'un savoir(-faire) nouveau

Au début collège, l'élève peut résoudre le problème par construction et lecture graphique. Néanmoins, le manque de précisions dans la réalisation du dessin peut provoquer un doute sur l'alignement des points dans la question c) qui crée la nécessité de savoir décrire la droite (par une équation cartésienne) pour (in)valider l'alignement. À la fin du collège et au lycée, l'exercice peut également être vu comme un exercice à prise d'initiative qui nécessite de réinvestir les connaissances sur les équations de droite pour résoudre un type de tâche nouveau : l'alignement de points.

Application d’une nouvelle technique de vérification de l’alignement

À la fin du collège et au lycée, la résolution par construction et lecture graphique ne peut suffire à (in)valider les alignements. Même si cela permet d’établir une conjecture, le passage à la preuve est nécessaire dans la résolution de la question c) (alors que l’alignement peut être validé sans dans les deux première questions). Cet exercice crée donc la nécessité d’appliquer les techniques de vérification d’alignement vue en cours (différentes selon le niveau).

Entrainement pour stabiliser et consolider une technique de vérification de l’alignement

Cet objectif doit être explicité pour exploiter pleinement la répétition à trois reprises du même type de tâche.

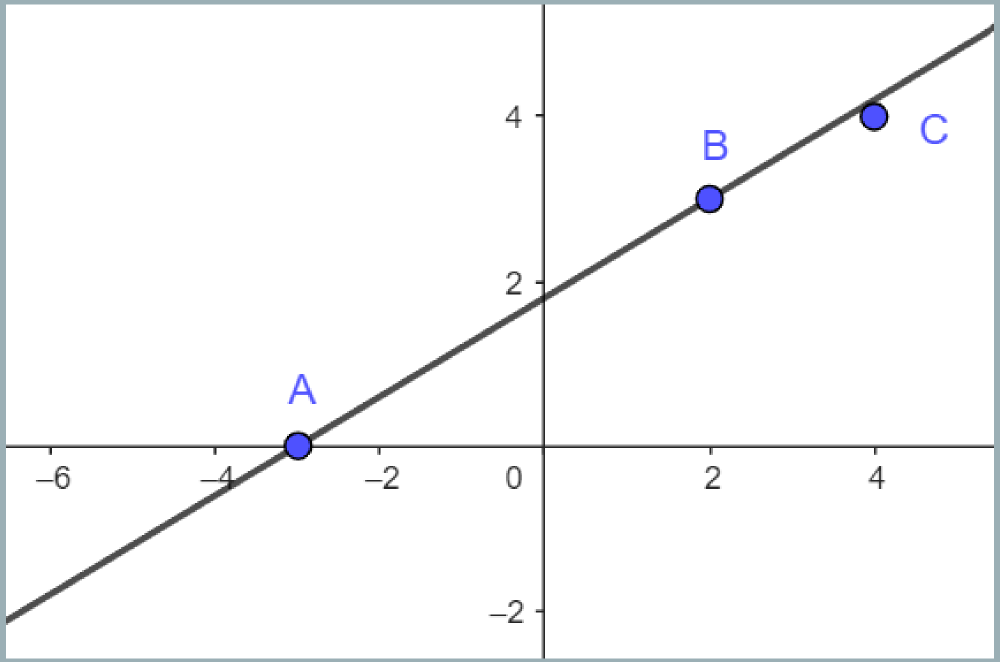
Remarques complémentaires

Au lycée, comme différentes procédures de résolution sont possibles, il peut être intéressant de les **faire cohabiter** en classe et de **discuter** collectivement de leurs liens. Au collège et au lycée, rares sont les types de tâche demandant à l’élève de **discuter de la validité d’un énoncé** (tout ce qui leur est demandé est presque systématiquement vrai).

Résolution – début collège

Au début du collège, l'exercice peut être abordé par construction et lecture graphique. C'est le dessin qui valide ou invalide l'alignement.
L'exercice peut aussi être résolut grâce au cas d'égalité de l'inégalité triangulaire :

$$AB = AC + CB \Leftrightarrow C \in [AB]$$



Résolution – fin collège & début lycée

À la fin du collège et au début du lycée, l'équation cartésienne (éventuellement réduite) d'une droite peut être utilisée. Néanmoins, l'alignement peut être validé dans la question a) en constatant que les trois points ont même abscisse et l'alignement peut être validé dans la question b) en calculant la pente des droites (AB) et (BC). En revanche, dans la question c), l'alignement ne peut être invalidé qu'à l'aide de l'équation cartésienne d'une droite.

- **Possibilité 1 :** trouver l'équation cartésienne de la droite (AB) (soit par résolution d'un système soit par calcul direct dans le cas de l'équation réduite) puis vérifier si les coordonnées du point C satisfont l'équation.
- **Possibilité 2 :** trouver l'équation des droites (AB) et (AC) et voir qu'elles sont proportionnelles pour en déduire que ces droites sont confondues.

Résolution – lycée

Au lycée, particulièrement en 2de, on peut se servir de la définition de la colinéarité (existence d'un réel λ tels que $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$) ou se servir du déterminant pour établir la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

En 1re, on peut se servir du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour établir la colinéarité.

Enfin, en Tle, la notion de représentation paramétrique d'une droite peut être utilisée.

Dialectique outils/objet

Dans certains exercices, on travaille savoir (ou savoir-faire) spécifiques en tant qu'**objet**.
Exemple : déterminer l'équation d'une droite.

Et dans d'autres exercices, ils sont mobilisés en tant qu'**outils** pour répondre à un type de tâche.
Exemple : démontrer que des points sont alignés.

(Douady, 1986). Pour une réelle appropriation d'un savoir ou d'un savoir-faire, celle-ci doit être abordée sous un double regard, comme outil et comme objet.

Exercice avec prise d'initiative

- Les programmes demandent que l'élève soit capable de choisir une méthode adaptée pour résoudre un problème donné : un exercice pour lequel il n'y aurait pas possibilité d'employer plusieurs méthodes.

- En lien avec l'algèbre : un exercice dans lequel une coordonnée est un paramètre t dont il faut chercher la valeur pour qu'il y ait alignement.

- Dialectique outil/objet : si l'alignement était l'objet, un exercice dans lequel c'est un outil et vice-versa.

Retour sur la notion de cadre

Cadre (Douady, 1987). Un cadre est constitué :

- des concepts d'une branche des mathématiques,
- des relations entre les concepts,
- de leurs formulations,
- des images mentales associés à ces concepts et ces relations.

Changement de cadre : moyen d'obtenir des formulations différentes d'un même problème permettant un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre des nouveaux outils et techniques.

Quel(s) cadre(s) pour l'objet « droite du plan » ?

Oral, 5 minutes

$$f(x) = ax + b$$

$$ax + by + c = 0$$

$$\overrightarrow{AX} = k \cdot \vec{u}$$

$$(A, \vec{u})$$

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Cadre vectoriel

Cadre algébrique

Cadre fonctionnel

Cadre graphique

Cadre topologique

Vers la notion de représentation

Un objet peur avoir différentes représentations au sein d'un même cadre.

$$ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}$$

Cadre algébrique

Jeu de cadre

Jeu de cadre (Douady, 1987). Changement de cadre provoqué à l'initiative de l'enseignant pour faire avancer la phase de recherche.

Exemple de jeu de cadre : le problème est posé dans un cadre, mais sa résolution nécessite le traitement dans un autres cadre ou exploitation dans chacun des cadres de ce qui est facile, et qui, par transfert dans l'autre, permet d'avancer dans le problème

Liens entre les écritures d’une droite dans le plan

Si la donnée est {deux points}

Équation cartésienne

$$\{(x, y), ax + by + c = 0\}$$

Équation réduite

$$\{(x, y), y = mx + p\}$$

Quelles droites peuvent être décrites par un tel ensemble ?

Liens entre les écritures d'une droite dans le plan

Si la donnée est {un point A, un vecteur $\vec{u}$}

Équation affine

$$\{X, \exists\lambda, X = A + \lambda\vec{u}\}$$

Équation vectorielle

$$\left\{X, \exists\lambda, \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}\right\}$$

Équation paramétrique

$$\left\{(x, y), \exists t, \begin{cases} x = x_A + t x_{\vec{u}} \\ y = y_A + t y_{\vec{u}} \end{cases}\right\}$$

Déterminant et colinéarité

Proposition. Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Preuve.

À vous de jouer !

Preuve de la proposition

Sens direct.
On suppose que les vecteurs $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ sont colinéaires. Alors il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Ainsi, $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$.
En particulier, $x - \lambda x' = 0$. En multipliant chaque membre par y', il vient $xy' - \lambda y' x' = 0$. Puisque $y = \lambda y'$, l'équation devient

$$xy' - yx' = 0$$

C'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Preuve de la proposition

Sens réciproque.

- **Si $\boldsymbol{x' = y' = 0}$.**

Dans ce cas, on a bien que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- **Si $\boldsymbol{x'}$ ou $\boldsymbol{y'}$ ne vaut pas 0.**

On suppose que $x' \neq 0$. Comme $xy' - yx' = 0$, alors $y = \frac{x}{x'}y'$.

De plus, on a évidemment $x = \frac{x}{x'}x'$. Posons $\lambda = \frac{x}{x'}$.

Alors, on a bien $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Et dans l'espace ?

Extrait CAPES externe 2016

Exercice. L'espace est rapporté à un repère $\left(0\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?.

Productions d'élèves

Élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité

Élève 1

Je détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$*, vecteur directeur de la droite* (AB) *et les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{CD}$*, vecteur directeur de la droite* (CD).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites* (AB) *et* (CD) *ne sont pas parallèles. Alors les droites* (AB) *et* (CD) *sont sécantes.*

Productions d'élèves

Élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité

Élève 2

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dans l'espace.
J'ai entré les coordonnées des points A, B, C et D puis j'ai tracé le plan ABC.
Son équation est $9x - 5y + 8z = 23$.
Donc, je peux dire que D n'appartient pas au plan ABC.

Productions d'élèves

Élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité

Élève 3

J'écris une équation paramétrique de chacune des deux droites :

$$(AB)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-3t \\ z & = & 3-3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbf{R} \qquad (CD)\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -t' \\ y & = & -3+3t' \\ z & = & 1+t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbf{R}$$

$M(x; y; z)$ est un point d'intersection des deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On obtient un système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+t & = & -t' \\ 2-3t & = & -3+3t' \\ 3-3t & = & 1+t' \end{array}\right.$$

Dans la première équation on a $t' = -1-t$ et en remplaçant dans la troisième, on obtient $3-3t = 1-1-t$ ce qui donne $t = \frac{3}{2}$ et donc ensuite $t' = -\frac{5}{2}$. On peut maintenant calculer les coordonnées de M par exemple à partir de (AB) et on trouve $M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Les droites (AB) et (CD) sont donc sécantes en M.

Productions d'élèves

En groupe, 30 minutes

1. **Indiquer** le thème concerné et la situation de cet exercice dans la progression.

2. **Proposer** différentes procédures de résolution de cet exercice. Pour chacune des procédures proposées, **préciser** : les connaissances et compétences mobilisées. **Discuter** la place jouée par les systèmes d'équations linéaires.

3. **Analyser** les productions des trois élèves qui sont proposées, en mettant en évidence les connaissances et compétences mobilisées et les erreurs éventuelles.

Généralités sur l'exercice

Thème : géométrie dans l'espace
Domaine : algèbre et géométrie

La décomposition d'un vecteur d'un plan suivant deux vecteurs non colinéaires de ce plan, puis celle d'un vecteur de l'espace suivant trois vecteurs non coplanaires, sensibilisent aux concepts de liberté et de dépendance en algèbre linéaire.

L'étude générale des systèmes linéaires n'est pas un objectif du programme mais des exemples seront traités dans le contexte de la géométrie repérée : décomposition de vecteurs, intersections de plans, etc.

Programme d'enseignement de spécialité de terminale générale

Procédures de résolution

1. Existe-t-il $(a, b, c) \neq (0,0,0)$ tel que $a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$?

2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? S'ils ne le sont pas, les coordonnées du point D vérifient-elles l'équation cartésienne du plan (ABC) ?

3. Existe-t-il un point de l'espace dont les coordonnées satisfont les représentations paramétriques des droites (AB) et (CD) ?

Procédure 1

Soient (a, b, c) un triplet de réels vérifiant $a\overrightarrow{DA} + b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.
Cette égalité se récrit

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ 2a - b - 3c = 0 \\ a - 2b - c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7b + 3c = 0 \\ 3b - c = 0 \\ a = 2b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 16b = 0 \\ c = 3b \\ a = 2b + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}\right)$ est une famille libre, c'est donc une base de l'espace. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas coplanaires donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

4 Bases et repères de l'espace

Vidéo
JAICOMPRIS.COM
Cette notion est présentée en vidéo

A Bases de l'espace

Définition

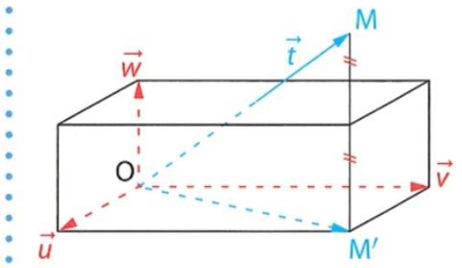
Une **base** de l'espace est un triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ formé de vecteurs **non coplanaires**.

Propriété – Définition

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe **un unique** triplet $(a\,;b\,;c)$ de nombres réels tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.
$(a\,;b\,;c)$ est le triplet des **coordonnées** du vecteur $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Remarque : cette propriété est démontrée à l'exercice 84 p. 101.

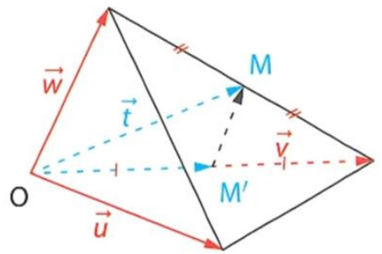
Exemples



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$

$\vec{t}$ a pour coordonnées $(1\,;1\,;2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

$\vec{t}\begin{pmatrix}0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Hyperbole T^le spécialité, Nathan, 2020, p. 92

Procédure 2

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas colinéaires. Soient a, b, c et d des réels tels que $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation du plan (ABC). Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a - 3b - 3c = 0\\ -a - 5b - 2c = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}a = 3b + 3c\\ 5c = -8b\end{cases}$$

Choisissons $c = 8$ de sorte que $\vec{n}\begin{pmatrix}9\\-5\\8\end{pmatrix}$. $A \in (ABC)$ donc $d = -23$. D ne satisfait pas l'équation $9x - 5y + 8z = 23$. Ainsi, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Procédure 3

On a $(AB) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(CD) : \begin{cases} x = -t' \\ y = -3 + 3t' \\ z = 1 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

Les droites sont sécantes si et seulement s'il existe (t, t') tel que

$$\begin{cases} 1 + t = -t' \\ 2 - 3t = -3 - 3t' \\ 3 - 3t = 1 + t' \end{cases}$$

Les deux premières lignes sont incompatibles (par substitution, on obtient $2 = -6$), donc le système n'a pas de solution. Ainsi, les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Analyse des productions d'élèves

Élève 1

Je détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$*, vecteur directeur de la droite* (AB) *et les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{CD}$*, vecteur directeur de la droite* (CD).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites* (AB) *et* (CD) *ne sont pas parallèles. Alors les droites* (AB) *et* (CD) *sont sécantes.*

Analyse des productions d'élèves

Élève 2

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dans l'espace.
J'ai entré les coordonnées des points A, B, C et D puis j'ai tracé le plan ABC.
Son équation est $9x - 5y + 8z = 23$.
Donc, je peux dire que D n'appartient pas au plan ABC.

Analyse des productions d'élèves

Élève 3

J'écris une équation paramétrique de chacune des deux droites :

$$(AB)\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-3t \\ z = 3-3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R} \qquad (CD)\begin{cases} x = -t' \\ y = -3+3t' \\ z = 1+t' \end{cases} \quad t' \in \mathbf{R}$$

$M(x; y; z)$ *est un point d'intersection des deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On obtient un système :*

$$\begin{cases} 1+t = -t' \\ 2-3t = -3+3t' \\ 3-3t = 1+t' \end{cases}$$

Dans la première équation on a $t' = -1-t$ *et en remplaçant dans la troisième, on obtient* $3-3t = 1-1-t$ *ce qui donne* $t = \frac{3}{2}$ *et donc ensuite* $t' = -\frac{5}{2}$. *On peut maintenant calculer les coordonnées de* M *par exemple à partir de* (AB) *et on trouve* $M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. *Les droites* (AB) *et* (CD) *sont donc sécantes en* M.

Leçons au CAPES

13. Droites et plans dans l'espace.
18. Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide des vecteurs.
19. Produit scalaire dans le plan.
22. Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme.
23. Exemples de problèmes d'intersection en géométrie.

Pour dans 15 jours (05/03)

- DM2 à rendre sur feuille.