DIDA801
Didactique en algèbre et géométrie

M1 MEEF SD
2023-2024

Thibaut TROUVÉ
thibaut.trouve@univ-grenoble-alpes.fr
Institut Fourier – Bureau 309
https://www-fourier.univ-grenoble-alpes.fr/~trouvet/

DIDA801 – modalités du cours

- ✓ 12h de CTD (6 créneaux de 2h) + 3h de CC (+1h pour 1/3 temps).

DIDA801

- ✓ De **15h45 à 17h45** en salle 17 de l'IF
- ✓ CC compte pour 50% de DIDA801 et 40% de MAT-DIDA801.

Dispositif autour de la preuve

- ✓ Compte pour 50% de la note de DIDA801.

MAT801 – Algèbre et géométrie

- ✓ J.-B. Meilhan et P. Will.

Ma. 16/01
Ma. 23/01
Ma. 30/01
Ma. 06/02
Ma. 13/02
Ma. 20/02
Vacances
Vacances
Ma. 05/03
Ma. 12/03
Stage
Stage
Stage
Stage
J. 18/04

DIDA801 – objectifs du cours

- ✓ Concours : 2de épreuve écrite et épreuve orale de leçon
- ✓ Eduscol : site mis à disposition pendant la préparation

ÉDUSCOL

Développement professionnel

- ✓ Analyse des connaissances et compétences en jeu dans une situation mathématique.
- ✓ Produire et accompagner les questionnements didactiques des futurs professeur·es.
- ✓ Donner des repères et outils structurants pour enseigner.

DIDA801 – planning prévisionnel

- ✓ CTD1 : prise de marques autour de « grandeur et mesure »
- ✓ CTD2 à CTD4 : approches géométriques et apports des outils numériques
- ✓ CTD5 & CTD6 : algèbre !

En filigrane…

Variable didactique, contrat didactique, représentation, registre, outils, objet, tâche, dévolution, institutionnalisation, conceptions, analyse *a priori*…

CTD1 – grandeur et mesure

Inspiré de la 2de épreuve écrite du CAPES 2023

Questions flash !

Individuellement

Qu’est-ce qu’une grandeur ? Une mesure ?

Pouvez-vous donner des exemples ?

Grandeur : "Domaine général" dans lequel on peut faire des mesures.

C'est le fait de nommer à plusieurs ~~me~~sures sur la même notions différentes échelle.

Grandeur |
- Rapport à la taille
- Jauge

Exemple : "Grandeur d'âme"

Grandeur = taille d'un objet - grandeur physique - ordre de grandeur

Exemples : vitesse, poids, masse

La grandeur c'est une quantité qui est propre à un objet

Une grandeur est une valeur numérique et une unité

Grandeur
-> Taille
-> Ordre

Grandeur :
Ordre de grandeur (avoir une idée de la taille de quelque chose).
Une taille. C'est pas très précis...

Dimension / Taille d'une valeur

Grandeur : objet physique qui permet de décrire le monde (ou plus)

Exemples : Masse, Force, Vitesse, Longueur, Surface, Volume, ~~Temps~~, Durée...

Grandeur :
Un nombre qui est associé à une unité qui n'est pas métrique (m, cm.) ~~Mesure~~ ou un angle.
Comme le poids, le volume...

GRANDEUR
Ordre de grandeur
1 < 1000

Grandeur.
Ordre de grandeur
Comparer

Grandeur

Mesure / Mensuration
Permet la quantification : "Tu mesures combien ?"

C'est le fait d'associer une notion à un concept réel qui peut avoir différent nombre (comparable)

Mesure
Le nombre devant cm, cl, ...

Mesure : le truc qu'on mesure avec un instrument. C'est une valeur.

Mesure
-> Règle, Compas, Equerre
-> Unités

Mesure c'est déterminer une quantité à partir d'une observation

La mesure c'est la quantité ainsi déterminé

Mesure : valeur numérique - unité de mesure - instrument de mesure

Mesure : - Quelque chose d'exact
- Permet de caractérisé un objet.

La mesure c'est le mètre
La grandeur c'est ma taille en mètres.

Synonyme de l'unité d'une quantité physique

Mesure :
Une longueur, un angle ?

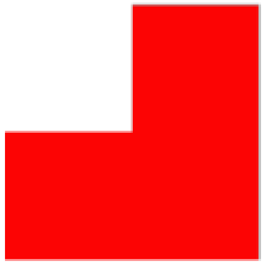
Mesure : ~~Notion Objet~~
Valeur qui décrit une grandeur
(C'est plus mathématique)
Exemples : 3 cm, 40° d'angle
32°C, 100 km/h...

Mesure : l'action de mesurer une grandeur

MESURE
Notion de taille, unité
Mesurable avec instrument

Valeur numérique donnée pour une grandeur

Mesure

	Le périmètre est plus petit que celui du modèle.	Le périmètre est égal à celui du modèle.	Le périmètre est plus grand que celui du modèle.
L'aire est plus grande que celle du modèle.			
L'aire est égale à celle du modèle.			
L'aire est plus petite que celle du modèle.			

En classe de 6ème

Inventer des figures à partir de la figure présente au centre du tableau et les positionner dans les cases correspondantes. Chercher à compléter toutes les cases.

Lien de l'activité

Analyse de ressource

10 minutes, en groupe de 4

- Résoudre rapidement l'exercice.
- Quelles(s) conception(s) peuvent avoir les élèves ?
- Quelle(s) stratégie(s) de résolution avez-vous mis en place ?
- Quelle(s) stratégie(s) de résolution pourraient mettre en place les élèves ?
- Quel(s) objectif(s) d'apprentissage peu(ven)t-être visé(s) ?

Connaissances naïves – conceptions : Constructions spontanées par l'enfant de ses croyances ou connaissances sur le monde matériel qui l'entoure, qu'il acquière à partir de sa propre expérience dans les situations de la vie quotidienne.

Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs
Longueur et périmètre Comparer des périmètres avec ou sans recours à la mesure (par exemple en utilisant une ficelle, ou en reportant les longueurs des côtés d'un polygone sur un segment de droite avec un compas). ▪ Notion de longueur : cas particulier du périmètre. ▪ Unités relatives aux longueurs : relations entre les unités de longueur et les unités de numération. Calculer le périmètre d'un polygone en ajoutant les longueurs de ses côtés. Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule. ▪ Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle. ▪ Formule de la longueur d'un cercle.
Aires Comparer des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure, par superposition ou par découpage et recollement. Différencier périmètre et aire d'une figure. Estimer la mesure d'une aire et l'exprimer dans une unité adaptée. Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule. ▪ Unités usuelles d'aire et leurs relations : multiples et sous-multiples du m². ▪ Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.

Attendus de fin de cycle 3

Repères annuels de progression pour le cycle 4

GRANDEURS ET MESURES		
Calculs sur des grandeurs mesurables		
La connaissance des formules donnant les aires du rectangle, du triangle et du disque, ainsi que le volume du pavé droit est entretenue à travers la résolution de problèmes. Elle est enrichie par celles de l'aire du parallélogramme, du volume du prisme et du cylindre. La correspondance entre unités de volume et de contenance est faite. Les calculs portent aussi sur des durées et des horaires, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Les élèves sont sensibilisés au contrôle de la cohérence des résultats du point de vue des unités.	Le lexique des formules s'étend au volume des pyramides et du cône. Le lien est fait entre le volume d'une pyramide (respectivement d'un cône) et celui du prisme droit (respectivement du cylindre) construit sur sa base et ayant même hauteur. Des grandeurs produits (par exemple trafic, énergie) et des grandeurs quotients (par exemple vitesse, débit, concentration, masse volumique) sont introduites à travers la résolution de problèmes. Les conversions d'unités sont travaillées. Les élèves sont sensibilisés au contrôle de la cohérence des résultats du point de vue des unités des grandeurs composées.	La formule donnant le volume d'une boule est utilisée. Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités est poursuivi. Il est possible de réinvestir le calcul avec les puissances de 10 pour les conversions d'unités. Par exemple, à partir de : $1 \text{ m} = 10^2 \text{ cm}$, il vient $1 \text{ m}^3 = (1 \text{ m})^3 = (10^2 \text{ cm})^3 = 10^6 \text{ cm}^3$ ou, à partir de : $1 \text{ dm} = 10^{-1} \text{ m}$, il vient $1 \text{ dm}^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$.
Effet des transformations sur des grandeurs géométriques		
Les élèves connaissent et utilisent l'effet des symétries axiale et centrale sur les longueurs, les aires, les angles.	Les élèves connaissent et utilisent l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes. Ils le travaillent en lien avec la proportionnalité.	Les élèves connaissent et utilisent l'effet des transformations au programme (symétries, translations, rotations, homothéties) sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes. Le lien est fait entre la proportionnalité et certaines configurations ou transformations géométriques (triangles semblables, homothéties).

Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Grandeur : Les grandeurs dépendent des objets d'étude qui peuvent porter plusieurs espèces de grandeurs (masse, longueur, durée, prix). Une grandeur met en relation des objets différents au sens des **relations d'équivalence** (tous les objets de même masse portent la même grandeur). Les grandeurs (d'une même espèce, par exemple, la masse) vérifient une relation d'**ordre total** (on peut comparer des masses), possèdent une **addition** (on peut additionner des masses) et par itération une **multiplication par un entier** (une masse trois fois plus lourde qu'une autre), une **soustraction** (si une masse est plus petite qu'une autre, on peut trouver une masse différente), et généralement la **division par un entier non nul** (on parle alors de grandeur divisible). Certaines notions **discrètes** (habitant, voyageur, véhicule) sont traitées comme des grandeurs (discrètes) et en pratique comme des grandeurs (divisibles) dès que les cardinaux sont grands (le tiers d'une population de 3 500 habitants).

Qu'est-ce qu'une mesure ?

Mesure : Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois elle contient une grandeur de même espèce, appelée unité. Cette mesure dépend donc de l'unité, contrairement à la grandeur qui est intrinsèque. Le résultat de la mesure est donc un nombre. La mesure permet de comparer deux grandeurs (divisibles) de même nature en ramenant la comparaison à celle de deux nombres.

Certaines grandeurs ne sont pas mesurables, car l'échelle numérique associée, pour les caractériser, dépend du choix d'une origine (comme la température thermométrique Celsius, la date calendaire). Dans ce cas, ces grandeurs sont dites **repérables**, et on devrait dire au quotidien « repérer une température » plutôt que « mesurer une température » : passer de 10°C à 20°C, ce n'est pas doubler la température, car dans l'échelle Fahrenheit on passe de 50°F à 68°F.

Pour l'enseignement

Définition : Une grandeur est une caractéristique d'un objet qui se mesure ou se calcule, comme par exemple la masse, la masse volumique, la longueur, l'aire, le volume, l'angle, la durée, la vitesse, la température, l'intensité, la tension, la puissance, l'énergie, le débit, le prix, le prix au kilo… La valeur d'une grandeur est exprimée par un nombre (la mesure) et une unité. La mesure dépend de l'unité choisie. Un même objet peut être caractérisé par différentes grandeurs.

$$r_{terre} = 6371 \text{ km}$$

Point de vue didactique

Existence d'un conflit entre une conception de l'aire comme forme géométrique, soumise éventuellement à des transformations et une conception de l'aire comme nombre issu d'une procédure de calcul.

Trois aspects incontournables de l'aire :

- l'aire **sans mesure** (conservation de la grandeur par découpage et recollement sans chevauchement, comparaison directe ou par transitivité, addition),
- l'aire comme **grandeur unidimensionnelle** (liée au pavage, report d'une unité),
- l'aire comme **grandeur bidimensionnelle** (lien entre les unités de longueur et les unités d'aire).

Point de vue didactique

La question des instruments est importante pour aborder et conceptualiser les grandeurs elles-mêmes aussi bien que leur mesure et elle se pose de façon différente pour chaque grandeur.

Comment **mesurer** une longueur ? Une aire ?

Étude d'un support

10 minutes, en groupe de 4

Guide « Résolution de problèmes » - collège

Classer de 3 façons différentes les pièces **P**, **Q** et **R** en fonction de leur aire.

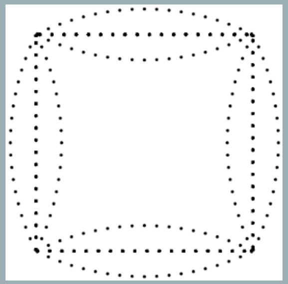
14. Transformations du plan. Frises et pavages.
42. Différents types de raisonnement en mathématiques.

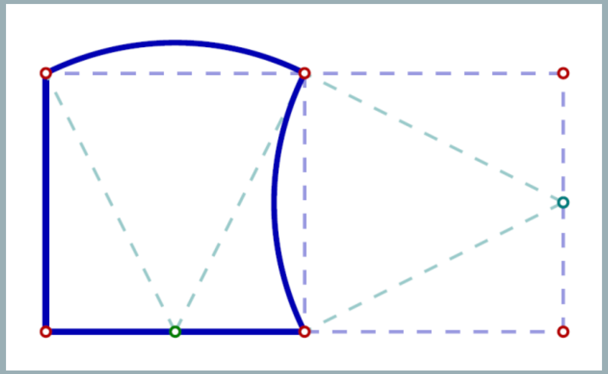
Étude d'un support

10 minutes, en groupe de 4

Guide « Résolution de problèmes » - collège

Classer de 3 façons différentes les pièces **P**, **Q** et **R** en fonction de leur aire.



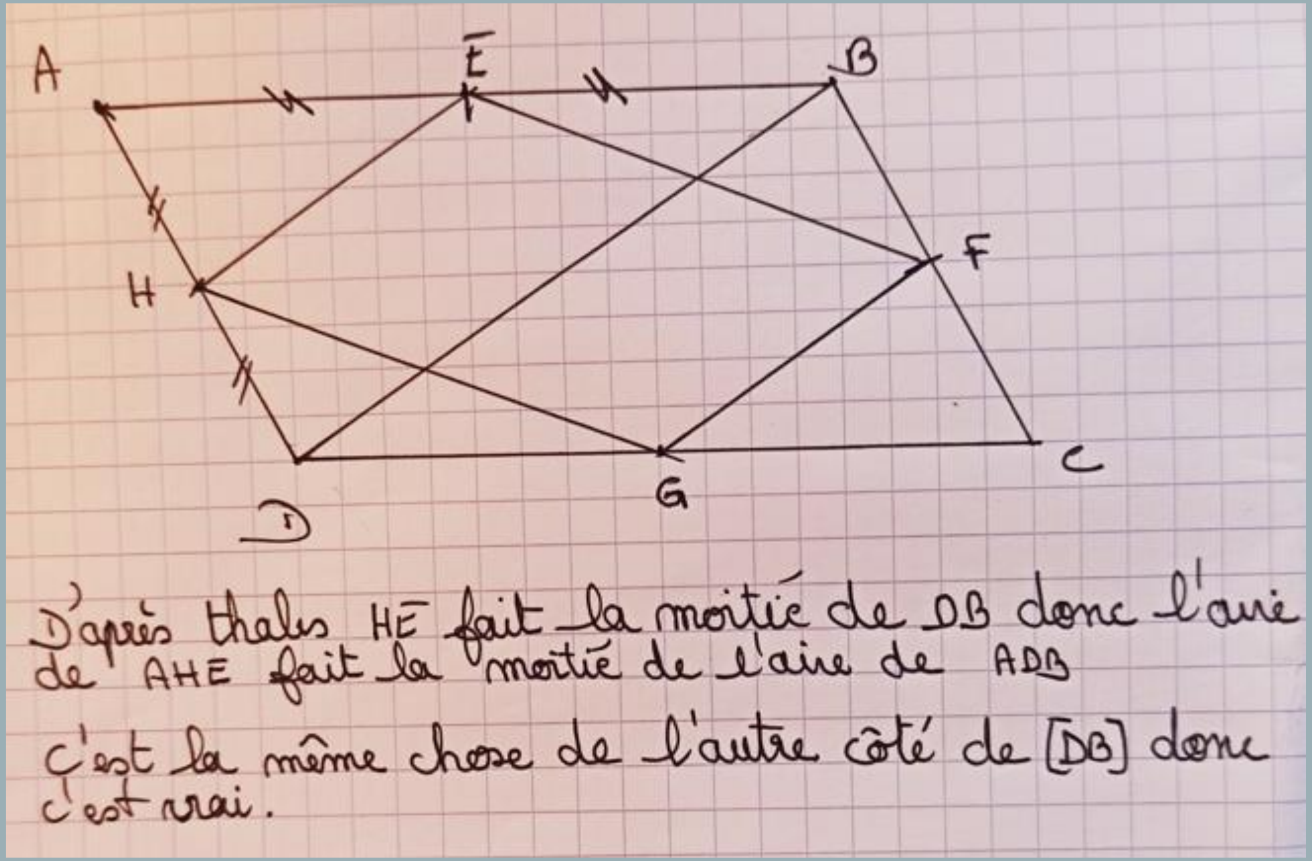


Analyse de production

Exercice donné en 3ème

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

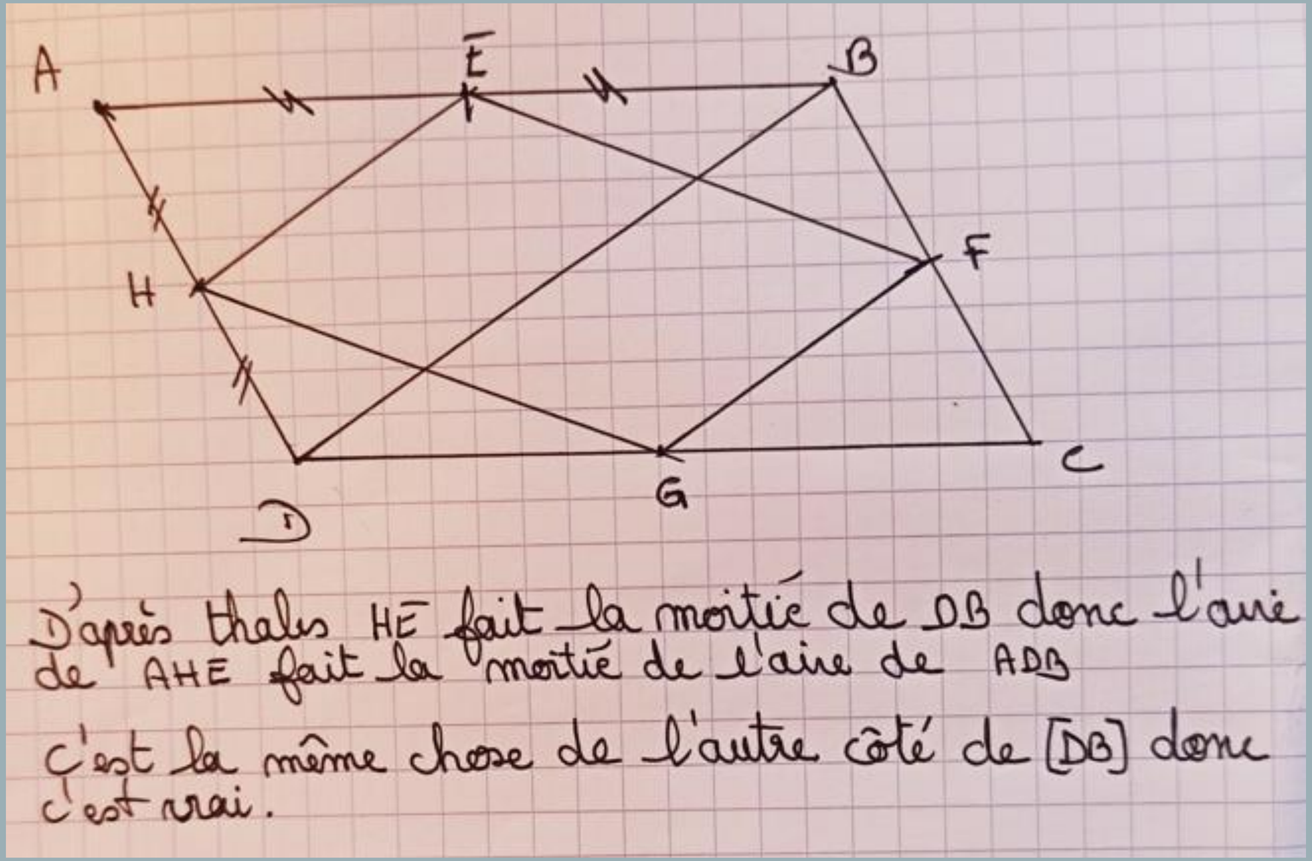
On considère un quadrilatère ABCD et les points E, F, G et H les milieux respectifs de ses côtés. L'aire du quadrilatère EFGH est égale à la moitié de l'aire du quadrilatère ABCD.



20. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.

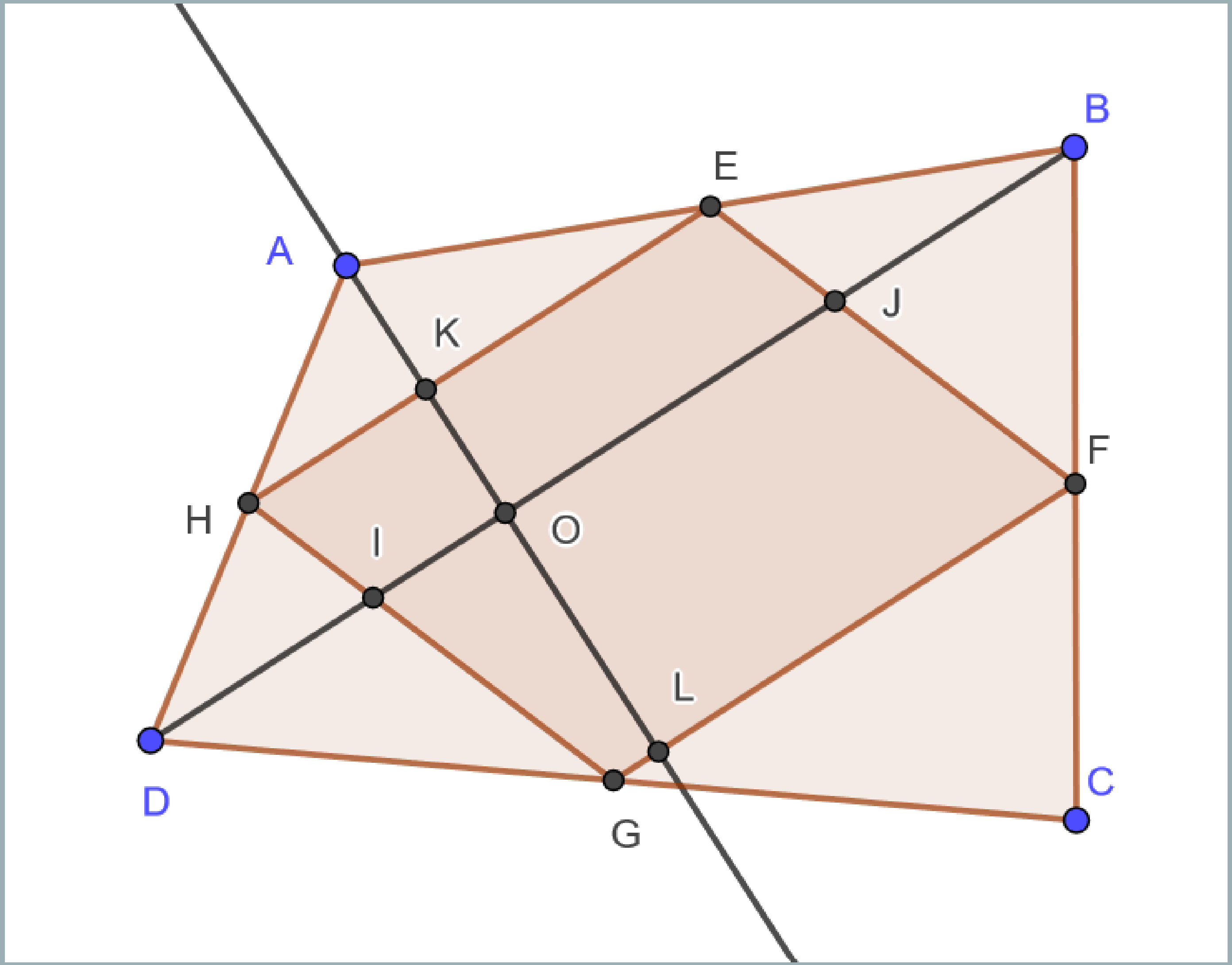
Analyse de production

- Analyser en termes de réussites et d'erreurs la solution proposée par l'élève.
- En prenant appui sur la démarche de cet élève, rédiger une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait être donnée à copier par les élèves dans leur cahier.

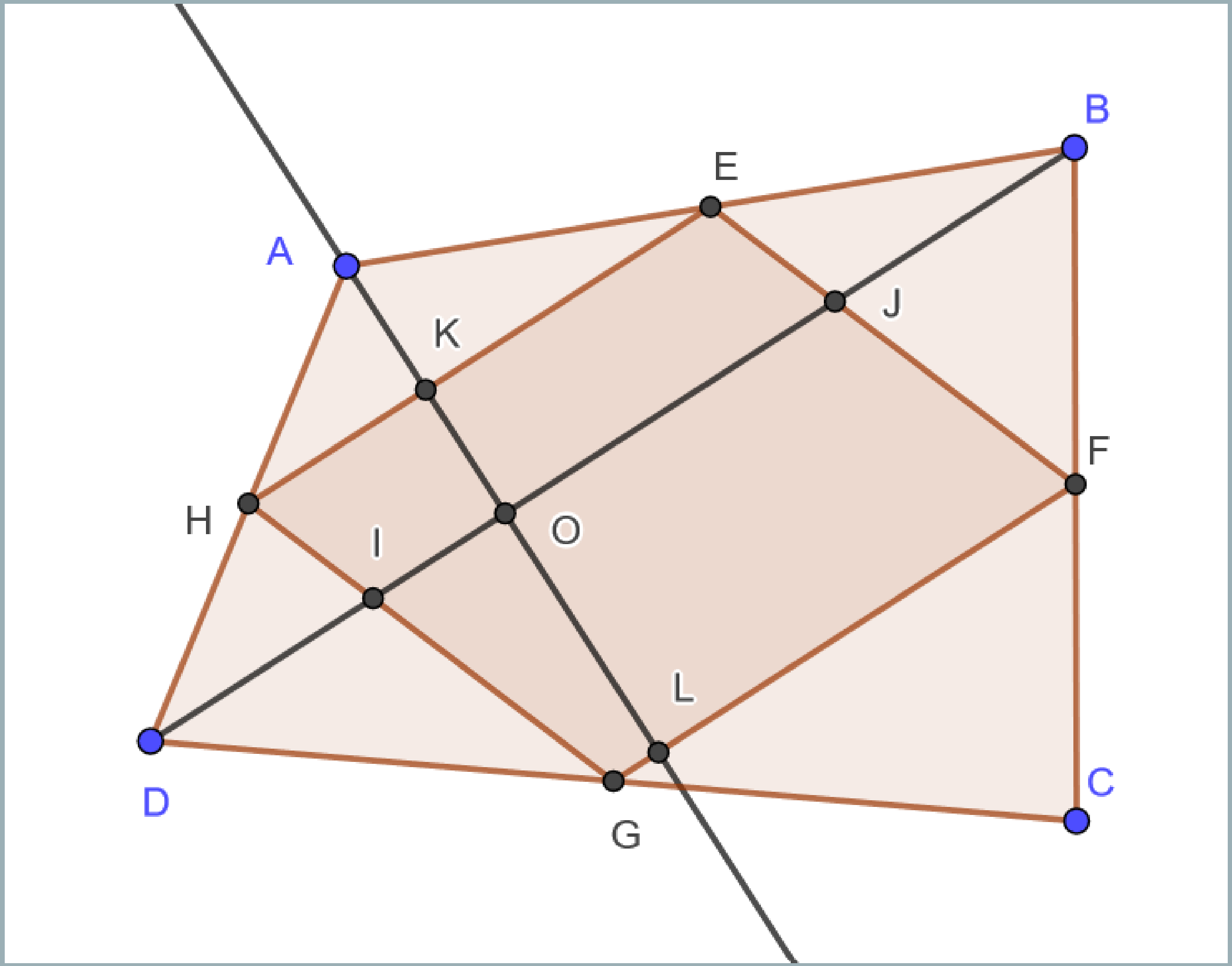


20. Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie.

Théorème de Varignon



Théorème de Varignon



1. EFGH est un parallélogramme

2. Aire(ABCD)=2Aire(EFGH)
   a. Aire(ABD)=2Aire(EJIH)
   b. Aire(CDB)=2Aire(FGIJ)
   c. Conclure

L'aire au lycée

- D'après vous, où la notion d'aire apparaît-elle au lycée ?
- Quelles propriétés peuvent être mises en parallèle ?

L'aire au lycée

Calculs d'aires

Descriptif

Des calculs d'aires menés selon différentes méthodes permettent d'aboutir à l'introduction de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ en montrant alors la puissance de calcul qu'apporte dans ce domaine la détermination des primitives. Différentes approches sont possibles : méthodes historiques d'approximation des aires, méthode des rectangles et des trapèzes pour l'aire sous une courbe, méthodes probabilistes et bien sûr le calcul intégral.

Ce thème est l'occasion de revoir les aires des figures planes usuelles : triangles, trapèzes, rectangles, carrés et disques, ainsi que l'utilisation de propriétés classiques : additivité, invariance par symétrie et translation.

Les calculs d'aires par approximations successives se prêtent tout particulièrement à la mise en œuvre d'algorithmes notamment dans le cas d'aires sous des courbes de fonctions dont on ne sait pas déterminer de primitives. Leur histoire et les différentes méthodes peuvent aussi être sources d'exposés réalisés par les élèves.
Ce thème peut s'étendre à des calculs de volumes notamment pour des solides de révolution (cylindre, cône, sphère, paraboloïde de révolution ...).

37. Intégrales, primitives.

Programme d'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de terminale générale

L'aire au lycée

A Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Propriété

f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction $\mathrm{F}_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **la** primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

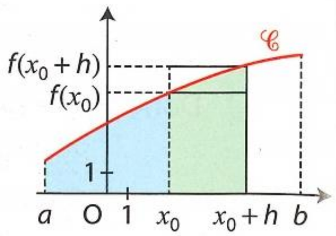
Démonstration

On étudie le cas où f est **croissante** sur $[a\,;b]$.

x_0 et $x_0 + h$, avec $h \neq 0$, sont deux nombres réels de l'intervalle $[a\,;b]$.

- **Si $h > 0$**, alors d'après la relation de Chasles :

$\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.



f est croissante sur $[a\,;b]$ et on peut encadrer $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ par l'aire des rectangles de largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.

Ainsi, $f(x_0) \times h \leqslant \mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0) \leqslant f(x_0+h) \times h$ c'est-à-dire $f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

- **Si $h < 0$**, alors on établit de la même façon que $f(x_0+h) \leqslant \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$.

Conclusion : f est continue en x_0 donc $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ et en utilisant un « théorème des gendarmes », on conclut que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{F}_a(x_0+h) - \mathrm{F}_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi, F_a est dérivable en x_0 et $\mathrm{F}_a'(x_0) = f(x_0)$. Avec la définition de l'intégrale, $\mathrm{F}_a(a) = 0$ et finalement F_a est la primitive de la fonction f sur $[a\,;b]$ telle que $\mathrm{F}_a(a) = 0$.

- Prouver cette propriété.
- Écrire les énoncés mathématiques sur le calcul intégral que mobilise la preuve.

Hyperbole T^le option maths complémentaires, Nathan, 2020

Pour mardi prochain (30/01)

- Apporter un ordinateur.
- Revoir des éléments de géométrie…
- Écrire la preuve du théorème de Varignon.
- Étudier les programmes de collège et lycée pour repérer les éléments clés des apprentissages en **géométrie**.