1 L'inégalité de Jenssen

Exercice 1.1 Dans cet exercice on suppose que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mésuré tel que $\mu(X) = 1$ et $\varphi : X \to [0, +\infty[$ est une fonction connvexe, i. e.,

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \forall x, y \in \mathbb{R} \forall t \in [0, 1].$$

1. Montrer que la fonction $x \to \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{x_0 - x}$ est croissante.

2. On pose $E_\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x) \geq ax + b \, \forall x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que
$$\varphi(x) = \sup_{(a,b) \in E_\varphi} (ax + b).$$

3. En déduire que si $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors
$$\int_X \varphi \circ f d\mu \geq \varphi(\int_X f d\mu).$$

4. En déduire que si $x_i \in \mathbb{R}$ alors
$$e^{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}} \leq \frac{e^{x_1} + \cdots e^{x_n}}{n}.$$

5. En déduire que si $y_i > 0, \forall i$ alors on a
$$(y_1 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1 + \cdots y_n}{n}.$$