12.1. Rappel : $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} dx$ pour $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$

12.1.2 et 12.1.4.

Par 12.1.1, en posant $a = -b$ ($b > 0$)

on trouve $\widehat{\chi_{[-b,b]}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\sin bt}{bt}$

D'autre part, f paire, réelle, $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ l'est aussi, et

la transformée de f = la transformée inverse de f

$L^1 \cap L^2$ étant dense en L^2, on peut tirer la même conclusion

pour les fonctions L^2. D'où, si on note $f(x) = \frac{2\sin bx}{bx}$,

$$\hat{f}(t) = \sqrt{2\pi}\, \chi_{[-b,b]}(t)$$

$$\Rightarrow \widehat{f * f}(t) = 2\pi\, \chi_{[-b,b]}(t)$$

$$\Rightarrow f * f(t) = \widehat{2\pi \chi_{[-b,b]}}(t)$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{2\sin bt}{bt}$$

après il suffit d'adjuster les constantes.

3 : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \| \frac{\sin x}{x} \|_2 = \| \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\chi}_{[-1,1]} \|_2 = \pi$.

(à comparer avec Exo 6.1.7)