Université Grenoble Alpes **Partiel**
mat 101 **10 nov. 2021**
durée : 2h00 **Exercice 1.—**

1. Écrire $\frac{1+2i}{5-i}$ sous forme algébrique.
2. Écrire $-2\sqrt{3}+2i$ sous forme polaire et le représenter dans le plan complexe.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\frac{z}{2})^3 = i$ et représenter les solutions dans le plan complexe.

Correction :

1. (1 pt) On a :

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{5-i} &= \frac{(1+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}\\ &= \frac{(5-2+i(10+1)))}{5^2+1^2}\\ &= \frac{3}{26}+i\frac{11}{26}\end{aligned}$$

2. (1pt + 0,5 pour le dessin) On a :

$$\begin{aligned}-2\sqrt{3}+2i &= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= 4e^{\frac{5i\pi}{6}}\end{aligned}$$

Une façon de bien placer ce point dans le plan est de remarquer que ce nombre est situé au point d'intersection d'abscisse négative entre le cercle de centre O et de rayon 4 et la droite d'équation $y = 2$.

3. (2 pt + 1 pour le dessin) On remarque que $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3$. Dans la suite, on note $\mathbb{U}_3$ l'ensemble des racines cubiques de l'unité, c'est à dire $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$. Pour tout z complexe,

$$\begin{aligned}(\frac{z}{2})^3 = i &\Leftrightarrow (\frac{z}{2})^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3\\ &\Leftrightarrow (\frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}})^3 = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_3\\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{4\pi}{3}}\}\\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{3\pi}{2}}\}\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$. Pour placer ces points dans le plan complexe, on peut remarquer qu'ils sont sur le cercle de centre O et de rayon 2, et on les place selon leurs arguments, ou bien on remarque que les deux premiers ont pour ordonnée 1 et le dernier est égal à $-2i$.

Exercice 2.—

1. Calculer les racines carrées du nombre complexe $3-i$, c'est-à-dire les nombres complexes δ vérifiant $\delta^2 = 3-i$.

   Correction : (Exo sur 3, q1 : 2pts, q2 : 1pt) On pose $\delta = x+iy$ avec x et y réels. On a :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = 3-i \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2+2ixy = 3-i \\ |\delta^2| = |3-i| \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2 = 3 \\ xy = -1 \\ x^2+y^2 = \sqrt{10} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 3+\sqrt{10} \\ 2y^2 = \sqrt{10}-3 \\ xy = -1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} |x| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \\ xy = -1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   Les solutions sont donc $\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{4}z^2 + 2z + (1+i) = 0$.

   Correction : On calcule le discriminant Δ du trinôme :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (1+i) = 3-i$$

   La première question nous fournit une racine carrée de Δ : $\delta = \sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$. Les solutions de l'équation sont alors :

$$z_1 = \frac{-2+\delta}{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2-\delta}{\frac{1}{2}}$$

   soit :

$$z_1 = -4 + \sqrt{6+2\sqrt{10}} - i\sqrt{2\sqrt{10}-6} \quad \text{et} \quad z_2 = -4 - \sqrt{6+2\sqrt{10}} + i\sqrt{2\sqrt{10}-6}$$

Exercice 3.— On définit une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2} \end{array}\right. .$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1,\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Correction : (Exo : 3 pts) On note $P(n)$ l'assertion « $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ ».

Initialisation : $P(1)$ est l'assertion $u_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Or $u_1 = \frac{u_0^2+1}{2} = \frac{0^2+1}{2} = \frac{1}{2}$. Ce nombre appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ donc $P(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On cherche à montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc :

$$1/2 \leq u_n < 1 \ . \tag{1}$$

Et on rappelle que $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$. Comme $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit :

$$(1/2)^2 \leq u_n^2 < 1^2 \ .$$

Puis

$$\frac{(1/2)^2+1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2} \ .$$

C'est-à-dire :

$$\frac{5}{8} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2}$$

Comme $\frac{5}{8} \geq \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$, on obtient que $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4.— On pose :

$$\mathcal{A} := \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \,|\, Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z')\} \ .$$

1. Montrer que $(1+2i, 3-2i) \notin \mathcal{A}$.

   Correction : (Exo : 7 pts) (q1 : 1pt) On constate que $Im(1+2i) = 2 > -2 = Im(3-2i)$ donc $(1+2i, 3-2i) \notin \mathcal{A}$.

2. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse (justifier) ?

   $$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ (z, z') \in \mathcal{A} \text{ ou } (z', z) \in \mathcal{A} \ .$$

   Correction : (q2 : 1pt) L'assertion est fausse. En effet, il existe des couples (z, z') tels que ni (z, z') ni (z', z) n'appartient à A. Pour donner un exemple, posons $(z, z') = (1+2i, 3-2i)$. La question précédente montre que $(z, z') \notin A$. De plus, $(z', z) = (3-2i, 1+2i)$. Or $Re(z') = 3 > 1 = Re(z)$. Donc $(z', z) \notin A$.

3. Montrer que

   $$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, \ ((z, z') \in \mathcal{A} \text{ et } (z', z'') \in \mathcal{A}) \Rightarrow (z, z'') \in \mathcal{A} \ .$$

   Correction : (q3 : 1,5pt) Soit $(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3$. Supposons que $(z, z') \in \mathcal{A}$ et $(z', z'') \in \mathcal{A}$. On a donc :

   $$Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z') \text{ et } Re(z') \leq Re(z'') \text{ et } Im(z') \leq Im(z'') \ .$$

   Notamment :

   $$Re(z) \leq Re(z') \leq Re(z'')$$

   donc

   $$Re(z) \leq Re(z'') \ . \tag{2}$$

   De même,

   $$Im(z) \leq Im(z') \leq Im(z'') \ ,$$

donc
$$Im(z) \leq Im(z'') \ . \tag{3}$$
De (5) et (6) on déduit que $(z, z'') \in \mathcal{A}$.
On a bien montré
$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, \ ((z, z') \in \mathcal{A} \text{ et } (z', z'') \in \mathcal{A}) \Rightarrow (z, z'') \in \mathcal{A} \ .$$

4. Montrer que
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \ ((z, z') \in \mathcal{A} \text{ et } (z', z) \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow z = z' \ .$$

Correction : (q4 : 1,5 pt) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a :
$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} (z, z') \in \mathcal{A} \\ (z', z) \in \mathcal{A} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z') \\ Re(z') \leq Re(z) \text{ et } Im(z') \leq Im(z) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re(z) \leq Re(z') \leq Re(z) \\ Im(z) \leq Im(z') \leq Im(z) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow z = z'
\end{aligned}$$

5. On pose
$$\mathcal{B} := \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \,|\, Re(z) + Im(z) \leq Re(z') + Im(z')\} \ .$$
Montrer que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Correction : (q5 : 1pt) Soit $(z, z') \in \mathcal{A}$. On a alors :
$$Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z') \ .$$
Donc,
$$Re(z) + Im(z) \leq Re(z') + Im(z') \ .$$
Donc $(z, z') \in \mathcal{B}$, ce qui montre que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

6. A-t-on $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (justifier) ?

Correction : (q6 : 1pt) En posant $(z, z') = (3 - 2i, 1 + 2i)$, on constate que :
$$Re(z) + Im(z) = 1 \leq 3 = Re(z') + Im(z')$$
donc $(z, z') \in \mathcal{B}$. Or, on a déjà vu dans la deuxième question que $(z, z') \notin \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

TSVP $\hookrightarrow$

Exercice 5.— *Dans cet exercice, on rappelle que si A et B sont deux ensembles, $A - B$ désigne l'ensemble des éléments appartenant à A, mais pas à B.*

Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Pour tout $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, on note $P(\mathcal{B})$ l'assertion suivante :

$$\forall x \in E, \exists A \in \mathcal{B}, x \in A$$

et $Q(\mathcal{B})$ l'assertion suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{B}, (x \in A) \text{ et } (y \in E - A)) .$$

1. Écrire la négation de $P(\mathcal{B})$.

   Correction : (Exo : 6 pts, q1 : 1pt)

   $$\exists x \in E, \forall A \in \mathcal{B}, x \notin A$$

2. Écrire la négation de $Q(\mathcal{B})$.

   Correction : (q2 : 1pt)

   $$\exists x \in E, \exists y \in E, \forall A \in \mathcal{B}, x \neq y \text{ et } (x \notin A \text{ ou } y \notin E - A)$$

   ou encore

   $$\exists x \in E, \exists y \in E, x \neq y \text{ et } (\forall A \in \mathcal{B}, (x \notin A \text{ ou } y \in A))$$

3. Dans cette question, on suppose que

   $$\mathcal{B} = \{E - \{x\}; x \in E\} .$$

   (a) Laquelle de ces expressions est une écriture de $\mathcal{B}$ en extension ?

   (A) $\mathcal{B} = \emptyset$

   (B) $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

   (C) $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$

   (D) $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{4\}\}$

   Correction : (q3 : 1pt) La (C)

   (b) $P(\mathcal{B})$ est-elle vraie ou fausse (justifier) ?

   Correction : (q4 : 1pt) $P(\mathcal{B})$ est vraie. En effet, $1 \in \{1, 3, 4\}$, $2 \in \{2, 3, 4\}$, $3 \in \{1, 3, 4\}$ et $4 \in \{1, 3, 4\}$.

   (c) $Q(\mathcal{B})$ est-elle vraie ou fausse (justifier) ?

   Correction : (q5 : 2 pts) $Q(\mathcal{B})$ est vraie. En effet, si x et y sont dans E, on sait par la définition de $\mathcal{B}$ que $E - \{y\}$ est dans $\mathcal{B}$. Si $x \neq y$, $x \in E - \{y\}$, et comme $E - (E - \{y\}) = \{y\}$, on a bien sûr $y \in E - (E - \{y\})$. Donc pour tous x et y dans E, en notant $A = E - \{y\}$, on a montré qu'il existe un ensemble A appartenant à $\mathcal{B}$ tel que

   $$x \neq y \Rightarrow ((x \in A) \text{ et } (y \in E - A)) .$$

FIN

Université Grenoble Alpes **Partiel**
mat 101 **10 nov. 2021**
duration : 2h00

Exercice 1.—

1. Write $\frac{1+2i}{5-i}$ in algebraic form.
2. Write $-2\sqrt{3}+2i$ in polar form and represent it in the complex plane.
3. Solve the equation $(\frac{z}{2})^3 = i$ and represent the solutions in the complex plane.

Correction :

1. (1 pt) We have :

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{5-i} &= \frac{(1+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} \\ &= \frac{(5-2+i(10+1)))}{5^2+1^2} \\ &= \frac{3}{26}+i\frac{11}{26} \end{aligned}$$

2. (1pt + 0,5 for the drawing) We have :

$$\begin{aligned} -2\sqrt{3}+2i &= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right) \\ &= 4e^{\frac{5i\pi}{6}} \end{aligned}$$

One simple way to place it in the complex plane is to notice that this number has negative abscissa and is located at the intersection of the circle of center O and radius 4 and the line of equation $y = 2$.

3. (2 pts + 1 for the drawing) Notice that $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3$. In the sequel, $\mathbb{U}_3$ denotes the set of cubic roots of unity, i.e $\mathbb{U}_3 = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\}$. For any complex number z,

$$\begin{aligned} (\frac{z}{2})^3 = i &\Leftrightarrow (\frac{z}{2})^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow (\frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}})^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} \in \mathbb{U}_3 \\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2\pi}{3}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{4\pi}{3}}\} \\ &\Leftrightarrow z \in \{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{3\pi}{2}}\} \end{aligned}$$

Then, the set of solutions is $\{2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, 2e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$. To place these points in the complex plane, we notice that they belong to the circle of center O and radius 2, and we place them according to their arguments, or we notice that the first two have ordinate 1 and the last one equals $-2i$.

Exercice 2.—

1. Compute the square roots of the complex number $3-i$, i.e the complex numbers δ such that $\delta^2 = 3-i$.

   Correction : (Exo sur 3, q1 : 2pts, q2 : 1pt) Let $\delta = x+iy$ with x and y real numbers. We have :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = 3-i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2+2ixy = 3-i \\ |\delta^2| = |3-i| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2 = 3 \\ xy = -1 \\ x^2+y^2 = \sqrt{10} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 = 3+\sqrt{10} \\ 2y^2 = \sqrt{10}-3 \\ xy = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}} \\ xy = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

   The solutions are thus $\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$ and $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$.

2. Solve in $\mathbb{C}$ the equation $\frac{1}{4}z^2 + 2z + (1+i) = 0$.

   Correction : Let us compute the discriminant of $z^2+2z+(1+i)$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (1+i) = 3-i$$

   The first question give us a square root of Δ : $\delta = \sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{2}}$. The roots of the equation are thus :

$$z_1 = \frac{-2+\delta}{\frac{1}{2}} \qquad \text{and} \qquad z_2 = \frac{-2-\delta}{\frac{1}{2}}$$

   i.e. :

$$z_1 = -4 + \sqrt{6+2\sqrt{10}} - i\sqrt{2\sqrt{10}-6} \quad \text{et} \quad z_2 = -4 - \sqrt{6+2\sqrt{10}} + i\sqrt{2\sqrt{10}-6}$$

Exercice 3.— Let us define a sequence $(u_n)_{n\geq 0}$ by :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2} \end{cases}.$$

Show by induction that :

$$\forall n \geq 1,\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Correction : (Exo : 3 pts) Let $P(n)$ be the assertion « $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ ».

Initialization : $P(1)$ is the assertion $u_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. But $u_1 = \frac{u_0^2+1}{2} = \frac{0^2+1}{2} = \frac{1}{2}$. This number belongs to the interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ thus $P(1)$ is satisfied.

Induction step : Let n be a positive natural number. We want to show that $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Suppose $P(n)$ holds. Thus :

$$1/2 \leq u_n < 1 \; . \tag{4}$$

And we recall that $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$. Since $x \mapsto x^2$ is increasing on $\mathbb{R}^+$,

$$(1/2)^2 \leq u_n^2 < 1^2 \; .$$

Then

$$\frac{(1/2)^2+1}{2} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2} \; ,$$

i.e.

$$\frac{5}{8} \leq \frac{u_n^2+1}{2} < \frac{1^2+1}{2} \; .$$

Since $\frac{5}{8} \geq \frac{1}{2}$ and $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$, we get that $P(n+1)$ holds.

Conclusion : By induction, we conlude that $P(n)$ holds for any $n \geq 1$.

Exercice 4.— Let

$$\mathcal{A} := \{(z,z') \in \mathbb{C}^2 \,|\, Re(z) \leq Re(z') \text{ and } Im(z) \leq Im(z')\} \; .$$

1. Show that $(1+2i, 3-2i) \notin \mathcal{A}$.

   Correction : (Exo : 7 pts) (q1 : 1pt) Notice that $Im(1+2i) = 2 > -2 = Im(3-2i)$, and thus $(1+2i, 3-2i) \notin \mathcal{A}$.

2. Is the following assertion true or false (justify) ?

   $$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \; (z,z') \in \mathcal{A} \text{ or } (z',z) \in \mathcal{A} \; .$$

   Correction : (q2 : 1pt) The assertion is false. Indeed, there are couples (z,z') such that neither (z,z') nor (z',z) belong to A. To give one concrete example, let $(z,z') = (1+2i, 3-2i)$. The previous question shows that $(z,z') \notin A$. Furthermore, $(z',z) = (3-2i, 1+2i)$. But $Re(z') = 3 > 1 = Re(z)$. Thus, $(z'z) \notin A$.

3. Show that

   $$\forall (z,z',z'') \in \mathbb{C}^3, \; ((z,z') \in \mathcal{A} \text{ and } (z',z'') \in \mathcal{A}) \Rightarrow (z,z'') \in \mathcal{A} \; .$$

   Correction : (q3 : 1,5pt) Let $(z,z',z'') \in \mathbb{C}^3$. Suppose that $(z,z') \in \mathcal{A}$ et $(z',z'') \in \mathcal{A}$. Thus :

   $$Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z') \text{ et } Re(z') \leq Re(z'') \text{ et } Im(z') \leq Im(z'')$$

   Notably :

   $$Re(z) \leq Re(z') \leq Re(z'')$$

   thus

   $$Re(z) \leq Re(z'') \; . \tag{5}$$

   In the same way,

   $$Im(z) \leq Im(z') \leq Im(z'')$$

   thus

   $$Im(z) \leq Im(z'') \tag{6}$$

From (5) and (6) we deduce that $(z, z'') \in A$.
We do have shown that

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3,\ ((z, z') \in \mathcal{A} \text{ et } (z', z'') \in \mathcal{A}) \Rightarrow (z, z'') \in \mathcal{A}\ .$$

4. Show that
$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ ((z, z') \in \mathcal{A} \text{ and } (z', z) \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow z = z'\ .$$

   Correction : (q4 : 1,5 pt) Let $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. We have :

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} (z, z') \in \mathcal{A} \\ (z', z) \in \mathcal{A} \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re(z) \leq Re(z') \text{ and } Im(z) \leq Im(z') \\ Re(z') \leq Re(z) \text{ and } Im(z') \leq Im(z) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re(z) \leq Re(z') \leq Re(z) \\ Im(z) \leq Im(z') \leq Im(z) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow z = z'
\end{aligned}$$

5. Let
$$\mathcal{B} := \{(z, z') \in \mathbb{C}^2 \mid Re(z) + Im(z) \leq Re(z') + Im(z')\}\ .$$
   Prove that $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

   Correction : (q5 : 1pt) Let $(z, z') \in \mathcal{A}$. Then,
$$Re(z) \leq Re(z') \text{ et } Im(z) \leq Im(z')$$
   Thus,
$$Re(z) + Im(z) \leq Re(z') + Im(z')$$
   Thus $(z, z') \in \mathcal{B}$, which shows that $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

6. Does it hold that $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (justify) ?

   Correction : (q6 : 1pt) Letting $(z, z') = (3 - 2i, 1 + 2i)$, we see that
$$Re(z) + Im(z) = 1 \leq 3 = Re(z') + Im(z')$$
   and thus $(z, z') \in \mathcal{B}$. But we already saw in the second question that $(z, z') \notin \mathcal{A}$. Thus $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

Please turn over $\hookrightarrow$

Exercice 5.— *In this exercise, we recall that if A and B are two sets, $A - B$ is the set of elements which belong to A, but not to B.*

Let $E = \{1, 2, 3, 4\}$. We denote by $\mathcal{P}(E)$ the set of all the subsets of E. For any $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, we let $P(\mathcal{B})$ be the following assertion :

$$\forall x \in E,\ \exists A \in \mathcal{B},\ x \in A$$

and $Q(\mathcal{B})$ be the following assertion :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x \neq y \Rightarrow (\exists A \in \mathcal{B}, (x \in A) \text{ and } (y \in E - A))\ .$$

1. Write the negation of $P(\mathcal{B})$.

   Correction : (Exo : 6 pts, q1 : 1pt)

   $$\exists x \in E,\ \forall A \in \mathcal{B},\ x \notin A$$

2. Write the negation of $Q(\mathcal{B})$.

   Correction : (q2 : 1pt)

   $$\exists x \in E,\ \exists y \in E,\ \forall A \in \mathcal{B},\ x \neq y \text{ and } (x \notin A \text{ or } y \notin E - A)$$

   ou encore

   $$\exists x \in E,\ \exists y \in E,\ \forall A \in \mathcal{B},\ x \neq y \text{ and } (x \notin A \text{ or } y \in A)$$

3. In this question, we suppose that

   $$\mathcal{B} = \{E - \{x\}; x \in E\}\ .$$

   (a) Which one of the following expressions is a writing of $\mathcal{B}$ by enumeration ?

   (A) $\mathcal{B} = \emptyset$

   (B) $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset\}$

   (C) $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$

   (D) $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{4\}\}$

   Correction : (q3 : 1pt) (C)

   (b) Is $P(\mathcal{B})$ true or false (justify) ?

   Correction : (q4 : 1pt) $P(\mathcal{B})$ holds. Indeed, $1 \in \{1, 3, 4\}$, $2 \in \{1, 2, 4\}$, $3 \in \{1, 3, 4\}$ and $4 \in \{1, 3, 4\}$.

   (c) Is $Q(\mathcal{B})$ true or false (justify) ?

   Correction : (q5 : 2 pts) $Q(\mathcal{B})$ is true. Indeed, if x and y belong to E, we know by the very definition of $\mathcal{B}$ that $E - \{y\}$ belongs to $\mathcal{B}$. If $x \neq y$, $x \in E - \{y\}$, and since $E - (E - \{y\}) = \{y\}$, we have $y \in E - (E - \{y\})$. Thus for any x and y in E, letting $A = E - \{y\}$, we have shown that there exists a set A in $\mathcal{B}$ such that

   $$x \neq y \Rightarrow ((x \in A) \text{ et } (y \in E - A))\ .$$

END