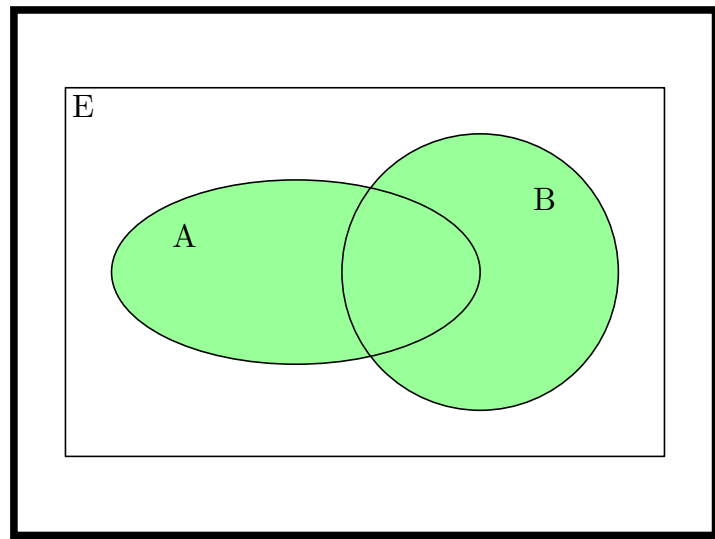


Université Grenoble Alpes

UE MAT101

Langage mathématique
Algèbre et géométrie élémentaires



Portail Informatique, Mathématiques et
Applications

13 septembre 2022

TABLE DES MATIÈRES

Auteurs	5
Avertissement au lecteur	7
Programme	9
1. Nombres complexes	11
Cours.....	11
1.1. Définition des nombres complexes.....	12
1.2. Formes trigonométrique et exponentielle.....	16
1.3. Polynômes.....	19
1.4. Rappels de logique élémentaire.....	21
1.5. Équations polynomiales complexes.....	22
1.6. Géométrie du plan complexe : vecteurs, distances et angles.....	28
1.7. Rédaction.....	29
Exercices.....	30
2. Ensembles et langage mathématique	37
Cours.....	37
2.1. Ensembles.....	37
2.2. Assertions.....	44
2.3. Valeurs de vérité et tables de vérité.....	47
2.4. Quantificateurs.....	49
2.5. Implication et raisonnement déductif.....	52
2.6. Autres modes de raisonnement.....	56
Exercices.....	61

3. Fonctions et dénombrement	71
Cours.....	71
3.1. Fonctions, suites.....	71
3.2. Sommes et produits.....	80
3.3. Dénombrement.....	84
3.4. Trois formules à connaître.....	87
Exercices.....	93
4. Limites de suites	105
Cours.....	105
4.1. Compléments sur les nombres réels.....	105
4.2. Définition de la limite d'une suite.....	107
4.3. Opérations sur les limites.....	112
Exercices.....	116
Glossaire	121
Index	123

AUTEURS

De nombreuses personnes ont contribué au contenu de ce polycopié, qui a été modifié au fil des ans (Bernard Ycart, Agnès Coquio, Eric Dumas, Emmanuel Peyre, Pierre Dehornoy, Raphaël Rossignol et d'autres ...).

Le dernier responsable en date est Raphaël Rossignol, à qui reproches et remarques peuvent être adressés¹.

1. Vous trouverez son adresse mail sur le web, cf. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/rossigno/>

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Ce polycopié est destiné aux étudiants de l'Unité d'Enseignement MAT101. Cette unité d'enseignement est obligatoire pour les étudiants entrant en première année de licence à l'Université Grenoble Alpes par le portail Informatique, Mathématiques et Applications.

Ce polycopié est un outil pédagogique qui vient *compléter* le cours. Le point de vue du cours et celui du polycopié peuvent différer, offrant deux façons d'aborder une même notion mathématique.

Les chapitres de ce texte se décomposent de la façon suivante :

1. Le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des résultats principaux. Les démonstrations données doivent être *comprises*. Elles servent de modèle pour les exercices de raisonnement. C'est en comprenant les démonstrations, qu'on apprend à en rédiger. La plupart des démonstrations sont à connaître. Quelques-unes sont particulièrement compliquées : il est plus important de les comprendre que de les apprendre par cœur.
2. La partie Exercices comprend des exercices dont la difficulté est évaluée avec une, deux ou trois *. Les exercices (*) sont censés être faciles, en général pour vérifier que les notions importantes sont comprises. Les exercices (**) sont de difficulté moyenne, c'est en général le niveau attendu à l'examen. Les exercices (***) sont plus difficiles, certains sont destinés aux étudiants les plus intéressés. Un certain nombre d'exercices seront traités en travaux dirigés. Un certain nombre de solutions d'exercices seront aussi disponibles en ligne, sur le site du cours.

Par ailleurs, le site web du cours² contient les annales des années précédentes. Attention néanmoins, le programme a évolué à la fois pour se rapprocher de ce qui est vu

2. <https://cours.univ-grenoble-alpes.fr/course/view.php?id=11798>

au lycée, et pour se concentrer sur des notions qui nous semblent fondamentales. Certains exercices d'annales sont donc hors-programme désormais, et, à l'inverse, certains exercices pourraient apparaître qui ne ressemblent pas à des exercices d'annales. Néanmoins les annales sont corrigées, ce qui permettra aux étudiants de voir des exemples de rédactions satisfaisantes.

PROGRAMME

Pré-requis pour cette UE : Programme de « Spécialité Mathématiques » du lycée, classes de Première et Terminale.

Programme résumé :

A – Langage mathématique et notion de raisonnement.

- Vocabulaire de la théorie naïve des ensembles, ensemble, appartenance, complémentaire, intersection, réunion, inclusion, égalité, égalité de couples, de n -uplets.
- Éléments de logique : Logique de base, conjonction, disjonction, négation en termes de tables de vérité. Le sens de l'implication, de l'équivalence.
- Exemples de raisonnements : raisonnement direct, raisonnement par l'absurde, par disjonction de cas, raisonnement par récurrence, avec des exemples tirés du secondaire.
- Fonctions et applications : domaine de départ et d'arrivée, domaine de définition, graphe, image directe, image réciproque, composition, injections, surjections, bijections, notion de cardinal dans le cas fini (factorielle, coefficients binômiaux).
- Utilisation des quantificateurs : sens de « quel que soit », « il existe », illustration sur la définition de la limite d'une suite, opérations élémentaires sur les limites.

B– Les bases du calcul algébrique dans \mathbf{R} et \mathbf{C}

- Révisions sur les nombres entiers, rationnels et réels. Intervalles de \mathbf{R} . Manipulation d'inégalités.
- Nombres complexes : forme algébrique, addition, multiplication, conjugaison, norme, forme polaire, interprétation géométrique des nombres complexes, les formules d'Euler et de Moivre (formules d'addition pour cos et sin), racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes.
- Manipulation des symboles \sum et \prod illustrée par les formules à connaître : identités remarquables, formule du binôme de Newton, somme des premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Preuve d'identités par récurrence. Fonctions polynomiales.

Compétences visées :

Ce cours est destiné à tous les étudiants qui s'engagent vers l'informatique ou les mathématiques. Il couvre les pré-requis fondamentaux pour ces deux champs disciplinaires. En ce qui concerne la partie logique et langage mathématique, l'objectif est le renforcement des connaissances relatives aux règles de la logique, de la rigueur du raisonnement mathématique et de sa rédaction.

Les objets élémentaires manipulés sont les ensembles de nombres usuels (entiers, rationnels, réels, complexes). On manipulera également les ensembles et fonctions de manière abstraite, notamment dans le but gagner en familiarité avec la généralité de certains raisonnements.

Pour la partie B, le but est l'apprentissage des notions de base d'algèbre et de géométrie du plan complexe, indispensables pour les cours de physique, de mathématiques et d'informatique.

Les compétences à acquérir sont la capacité à rédiger un raisonnement élémentaire de manière claire et rigoureuse, la maîtrise de la notion d'ensemble et de fonction, la capacité à utiliser les quantificateurs dans des situations simples et la maîtrise des nombres complexes (algébrique et géométrique).

Nombres complexes

Cours

Avant d'introduire les nombres complexes, rappelons quelques notations concernant les ensembles classiques de nombres³.

\mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est à dire l'ensemble constitué des nombres 0, 1, 2 etc. \mathbf{N}^* désigne l'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0.

\mathbf{Z} désigne l'ensemble des entiers relatifs, c'est à dire l'ensemble constitué des nombres entiers naturels et de leurs opposés : 0, 1, -1 , 2, -2 , etc.

\mathbf{Q} désigne l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble constitué des quotients de nombres entiers relatifs. C'est l'ensemble constitué de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q des entiers relatifs, q étant supposé non nul.

\mathbf{R} désigne l'ensemble des nombres réels. De manière informelle, vous les connaissez comme des nombres admettant un développement décimal (fini avant la virgule, fini ou infini après la virgule). La notion de développement décimal infini mérite une introduction rigoureuse, mais ne sera pas traitée dans ce cours⁴.

Les ensembles ci-dessus sont rangés du plus petit au plus grand. Par exemple, tout entier naturel est également un entier relatif. On dit que \mathbf{N} est inclus dans \mathbf{Z} , ou encore que \mathbf{Z} contient \mathbf{N} , et si on souhaite noter cela de manière symbolique, on note $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$. De même, \mathbf{Z} est inclus dans \mathbf{Q} , et \mathbf{Q} est inclus dans \mathbf{R} .

De plus, \mathbf{Z} n'est pas inclus dans \mathbf{N} , de même, \mathbf{Q} n'est pas inclus dans \mathbf{Z} et \mathbf{R} n'est pas inclus dans \mathbf{Q} . En effet, on peut voir par exemple que -1 est dans \mathbf{Z} mais pas dans \mathbf{N} , que $\frac{1}{2}$ est dans \mathbf{Q} mais pas dans \mathbf{Z} et que $\sqrt{3}$ est dans \mathbf{R} mais pas dans \mathbf{Q} .

3. Nous reviendrons de manière plus rigoureuse dans le chapitre 2 sur la notion d'ensemble et les constructions associées.

4. Une définition propre des nombres réels peut s'obtenir de différentes manières. Deux constructions très classiques sont la construction à partir des suites de Cauchy de nombres rationnels, et celle à partir des coupures de Dedekind. Ces notions seront accessibles plus tard dans votre cursus.

Dans la suite, on introduit un nouvel ensemble de nombres, noté \mathbf{C} qui contient \mathbf{R} et n'est pas inclus dans \mathbf{R} .

1.1. Définition des nombres complexes. — Les nombres complexes sont nés de la nécessité de donner un sens à la racine carrée de nombres négatifs, pour résoudre les équations algébriques. Dans l'ensemble des réels, l'équation $x^2 = 1$ a deux solutions, $+1$ et -1 , mais l'équation $x^2 = -1$ n'en a pas, puisque le carré de tout nombre réel est positif ou nul. Les nombres complexes naissent en ajoutant une solution à l'équation $x^2 = -1$. Le miracle est qu'avec ce seul ajout, tous les polynômes complexes ont alors des racines.

Définition 1.1

On définit un nombre i (imaginaire) qui satisfait l'équation $i^2 = -1$.

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme $z = a + ib$, où a et b sont deux réels quelconques. Le réel a est appelé *partie réelle* de z , notée $\operatorname{Re}(z)$, et le réel b est appelé *partie imaginaire* de z , notée $\operatorname{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté \mathbf{C} .

L'addition et la multiplication des réels s'étendent aux nombres complexes sans difficulté particulière⁵.

- *addition* : $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$,
- *multiplication* : $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$.

Remarquons que la formule donnant l'addition de deux nombres complexes revient à dire que pour deux nombres complexes z_1 et z_2 ,

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

On représente ces nombres par les points d'un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'axe horizontal porte les réels (qui sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle). L'axe vertical porte les nombres dits imaginaires purs, ceux dont la partie réelle est nulle. Le point correspondant au nombre $a + ib$ est placé à la verticale du réel a et à l'horizontale de l'imaginaire pur ib (figure 1). On dit que le nombre $a + ib$ est l'*affiche* du point qui le représente. Le point d'affixe 0 est l'*origine*, et on le note O .

⁵. Pour procéder rigoureusement, il faudrait vérifier que nous n'introduisons pas de contradiction avec ces opérations. Nous laissons cela en exercice.

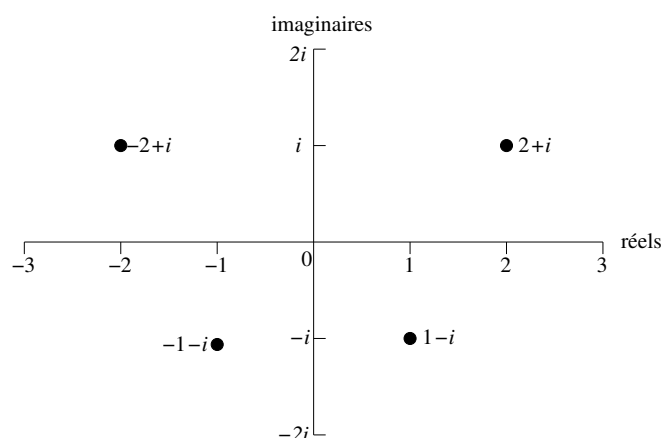


FIGURE 1. Le plan complexe.

Pour définir l'argument d'un nombre complexe, on admet l'existence des deux fonctions *sinus* et *cosinus*, définies de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , 2π -périodiques, \sin étant impaire et \cos paire, satisfaisant $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$, et satisfaisant la règle usuelle de géométrie : si ABC est un triangle rectangle en B tel que l'angle en A mesuré en radians vaut $\theta \in [0, \pi/2]$, alors on a $AB = AC \times \cos(\theta)$ et $BC = AC \times \sin(\theta)$.

Définition 1.2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle

1. *module de z* le nombre réel positif ou nul $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.
2. *argument de z si z est non nul* tout réel θ tel que $\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta)$ et $\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta)$. On le note $\arg(z)$. Il est donc défini à 2π près.
3. *conjugué de z* le nombre complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. On le note \bar{z} .

$$\bar{z} = a - ib .$$

Dans le plan complexe, le module est la longueur du segment joignant l'origine au point représentant z . Un argument est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et ce segment, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (le sens trigonométrique). Le conjugué est le symétrique par rapport à l'axe horizontal des réels (figure 2).

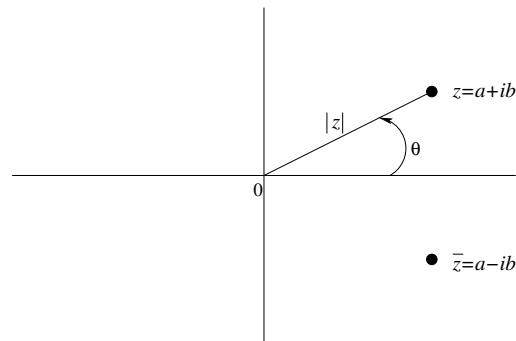


FIGURE 2. Module, argument et conjugué d'un nombre complexe.

Observez qu'un nombre et son conjugué ont le même module et que leur produit est le carré de ce module.

$$z \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2 .$$

Il est fréquent dans les calculs d'utiliser un conjugué pour simplifier le résultat et le mettre sous la forme $a + ib$. Si z_1 et z_2 sont deux complexes, leur quotient s'écrit :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} .$$

Voici un exemple.

$$\frac{1 + 2i}{1 + i} = \frac{(1 + 2i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 + i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} .$$

Le conjugué et le module vérifient des relations remarquables.

Proposition 1.3

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Démonstration. — Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On note $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, a_2, b_1 et b_2 des réels.

1. On a :

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Donc la partie imaginaire de $z_1 + z_2$ est $b_1 + b_2$ et sa partie réelle est $a_1 + a_2$ (Cela avait déjà été remarqué plus haut dans le cours). Donc par définition du conjugué,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \operatorname{Re}(z_1 + z_2) - i \operatorname{Im}(z_1 + z_2) \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{aligned}$$

2. On a :

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Donc $z_1 z_2$ a pour partie réelle $a_1 a_2 - b_1 b_2$ et pour partie imaginaire $a_1 b_2 + a_2 b_1$.
Donc par définition du conjugué,

$$\overline{z_1 z_2} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

De plus,

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= a_1 a_2 - ib_1 a_2 - ia_1 b_2 - b_1 b_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Donc $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$.

3. On a vu que

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Donc

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 \end{aligned}$$

Et d'un autre côté,

$$\begin{aligned} (|z_1| \cdot |z_2|)^2 &= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \\ &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 \end{aligned}$$

Donc $|z_1 z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2$. Comme $|z_1 z_2|$ et $|z_1| \cdot |z_2|$ sont tous les deux positifs ou nuls, et que leurs carrés sont égaux, $|z_1 z_2|$ et $|z_1| \cdot |z_2|$ sont égaux.

□

Remarque 1.4. — Remarquons qu'un nombre complexe est nul si et seulement si son module est nul. Le point 3 de la proposition précédente implique alors que le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un des termes du produit est nul.

1.2. Formes trigonométrique et exponentielle. — Dans la définition suivante, on utilise la fonction exponentielle \exp dont l'existence a été admise au lycée : c'est l'unique fonction dérivable de \mathbf{R} dans \mathbf{R}_+^* qui vaut 1 en 0 et est égale à sa dérivée. De plus, elle satisfait, pour tous les réels x et x' ,

$$\exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x') .$$

Définition 1.5

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *exponentielle complexe de z* et on note e^z (ou $\exp(z)$) le nombre complexe :

$$e^z = e^a (\cos(b) + i \sin(b)) ,$$

où e^a est l'exponentielle réelle de a .

Observez que l'exponentielle complexe coïncide avec l'exponentielle réelle si la partie imaginaire est nulle. Si la partie réelle a est nulle, le nombre $e^{ib} = \cos(b) + i \sin(b)$ est un nombre complexe de module 1 (car $\cos^2(b) + \sin^2(b) = 1$). Observez que le conjugué d'un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ est : $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$, et un argument de \bar{z} est $-\theta$.

Dans le cas général, le module de e^{a+ib} est e^a et b est un argument (les autres étant les nombres de la forme $b + 2k\pi$, avec $k \in \mathbf{Z}$).

La périodicité modulo 2π des fonctions sinus et cosinus induit la périodicité modulo $2i\pi$ de l'exponentielle complexe : pour tout réel b et pour tout entier k ,

$$e^{ib} = e^{i(b+2k\pi)}$$

Ainsi,

$$e^{2k\pi i} = 1 , \quad e^{(2k+1)\pi i} = -1 , \quad e^{(\pi/2+2k\pi)i} = i , \quad e^{(-\pi/2+2k\pi)i} = -i .$$

Remarquons que si z est un nombre complexe non nul, que $\rho = |z|$ et θ est un argument de z , alors d'après la définition de l'argument, $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ et donc

$z = \rho e^{i\theta}$. La première écriture est appelée forme polaire (ou trigonométrique) et la seconde est appelée forme exponentielle⁶.

Définition 1.6

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On note ρ le module de z et θ un argument de z . On appelle *forme exponentielle* de z l'écriture de z sous la forme

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

On appelle *forme polaire (ou trigonométrique)* de z l'écriture de z sous la forme

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Voici quelques exemples.

nombre	module	argument	forme exponentielle	conjugué
i	1	$\pi/2$	$e^{i\pi/2}$	$-i$
$1 + i$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}e^{i\pi/4}$	$1 - i$
$-1 + i$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$	$-1 - i$
$1 + i\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$2e^{i\pi/4}$	$1 - i\sqrt{3}$
$\sqrt{3} - i$	2	$11\pi/6$	$2e^{i11\pi/6}$	$\sqrt{3} + i$
$-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$2\pi/3$	$2\sqrt{2}e^{i2\pi/3}$	$-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$

L'exponentielle complexe conserve la propriété fondamentale de l'exponentielle réelle qui est de transformer les sommes en produits.

Théorème 1.7 (multiplicativité de l'exponentielle complexe)

Soient z et z' deux nombres complexes. On a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Démonstration. — Posons $z = a + ib$ et $z' = c + id$. Par définition de l'exponentielle,

$$e^{z+z'} = e^{(a+c)+i(b+d)} = e^{a+c} (\cos(b+d) + i \sin(b+d)).$$

6. Parfois, on appelle également forme polaire la forme exponentielle.

D'autre part,

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \left(e^a (\cos(b) + i \sin(b)) \right) \left(e^c (\cos(d) + i \sin(d)) \right) \\ &= e^{a+c} (\cos(b) + i \sin(b)) (\cos(d) + i \sin(d)), \end{aligned}$$

car $e^a e^c = e^{a+c}$ (propriété de l'exponentielle réelle). Les formules trigonométriques suivantes sont supposées connues :

$$\cos(b+d) = \cos(b)\cos(d) - \sin(b)\sin(d) \quad \text{et} \quad \sin(b+d) = \sin(b)\cos(d) + \cos(b)\sin(d).$$

On en déduit immédiatement que :

$$(\cos(b) + i \sin(b)) (\cos(d) + i \sin(d)) = \cos(b+d) + i \sin(b+d).$$

□

Le fait que $e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx)$ conduit à la *formule de Moivre* (ou de “De Moivre”) :

Corollaire 1.8 (Formule de Moivre)

Pour tout x dans \mathbf{R} et n dans \mathbf{N} , on a

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Cette formule est utile pour exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$. Voici un exemple.

$$\begin{aligned} \cos(2x) + i \sin(2x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^2 \\ &= \cos^2(x) + 2i \cos(x) \sin(x) + i^2 \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) + i2 \cos(x) \sin(x) \\ &= (2 \cos^2(x) - 1) + i(2 \cos(x) \sin(x)) \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x).$$

Les fonctions sinus et cosinus s'expriment à l'aide de l'exponentielle complexe par les *formules d'Euler*. Celles-ci découlent simplement de la définition $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 1.9 (formules d'Euler)

Soit θ un nombre réel. Alors on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

On les utilise pour *linéariser* des puissances de sinus et cosinus, afin de calculer leurs primitives. Voici un exemple.

$$\begin{aligned} \sin^4(x) \cos^6(x) &= \frac{1}{2^{10}} (e^{ix} - e^{-ix})^4 (e^{ix} + e^{-ix})^6 \\ &= \frac{1}{1024} (e^{2ix} - e^{-2ix})^4 (e^{ix} + e^{-ix})^2 \\ &= \frac{1}{1024} (e^{8ix} - 4e^{4ix} + 6 - 4e^{-4ix} + e^{-8ix})(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{1024} (e^{10ix} - 4e^{6ix} + 6e^{2ix} - 4e^{-2ix} + e^{-6ix} \\ &\quad + 2e^{8ix} - 8e^{4ix} + 12 - 8e^{-4ix} + 2e^{-8ix} \\ &\quad + e^{6ix} - 4e^{2ix} + 6e^{-2ix} - 4e^{-6ix} + e^{-10ix}) \\ &= \frac{1}{512} (6 + 2 \cos(2x) - 8 \cos(4x) - 3 \cos(6x) + 2 \cos(8x) + \cos(10x)) \end{aligned}$$

D'où une primitive de $\sin^4(x) \cos^6(x)$:

$$\frac{3x}{256} + \frac{\sin(2x)}{512} - \frac{\sin(4x)}{256} - \frac{\sin(6x)}{1024} + \frac{\sin(8x)}{2048} + \frac{\sin(10x)}{5120}.$$

L'observation de la parité permet de prévoir a priori que la linéarisation ne contiendra que des $\cos(kx)$. En effet, $\sin(x)$ est une fonction impaire et $\cos(x)$ une fonction paire. Donc si on remplace x par $-x$, $\sin^n(x) \cos^m(x)$ sera inchangé si n est pair, changé en son opposé si n est impair. Dans le premier cas, la linéarisation ne contiendra que des cosinus, dans le second cas, elle ne contiendra que des sinus.

1.3. Polynômes. — Les fonctions affines

$$\begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow \mathbf{C} \\ z & \mapsto az + b \end{cases}$$

où a et b sont des nombres complexes fixés, sont les exemples les plus simples de fonctions de \mathbf{C} dans \mathbf{C} .⁷

7. Nous reviendrons plus en détail sur la notion de fonction dans le chapitre 3.

En ajoutant et multipliant un nombre fini de fonctions affines, on obtient les fonctions polynômes.

Définition 1.10

Une fonction P de \mathbf{C} dans \mathbf{C} est appelée *fonction polynôme à coefficients dans \mathbf{C}* s'il existe un entier naturel d et des éléments $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbf{C}$ tels que pour tout z complexe,

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_dz^d.$$

Par un léger abus, on dit dans ce cas que $P(z)$ est un polynôme en z .^a

Lorsque a_d est différent de 0, le nombre d est appelé *degré* du polynôme P , noté $\deg(P)$. Dans ce cas, le nombre a_d est appelé *coefficient dominant* de P .

Si tous les coefficients sont nuls, alors P est appelé *polynôme nul*. Par convention il est de degré $-\infty$.

a. En fait le polynôme est la somme formelle $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_dz^d$ où z est une indéterminée, mais cette distinction est sans importance pour cette année.

Lorsqu'on impose que les coefficients a_0, a_1, \dots, a_d soient réels (*resp.* rationnels, *resp.* entiers relatifs), on dit que le polynôme est à coefficients dans \mathbf{R} (*resp.* \mathbf{Q} , *resp.* \mathbf{Z}).

Lorsque $P(z)$ est simplement de la forme a_dz^d , on dit que P est un *monôme*. Un polynôme est donc une somme d'un nombre fini de monômes.

Exemples 1.11. — Tous les exemples ci-dessous sont des fonctions de \mathbf{C} dans \mathbf{C} .

$x \mapsto x^2 - 1$ est une fonction polynôme, à coefficients entiers, de degré 2.

$y \mapsto y^3 - \pi y + \sqrt{2}$ est une fonction polynôme, à coefficients réels, de degré 3.

$x \mapsto 5x^4$ est une fonction monôme, à coefficient entier, de degré 4.

Les polynômes de degré 0 ou $-\infty$ sont les fonctions constantes.

Comme nous le rappellerons dans le chapitre 2, que la variable soit x , y ou n'importe quelle autre lettre n'a pas d'importance. Ce qui importe c'est qu'un polynôme est une fonction qui prend une variable et rend un nombre, en ne faisant intervenir que des additions et des multiplications.

Définition 1.12

Étant donné P un polynôme à coefficients dans \mathbf{C} , un nombre a dans \mathbf{C} tel que $P(a) = 0$ est appelé *racine* de P .

Exemple 1.13. — $x^2 - 1$ est un polynôme en x qui a deux racines dans \mathbf{Z} , à savoir les nombres 1 et -1 .

$x^2 - 2$ est un polynôme en x qui n'a pas de racine dans \mathbf{Z} ni dans \mathbf{Q} , mais qui a deux racines dans \mathbf{R} , à savoir les nombres $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

$x^2 + 1$ est un polynôme en x qui n'a aucune racine ni dans \mathbf{Z} , ni dans \mathbf{Q} , ni dans \mathbf{R} .

1.4. Rappels de logique élémentaire. — Rappelons un peu de vocabulaire, que vous avez déjà vu au lycée, et qui nous aidera à résoudre rigoureusement les équations polynomiales à coefficients complexes. Nous reviendrons plus en détail sur le langage mathématique dans le chapitre 2.

Une *assertion* est une affirmation mathématique ne mettant en jeu que des objets mathématiques.

Lorsque P et Q sont des assertions, $P \Rightarrow Q$ est une nouvelle assertion, qui signifie « si P est vraie, alors Q est vraie ».

Enfin, $P \iff Q$ signifie $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$, ce qu'on peut également exprimer par « P est vraie si et seulement si Q est vraie ».

Si A est un polynôme à coefficients complexes, la phrase suivante :

« Résoudre une équation du type $A(z) = 0$ en l'inconnue z complexe. »

signifie « Trouver exactement tous les nombres complexes z qui vérifient $A(z) = 0$. »

Ainsi,

— si on montre que

$$A(z) = 0 \Leftrightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 1 + i),$$

on peut bien en déduire que 1 et $1 + i$ sont exactement toutes les solutions complexes de l'équation " $A(z) = 0$ ",

— si on montre que

$$A(z) = 0 \Rightarrow (z = 1 \text{ ou } z = 1 + i),$$

alors on sait que "si z est une solution, alors cette solution est soit 1 soit $1 + i$ ". Cela ne montre pas que 1 et $1 + i$ sont solutions, mais qu'il ne peut y avoir d'autres solutions que ces nombres-là,

— si on montre que

$$(z = 1 \text{ ou } z = 1 + i) \Rightarrow A(z) = 0 ,$$

alors on sait que 1 et $1 + i$ sont des solutions de l'équation " $A(z) = 0$ ". Cela ne montre pas que ce sont les seules solutions.

Il est donc extrêmement important, lorsque que vous manipulez une équation, d'expliquer (et de justifier si nécessaire) les liens logiques (implication dans un sens ou dans l'autre, équivalence) entre les différentes assertions que vous écrivez.

1.5. Équations polynomiales complexes. — Soient a, b, c trois réels. L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions, éventuellement complexes.

1. si $b^2 - 4ac > 0$ l'équation admet deux solutions réelles,

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ;$$

2. si $b^2 - 4ac = 0$ l'équation admet une solution réelle « double »,

$$r = \frac{-b}{2a} ;$$

3. si $b^2 - 4ac < 0$ l'équation admet deux solutions complexes,

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} .$$

Ce résultat n'est pas étonnant, et vous le connaissez déjà. Le miracle est que les complexes permettent de résoudre non seulement les équations du second degré, mais toutes les équations algébriques quel que soit leur degré. Le théorème suivant a été énoncé par d'Alembert en 1746. Plusieurs preuves ont été par la suite proposées, mais contenaient toutes des trous. Une preuve presque complète a été proposée par Gauss en 1799, mais elle contenait encore un trou, comblé en 1920 par Ostrowki. La première preuve complète est due à Argand en 1806. Il est partout connu comme le *théorème fondamental de l'algèbre*.

Théorème 1.14 (D'Alembert-Gauss)

(Admis) Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. Le polynôme P est un produit de n facteurs de degré 1, à coefficients dans \mathbf{C} .

De manière équivalente, si P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes, il existe un nombre complexe a différent de 0 et n complexes z_1, \dots, z_n tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$:

$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) .$$

En d'autres termes, l'équation $P(z) = 0$ a toujours n solutions ; certaines solutions peuvent être multiples, et elles sont comptées avec leur ordre de multiplicité.

Remarque 1.15. — Une conséquence de ce résultat est que si on connaît n racines deux à deux distinctes d'un polynôme de degré n , alors celui-ci n'a pas d'autre racine.⁸

Concrètement, peut-on trouver les racines d'un polynôme à coefficients complexes ? S'il est de degré 2, 3, ou 4, la réponse est oui. Pour le degré 2, c'est assez simple à voir.

La première chose à remarquer est que si Δ est un nombre complexe, alors il existe toujours un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. En effet, si $\Delta = 0$, on peut prendre $\delta = 0$. Et si $\Delta \neq 0$, en écrivant Δ sous forme polaire, $\Delta = \rho e^{i\theta}$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$. On dit que δ est une racine carrée complexe de Δ . Mais attention, il est important de comprendre que pour un nombre complexe Δ qui n'est pas un réel positif, il ne faut pas écrire $\sqrt{\Delta}$. En effet, pour un nombre réel positif x , \sqrt{x} est défini comme le nombre positif dont le carré vaut x . Mais pour un nombre complexe qui n'est pas un réel positif Δ , aucun nombre positif n'a de carré qui vaut Δ . Il y a bien deux nombres complexes dont le carré fait Δ , mais il n'y a pas de manière suffisamment naturelle de les distinguer. On conservera donc l'idée que le symbole $\sqrt{\quad}$ désigne la fonction racine carrée définie de \mathbf{R}_+ dans \mathbf{R}_+ , et on ne l'appliquera pas à des nombres qui ne sont pas des nombres complexes.

Maintenant que l'on sait qu'un nombre complexe admet toujours au moins une racine carrée complexe, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème 1.16

Soit a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Notons δ un nombre complexe satisfaisant $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Alors le polynôme du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c$ a pour racines

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} .$$

8. Il n'y a pas besoin du théorème de D'Alembert-Gauss pour démontrer cela, c'est une conséquence de la division euclidienne des polynômes.

et a pour factorisation :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé *discriminant* du polynôme.

Démonstration. — On a, pour tout z complexe :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{2b}{2a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(z^2 + \frac{2b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \right) \\ &= a(z - z_1)(z - z_2) \end{aligned}$$

On en déduit la factorisation annoncée. De plus, un produit est nul si et seulement si l'un de ses termes est nul. Donc (on rappelle que a est non nul) :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow (z - z_1) = 0 \text{ ou } (z - z_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = z_1 \text{ ou } z = z_2 \end{aligned}$$

ce qui donne les racines de $az^2 + bz + c$. □

Il reste une étape à combler pour pouvoir écrire les racines d'un polynôme du second degré, à savoir calculer un nombre δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Nous avons vu que lorsque Δ est donné sous forme polaire, $\Delta = \rho e^{i\theta}$, on peut prendre $\delta = \sqrt{\rho} e^{i\frac{\theta}{2}}$. Si on souhaite obtenir une écriture algébrique de δ à partir d'une écriture algébrique de Δ , c'est un peu plus compliqué, la méthode de calcul ci-dessous y répond.

Remarque 1.17. — *Calcul des racines carrées* : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec a et b réels. On veut trouver les nombres complexes $\delta = x + iy$ tels que $\delta^2 = z$.

Comme $|\delta|^2 = |z|$, on a :

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

En sommant les deux premières équations, on obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2},$$

et en soustrayant les deux premières équations, on obtient

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta^2 = z &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque que le signe de xy est donné par celui de b . Notons $\varepsilon = 1$ si ce signe est positif et $\varepsilon = -1$ si ce signe est négatif. On a donc :

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \text{ et } y = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \text{ et } y = -\varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \end{cases} \\ \text{et} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Il y a donc au plus deux solutions pour le couple (x, y) , qui sont données par la première ligne du dernier système. Comme le théorème 1.16 nous assure qu'il y a exactement

deux racines, on en déduit que la seconde ligne de ce système est automatiquement vérifiée⁹. Donc :

$$\delta^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ et } y = -\varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \end{cases}$$

Il est plus intéressant de ne pas essayer de se souvenir de ce résultat par cœur, mais de savoir reproduire le raisonnement.

Pour les équations de degré 3 et 4, des méthodes et des formules générales existent, mais elles sont compliquées. À partir du degré 5, il n'y a plus de formule générale, comme l'ont démontré Niels Abel et Évariste Galois au début du XIXe siècle.

Un autre type d'équations complexes peut néanmoins être résolu en général, celles consistant à chercher une racine n -ième d'un nombre dont on connaît une forme polaire.

On suppose pour cela qu'on sait extraire une racine n -ième dans \mathbf{R}_+ . En général les fonctions log et exp le permettent, puisque si ρ est un réel strictement positif et n un entier strictement positif, alors la racine n -ième de ρ est donnée par $\exp(\ln(\rho)/n)$. Bien sûr, sur des exemples simples, on a parfois des racines n -ième plus explicites.

Théorème 1.18 (Racines n -ièmes complexes)

Soit $z_0 = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul écrit sous forme polaire et n un entier naturel strictement positif. Alors l'équation $z^n = z_0$ admet pour solutions les n nombres $\sqrt[n]{\rho} e^{i\theta/n}$, $\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2\pi)/n}$, $\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+4\pi)/n}$, ..., $\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2(n-1)\pi)/n}$.

Démonstration. — On vérifie d'abord que les nombres proposés vérifient bien $z^n = z_0$: si $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$(\sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2k\pi)/n})^n = (\sqrt[n]{\rho})^n (e^{i(\theta+2k\pi)/n})^n = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho e^{i\theta} e^{2ik\pi} = \rho e^{i\theta} = z_0.$$

9. On peut également vérifier par le calcul que les deux possibilités pour le couple (x, y) données dans la première ligne impliquent la seconde équation.

Comme $z_0 \neq 0$, ces nombres sont deux à deux distincts. En effet, si k et j sont dans $\{0, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\theta+2j\pi)/n} &\Leftrightarrow e^{i(\theta+2k\pi)/n} = e^{i(\theta+2j\pi)/n} \\ &\Leftrightarrow e^{i(2(k-j)\pi)/n} = 1 \\ &\Leftrightarrow (k-j)/n \in \mathbf{Z} \\ &\Leftrightarrow k = j \end{aligned}$$

car k et j sont dans $\{0, \dots, n-1\}$. On a donc trouvé n racines 2 à 2 distinctes du polynôme $P(z) = z^n - z_0$, qui est de degré n , donc ces racines sont les seules racines de P . \square

En particulier les nombres de la forme

$$e^{i(2k\pi/n)}, \quad \text{pour } k = 0, \dots, n-1,$$

sont les solutions de $z^n = 1$. On les appelle les *racines n -ièmes de l'unité* (figure 3). Elles forment les sommets successifs d'un polygone régulier à n côtés, de centre 0 et ayant 1 pour sommet.

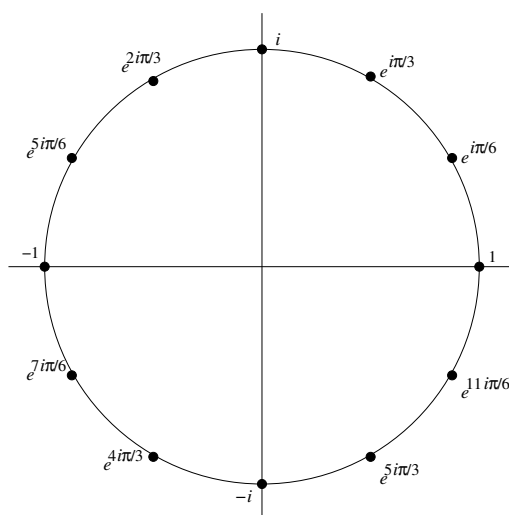


FIGURE 3. Racines douzièmes de l'unité.

1.6. Géométrie du plan complexe : vecteurs, distances et angles. — Rappelons la vision géométrique des nombres complexes : on munit le plan d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout point de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $x + iy$, appelé *affiche* du point. Si M désigne un point, on note z_M son affixe. L'application qui à M associe z_M est en fait une bijection¹⁰ entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes, et dans la suite il nous arrivera de confondre un point et son affixe.

On remarque que si A et B sont deux points du plan, alors

$$\overrightarrow{OA} = \operatorname{Re}(z_A)\vec{i} + \operatorname{Im}(z_A)\vec{j}$$

donc

$$\overrightarrow{AB} = \operatorname{Re}(z_B - z_A)\vec{i} + \operatorname{Im}(z_B - z_A)\vec{j}$$

Ceci nous amène naturellement à la définition suivante.

Définition 1.19

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on définit l'affixe du vecteur \vec{u} par

$$z_{\vec{u}} := x + iy.$$

Remarquons que si A et B sont deux points du plan, alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$. De plus, $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, $z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.

On voit alors facilement, en prenant des représentants de \vec{u} et \vec{v} partant de l'origine O , que :

$$\|\vec{u}\| = |z_{\vec{u}}|,$$

et, si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, qu'une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est donnée par $\operatorname{Arg}(z_v) - \operatorname{Arg}(z_u)$, qui est égal à $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_v}{z_u}\right)$. On obtient ainsi le résultat suivant concernant les mesures de distances et d'angles.

Théorème 1.20

Soient A , B et C trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

1. La distance entre A et B est le module de $z_B - z_A$.

10. Voir chapitre 3.

2. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est égale à l'argument du rapport $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.

Remarque 1.21. — Rappelons que l'ensemble des points à distance fixée r d'un point A est le cercle de centre A et de rayon r . Ainsi, en termes complexes, ce cercle est l'ensemble des nombres z tels que $||z - z_A| = r$. On peut aussi écrire ce cercle comme l'ensemble des points d'affixe $z_A + re^{i\theta}$, où θ décrit $[0, 2\pi[$.

1.7. Rédaction. — Quand vous « écrivez des mathématiques », l'objectif est de communiquer des raisonnements mathématiques. Il faut savoir trouver un équilibre entre clarté et rigueur (rigueur de définition des termes mathématiques, de raisonnement, de logique). La clarté permet d'avoir une communication efficace et la rigueur permet d'éviter les erreurs.

En termes de rigueur, on dit parfois qu'il faut convaincre trois personnes : soi-même, un ami et un ennemi. Le terme ennemi étant à prendre au sens d'une personne sceptique, qui essaiera de mettre en doute vos arguments.

Voici quelques règles qui peuvent aider à allier clarté et rigueur.

1. Définir clairement les objets qu'on utilise. Tout caractère $(x, A, f, \varepsilon \dots)$ qui désigne un objet mathématique (nombre, élément, ensemble, fonction ou autre) doit impérativement être présenté et clairement défini avant d'être utilisé.
2. Les objets qu'on utilise ont des règles de manipulation précises, imposées par leur définition, et qu'il faut respecter (Exemple : ne pas confondre inégalité au sens strict et au sens large).
3. Le niveau le plus élevé d'une démonstration (notamment le début et la fin) doit être rédigé en langage naturel. Il ne faut utiliser les symboles mathématiques que s'ils apportent un plus indéniable et ne prêtent pas à confusion.¹¹

11. À ce propos, le symbole \implies n'est pas un synonyme de « donc », c'est un connecteur logique qu'il ne faut manipuler que lorsqu'on souhaite affirmer de manière compacte que « si P est vraie alors Q est vraie » (ce qui se note $P \implies Q$), et qui doit toujours être introduit par une expression en langage naturel, comme dans « On en déduit que $P \implies Q$ ».

Exercices

Exercice 1.1. (*)

Mettre sous forme algébrique (c'est à dire $x + iy$ avec x et y réels) les nombres complexes suivants (a et b sont des réels).

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $1 - 2i - (-4 + 7i)$, | 8. $\overline{\left(\frac{1 + 2i}{-4 + 6i}\right)}$, | 12. $\frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}$, |
| 2. $\overline{1 + 2i} + \overline{-4 + 6i}$, | 9. $\frac{3 + 6i}{3 - 4i}$, | 13. $\left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^2 + \frac{3 + 6i}{3 - 4i}$, |
| 3. $(1 + 2i)(-4 + 6i)$, | 10. $\frac{5 + 2i}{1 - 2i}$, | 14. $\frac{2 + 5i}{1 - i} + \frac{2 - 5i}{1 + i}$, |
| 4. $(2 - 3i)(-3 + 2i)$, | 11. $\frac{(5 + 2i)(1 - i)}{(1 - 2i) - (i - 1)}$, | 15. $\left(\frac{1 + i - \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i}\right)^2$. |
| 5. $(a + ib)^2$, | | |
| 6. $(a - ib)^2$, | | |
| 7. i^{50} , | | |

Exercice 1.2. (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $z(i - 3) = 2$, | 5. $\frac{2z + i}{1 - 3iz} = 2 + 3i$, |
| 2. $3i + 1 - iz = 4 - i$, | 6. $\frac{\overline{2z + i}}{1 - \bar{z}} = 2 + i$. |
| 3. $(1 - i)z + \bar{z} = 4 - 3i$, | |
| 4. $3iz + 2z = 6i$, | |

Exercice 1.3. (*)

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $1 + i$, | 8. $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^3$, |
| 2. $3 + 3i$, | 9. $(1 + i\sqrt{3})^4$, |
| 3. $1 + i\sqrt{3}$, | 10. $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$, |
| 4. $-1 + i\sqrt{3}$, | 11. $\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$, |
| 5. $\sqrt{3} + i$, | 12. $\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i}$, |
| 6. $-\frac{4}{3}i$, | 13. $e^{ei\theta}$. |
| 7. $\frac{1 + i}{1 - i}$, | |

Exercice 1.4. (*)

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. tout nombre réel a pour argument 0.
2. tout nombre réel strictement négatif a pour argument π .
3. tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Exercice 1.5. (*)

Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. le module de z est égal au module de son conjugué.
2. l'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. le produit de z par une racine n -ième de l'unité a le même module que z .
4. l'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z .
5. si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π .
6. l'argument de z^2 est le double de l'argument de z .
7. l'argument de z/\bar{z} est égal à l'argument de z^2 .

Exercice 1.6. ()** Soient $a = \rho e^{i\theta}$ et $b = \rho e^{i\theta'}$ deux nombres complexes de même module.

1. Montrer que

$$a + b = 2\rho \cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}.$$

2. Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants (θ est un paramètre réel).

(a) $1 + i(1 + \sqrt{2})$

(c) $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$,

(b) $(1 + \sqrt{2}) - i$,

(d) $1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Exercice 1.7. ()** Soit a un paramètre complexe. Résoudre en l'inconnue z complexe les équations suivantes :

1. $az + 3 = 2z + i$

2. $az^2 + bz = 0$

Exercice 1.8. ()**

Calculer les racines carrées (complexes), sous forme algébrique, des nombres suivants

1. -1 ,

5. $1 + i\sqrt{3}$,

9. $3 - 4i$,

2. i ,

6. $3 + 4i$,

10. $24 - 10i$.

3. $1 + i$,

7. $8 - 6i$,

4. $-1 - i$,

8. $7 + 24i$,

Exercice 1.9. ()**

1. Calculer les racines carrées de $(1 + i)/\sqrt{2}$ sous forme algébrique.

En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, exprimées à l'aide des quatre opérations standards et du signe $\sqrt{}$.

2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3} + i)/2$ sous forme algébrique.

En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 1.10. ()**

Résoudre dans \mathbf{C} les équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique

1. $z^2 + z + 1 = 0$,

6. $z^2 + (1 + 2i)z + i - 1 = 0$,

2. $z^2 - z + 1 = 0$,

7. $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$,

3. $z^2 + 2z + 4 = 0$,

8. $z^2 - (1 - i)z - i = 0$,

4. $z^2 + 4z + 5 = 0$,

5. $4z^2 - 2z + 1 = 0$,

9. $z^2 - (11 - 5i)z + 24 - 27i = 0$.

Exercice 1.11. ()**

1. Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels et que z est une racine de P , alors \bar{z} est également une racine de P .

2. Soit z un nombre complexe non réel. Trouver deux nombres réels p, q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 1.12. ()**

Résoudre dans \mathbf{C} les équations suivantes, en donnant les solutions sous la forme que vous voulez

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $z^3 = i$ | 4. $z^4 = 1$, |
| 2. $z^3 = \frac{-1+i}{4}$, | 5. $z^4 = (-1 + i\sqrt{3})/2$, |
| 3. $z^3 = 2 - 2i$, | 6. $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$. |

Exercice 1.13. ()**

Montrer les égalités suivantes, en utilisant la formule de Moivre

- $\cos(4x) = 8 \cos(x)^4 - 8 \cos(x)^2 + 1$,
- $\sin(4x) = 8 \cos(x)^3 \sin(x) - 4 \cos(x) \sin(x)$.

Exercice 1.14. ()**

Linéariser les expressions suivantes (c'est-à-dire les écrire comme sommes d'expressions de type $a \cos(kx)$ et $b \sin(kx)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$).

- | | | |
|------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\cos(x)^3$, | 5. $\cos(x)^2 \sin(x)^2$, | 9. $\cos(x)^2 \sin(x)^3$, |
| 2. $\sin(x)^3$, | 6. $\cos(x) \sin(x)^3$, | 10. $\cos(x) \sin(x)^4$. |
| 3. $\cos(x)^4$, | 7. $\cos(x)^3 \sin(x)$, | |
| 4. $\sin(x)^4$, | 8. $\cos(x)^3 \sin(x)^2$, | |

Exercice 1.15. (*)

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + i \text{ et } z_B = 1 + 2i$$

On note O l'origine.

- Les points O , A et B sont-ils alignés ?
- On note C le point d'affixe $-1 - i$. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
- Quelle est l'affixe du centre de ce parallélogramme ?

Exercice 1.16. (*)

Soient A, B, C, D quatre points du plan. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B], [B, C], [C, D], [D, A], [A, C], [B, D]$.

1. En utilisant les nombres complexes, montrer que les segments $[I, K], [J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 1.17. ()**

On note j le nombre complexe $e^{i2\pi/3}$. Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C . Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a $z_A + j z_B + j^2 z_C = 0$ ou $z_A + j^2 z_B + j z_C = 0$.

Exercice 1.18. (*)**

Le but de l'exercice est d'exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide des opérations usuelles. On en déduira une façon de construire un pentagone régulier à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

1. Soit P le polynôme défini par $P(z) = z^5 - 1$. Quelles sont les racines complexes de P , exprimées sous forme polaire ?
2. Soit Q le polynôme défini par $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Montrer qu'on a $Q(z) \times (z - 1) = P(z)$. En déduire que les racines complexes de Q sont les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5}), \cos(\frac{2\pi}{5}) - i \sin(\frac{2\pi}{5}), \cos(\frac{4\pi}{5}) + i \sin(\frac{4\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i \sin(\frac{4\pi}{5})$.
3. Pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i \sin(\frac{2\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i \sin(\frac{2\pi}{5})$? et pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i \sin(\frac{4\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i \sin(\frac{4\pi}{5})$?
4. En utilisant l'égalité $Q(z) = z^2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2})$, montrer que si z est racine de Q , alors $(z + z^{-1})$ est racine du polynôme R défini par $R(y) = y^2 + y - 1$.
5. Déterminer les racines de R et montrer qu'elles sont réelles. On les note y_1, y_2 avec $y_1 > 0$.
6. En utilisant les questions 3, 4, 5 et 6, montrer qu'on a $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$.
7. Étant donné un segment dont la longueur est 1, comment construire un segment dont la longueur est $\sqrt{5}$ à l'aide d'une règle non graduée, d'une équerre, et d'un compas ? (penser à Pythagore)
8. En déduire comment construire un segment dont la longueur est $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
9. En déduire comment construire à partir d'un repère orthonormé le point de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$ à la règle et au compas.

10. Comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Exercice 1.19. (*)**

On va démontrer le théorème de Napoléon (pour savoir si l'empereur a effectivement démontré ce théorème, rendez-vous sur Wikipedia ou sur

<https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/pe/node19.html>).

Soient A, B, C trois points quelconques du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C . On suppose qu'on tourne autour de ABC dans le sens trigonométrique direct. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux ABI, BCJ et CAK . On note P, Q, R les centres de ces triangles équilatéraux.

1. Donner les affixes des points I et P en fonction de z_A et z_B .
2. Donner de mêmes les affixes des points J, K, Q, R en fonction de z_A, z_B et z_C .
3. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 1.20. (*)**

On note \mathcal{G} l'ensemble des nombres qui s'écrivent $m^2 + n^2$ avec m et n deux entiers relatifs.

1. Donner un exemple d'entier naturel qui est dans \mathcal{G} et un exemple d'entier naturel qui n'est pas dans \mathcal{G} .
2. En utilisant la formule $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$ pour $z, z' \in \mathbf{C}$, montrer que \mathcal{G} est stable par produit, c'est-à-dire que si $p, q \in \mathcal{G}$, alors $pq \in \mathcal{G}$.
3. En déduire que 221 est dans \mathcal{G} .

Ensembles et langage mathématique

L'objectif de ce chapitre est de consolider votre maîtrise du langage mathématique et des objets mathématiques élémentaires qu'on appelle les ensembles.

Concernant le langage, il s'agit de reprendre et de comprendre les règles du jeu mathématique, basé sur le raisonnement déductif, ainsi qu'un certain nombre de symboles introduits par les mathématiciens pour rendre plus compactes des expressions mathématiques que l'on utilise fréquemment. Les exemples mettront en jeu des ensembles concrets (ensembles de nombres classiques) ou abstraits.

Cours

2.1. Ensembles. — Un *ensemble* est un objet mathématique primitif qui est une collection d'objets mathématiques, différents les uns des autres, appelés *éléments* de l'ensemble. Deux ensembles coïncident si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Un ensemble est souvent décrit à l'aide des symboles d'accolades $\{, \}$. Selon les cas, il y a deux façons de les utiliser pour une telle description (notations 2.1 et 2.8 ci-dessous).¹²

Notation 2.1

On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en faisant la liste de tous ses éléments, séparés par des virgules.

Exemple 2.2. — $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est un ensemble dont les éléments sont les nombres 1, 2, 3, 4, et 5.

$\{\text{vrai}, \text{faux}\}$ est un ensemble contenant deux éléments, appelés **vrai** et **faux**.

¹². Nous verrons une troisième construction avec les accolades lorsque nous reviendrons sur la notion de fonction, dans le chapitre 3.

L'ordre d'apparition n'a pas d'importance. Chaque élément n'apparaît qu'une fois. S'il apparaissait plusieurs fois, ça ne changerait rien : l'ensemble resterait le même. Ainsi $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 3, 2, 5, 1\} = \{1, 2, 3, 1, 3, 4, 5\}$.

Notation 2.3

On utilise le symbole \in pour dire qu'un élément appartient à un ensemble, et \notin pour dire qu'il n'appartient pas à l'ensemble.

Exemple 2.4. — On a $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On abuse parfois de notations en notant “ $2, 3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ” au lieu de “ $2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ”, c'est-à-dire qu'on regroupe plusieurs appartenances en une seule.

Remarque 2.5. — Les ensembles étant aussi des objets mathématiques, on peut faire des ensembles d'ensembles. Ainsi $\{1, \{2\}, \{3, 4\}\}$ est un ensemble qui contient trois objets : le nombre 1 et les deux ensembles $\{2\}$ et $\{3, 4\}$.

Définition 2.6

On dit qu'un ensemble A est un *sous-ensemble* d'un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi dans B . On note alors $A \subset B$. On dit aussi que A est *inclus* dans B .

Si A n'est pas un sous-ensemble de B , on note $A \not\subset B$.

Il y a un ensemble qui ne contient aucun élément. On l'appelle *ensemble vide*, et on le note \emptyset .

Si un ensemble ne contient qu'un élément, on dit que c'est un *singleton*.

Exemple 2.7. — On a $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{2, 6\} \not\subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On a aussi $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tandis que $\{1, 2, 3, 4, 5\} \not\subset \emptyset$.

L'ensemble $\{2\}$ est un singleton, dont l'unique élément est le nombre 2.

Notation 2.8

On peut décrire un ensemble comme l'ensemble des éléments d'un autre ensemble satisfaisant une propriété supplémentaire. On utilise une barre pour séparer l'ensemble de départ de la propriété qu'on ajoute. On dit qu'on définit l'ensemble en *compréhension*.

Exemple 2.9. — $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid x \leq 3\}$ est le sous-ensemble de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ constitué des nombres inférieurs ou égaux à 3. C'est donc l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Si a et b sont des nombres réels, l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid (a \leq x) \wedge (x < b)\}$ est un ensemble, c'est l'intervalle $[a, b[$.

Si a et b sont des nombres entiers relatifs, l'ensemble $\{x \in \mathbf{Z} \mid (a \leq x) \wedge (x \leq b)\}$ est un ensemble de nombre entiers. On le note $\llbracket a, b \rrbracket$, c'est un intervalle dans \mathbf{Z} ¹³.

Dans la description précédente, la barre verticale a le sens de « satisfaisant » ou encore de « tel que ». Ainsi on peut lire $\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \mid x \leq 3\}$ comme « l'ensemble des nombres x dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ satisfaisant $x \leq 3$ ».

Remarque 2.10. — Résoudre une équation, c'est en général déterminer un ensemble. Ainsi trouver les solutions en nombres réels de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, c'est déterminer l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 1 = 0\}$.

Définition 2.11

Étant donné deux ensembles A et B , leur *union*, notée $A \cup B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A et tous les éléments de B .

Leur *intersection*, notée $A \cap B$, est l'ensemble qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B .

Exemple 2.12. — On a $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3\}$.

13. Un intervalle est un sous-ensemble I de \mathbf{R} tel que $(x \in I \wedge y \in I \wedge x \leq y \wedge y \wedge z) \Rightarrow y \in I$.

Définition 2.13

Étant donné deux ensembles A et B , leur *différence*, notée $A \setminus B$, est l'ensemble qui contient tous les éléments de A qui ne sont pas dans B .

Lorsque B est un sous-ensemble de A , la différence $A \setminus B$ est aussi appelée *complémentaire* de B dans A . Si l'ensemble A est suffisamment clair d'après le contexte, on note ${}^c B$ le complémentaire de B dans A .

Exemple 2.14. — On a $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$.

Les opérations sur les ensembles vérifient un certain nombre de propriétés qui sont parfois utiles.

Théorème 2.15 (admis)

Soient A , B et C trois ensembles. Les égalités ensemblistes suivantes sont toujours vraies.

- Commutativité :

$$(1) \quad (A \cap B) = (B \cap A).$$

$$(2) \quad (A \cup B) = (B \cup A).$$

- Associativité :

$$(3) \quad (A \cap (B \cap C)) = ((A \cap B) \cap C).$$

$$(4) \quad (A \cup (B \cup C)) = ((A \cup B) \cup C).$$

- Distributivité :

$$(5) \quad (A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)).$$

$$(6) \quad (A \cup (B \cap C)) = ((A \cup B) \cap (A \cup C)).$$

- Complémentaires : soient A et B des parties d'un ensemble E . Alors :

$$(7) \quad E \setminus (E \setminus A) = A,$$

$$(8) \quad E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) ,$$

$$(9) \quad E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B) .$$

Pour mieux comprendre ces opérations ensemblistes, il est commode de visualiser E par un rectangle et les sous-ensembles de E par des « patates » hachurées dessinées dans ce rectangle. Le résultat s'appelle un *diagramme de Venn*, plutôt qu'un sac de patates (figure 4). Nous conseillons au lecteur de visualiser les égalités ensemblistes du

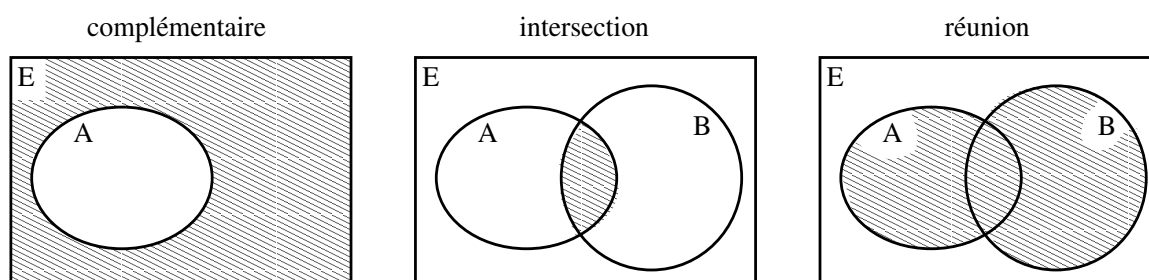


FIGURE 4. Diagrammes de Venn pour le complémentaire, l'intersection et la réunion.

théorème 2.15 sur des diagrammes de Venn. À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 5 le diagramme de Venn qui illustre la formule

$$(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = E \setminus (A \cap B).$$

En effet, sur cette figure seule l'intersection $A \cap B$ n'est point hachurée. On prendra

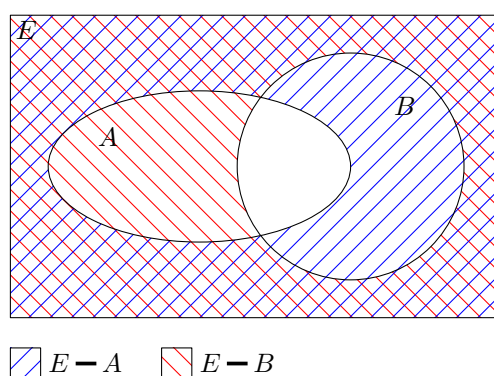


FIGURE 5. $(E \setminus A) \cup (E \setminus B) = E \setminus (A \cap B)$

néanmoins garde au fait que ce diagramme, s'il illustre parfaitement la formule, n'en constitue pas une *preuve*.

Remarque 2.16. — Un diagramme de Venn correspondant à un certain nombre de parties doit montrer toutes les intersections possibles, ce qui complique l'utilisation des diagrammes de Venn au-delà d'un petit nombre de parties. Ainsi un diagramme de Venn pour trois parties peut ressembler au premier dessin de la figure 6. Le deuxième dessin de cette figure représente la construction de A. W. F. Edwards donnant un diagramme de Venn correspondant à cinq parties de l'ensemble E .

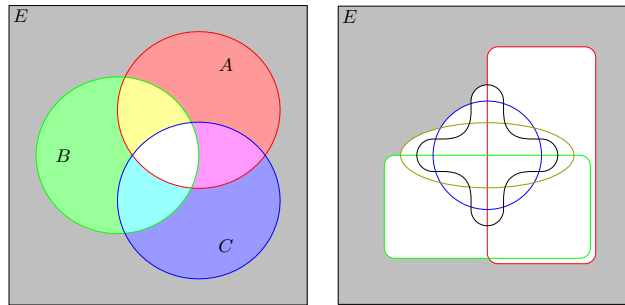


FIGURE 6. Diagrammes de Venn pour trois ou cinq parties.

Nous allons introduire une notation qui permet de faire des intersections ou des unions d'une collection d'ensembles indicée par un autre ensemble.

Notation 2.17

Soit E un ensemble, tel qu'à chaque élément x de E on associe un ensemble E_x . Alors on définit $\bigcup_{x \in E} E_x$ comme la réunion de tous les ensembles E_x , et $\bigcap_{x \in E} E_x$ comme l'intersection de tous les ensembles E_x .

Exemples 2.18. — On a $\bigcup_{x \in \{0,1,2\}} \{2x + 1, 2x + 2\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On a $\bigcap_{x \in \{0,1,2\}} \{x - 1, x, x + 1\} = \{-1, 0, 1\} \cap \{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\}$.

Remarquer que dans les exemples ci-dessus, on n'a pas besoin de préciser d'ordre dans lequel on effectue les unions (ou les intersections), en vertu de l'associativité de l'union et de l'intersection dans le théorème 2.15.

En faisant de la géométrie dans le plan ou l'espace à l'aide de coordonnées, on ne considère pas des nombres, mais des couples ou des triplets de nombres. On formalise cela avec la notion d'ensemble-produit.

Définition 2.19

Pour n un entier naturel, un n -uplet est une collection ordonnée de n objets mathématiques. On le note à l'aide de parenthèse : si u_1, u_2, \dots, u_n sont des objets, on peut former le n -uplet (u_1, u_2, \dots, u_n) .

Deux n -uplets (u_1, \dots, u_n) , (v_1, \dots, v_n) sont déclarés égaux si on a simultanément $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots$, et $u_n = v_n$.

Un 2-uplet est aussi appelé un *couple*, un 3-uplet un *triplet*.

Attention, ici on considère des n -uplets de la forme (u_1, u_2, \dots, u_n) et non des ensembles de la forme $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, la différence tient au fait que l'ordre compte dans un n -uplet, et non dans un ensemble. Par exemple on a $(1, 2) \neq (2, 1)$, tandis que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. De plus, un n -uplet peut contenir deux fois le même élément. Ainsi $(1, 1, 3)$ est un triplet de nombres, différent du couple $(1, 3)$.

Définition 2.20

Étant donnés deux ensembles E et F , l'*ensemble-produit* $E \times F$ est l'ensemble dont les éléments sont les couples de la forme (e, f) où e parcourt tous les éléments de E et f tous les éléments de F .

Pour n un entier naturel, étant donnés n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n , l'*ensemble-produit* $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble dont les éléments sont les n -uplets de la forme (u_1, u_2, \dots, u_n) où u_i parcourt tous les éléments de E_i .

Exemples 2.21. — On a $\{1, 2, 3\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.
On a

$$\begin{aligned} & \{3, 4\} \times \{x, y\} \times \{2, 3\} \\ = & \{(3, x, 2), (3, x, 3), (3, y, 2), (3, y, 3), (4, x, 2), (4, x, 3), (4, y, 2), (4, y, 3)\} \end{aligned}$$

2.2. Assertions. — Avant de parler de règles de déduction, on doit s'entendre sur la nature des objets mathématiques, et la nature de ce qu'on produit en mathématiques, à savoir des assertions mettant en jeu ces objets et dont on s'est convaincu qu'elles sont vraies.

Vous connaissez déjà différents objets mathématiques : les *nombres*, qu'ils soient entiers, rationnels, réels, ou complexes, mais aussi les *ensembles*. Une autre classe que vous connaissez déjà et que nous reverrons est constituée des *fonctions* : ce sont des objets qui prennent un élément d'un ensemble et rendent un élément d'un (autre) ensemble.

Tout n'est pas objet mathématique : les objets du monde physique ne sont pas mathématiques. Les seuls objets mathématiques sont ceux qui ont été définis comme tels.

L'enjeu des mathématiques est de déterminer des propriétés des objets mathématiques. Ces propriétés sont décrites par des assertions (auxquelles on donne différents noms et statuts pour marquer, ou pas, leur importance).

Définition 2.22 (Assertion)

Une assertion est une affirmation mathématique ne mettant en jeu que des objets mathématiques.

Exemples 2.23. — « 2 est un nombre pair » est une assertion mathématique (vraie).

- « Martin a cinq ans » n'est pas une assertion mathématique, puisque Martin n'est (sauf mention explicite du contraire) pas un objet mathématique, tout comme la notion d'âge.
- « Il y a cinq pommes dans ce sac » n'est pas une assertion mathématique, puisque les pommes sont des objets physiques et non mathématiques.
- « -5 est un nombre réel positif » est une assertion mathématique qui est fausse.
- « $3 = 5$ » est une assertion fausse.
- « π est-il égal à 3 ? » n'est pas une assertion mathématique, car c'est une question et non une affirmation.
- « Si x est un nombre réel tel que $x^2 - x = 0$, alors $x = 0$ ou $x = 1$ » est une assertion mathématique qui est vraie.

- « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ est premier » est une assertion mathématique (les nombres premiers sont les entiers naturels différents de 1 qui ne sont divisibles que par 1 et par eux-mêmes), dont nul ne sait aujourd'hui si elle est vraie ou fausse.

On utilise parfois (souvent) d'autres termes pour désigner les assertions mathématiques, pour marquer leur importance ou leur difficulté.

Terminologie 2.24

- *Théorème* : c'est une assertion importante, dont on démontre ou on admet qu'elle est vraie, et qui doit être connue par cœur ;
- *Proposition* : c'est le terme que nous utiliserons le plus souvent pour désigner une assertion qui est vraie, sans être aussi importante qu'un théorème ;
- *Lemme* : c'est une assertion démontrée, qui constitue une étape dans la démonstration d'un théorème ;
- *Corollaire* : c'est une conséquence facile d'un théorème.
- *Axiome* : c'est une assertion dont on s'entend pour dire qu'elle est vraie. On dit aussi *postulat*. Ces assertions sont les fondations de l'édifice mathématique.
- *Conjecture* : c'est une assertion dont certains mathématiciens pensent qu'elle est vraie, mais personne ne l'a encore démontré. Une fois démontrée, une conjecture devient un théorème.

Remarque 2.25. — Il est tentant de dresser une liste d'axiomes, et de redémontrer tout ce que l'on sait à partir de ces axiomes. C'est un processus très fastidieux qui a été tenté au cours du XXe siècle, en particulier sous l'impulsion du groupe Bourbaki. Si l'enthousiasme initial est un peu retombé, les progrès récents de l'informatique ont relancé ce programme. Ainsi des ordinateurs sont capables aujourd'hui de *certifier* des preuves. Récemment, plusieurs théorèmes très difficiles dont peu d'humains comprennent la preuve complète ont été vérifiés par ordinateur (classification des groupes finis simples, preuve par Hales de la conjecture de Kepler).

Retenons qu'il est possible, mais pénible, de tout reconstruire à partir de rien. Dans la pratique, on est satisfait d'une démonstration lorsqu'elle part d'axiomes admis par tous, et que chaque étape élémentaire est comprise par tous.

Remarque 2.26. — Comme exemple de conjectures célèbres, il y a eu pendant plus de 300 ans le (mal-nommé) *Grand théorème de Fermat* qui est devenu en 1994 le *théorème de Wiles*, car démontré par le mathématicien anglais Andrew Wiles. De même la *conjecture de Poincaré* est devenue au cours de la décennie 2000-2010 le *théorème de Perelman*, car démontrée par le mathématicien russe Grigory Perelman. Noter que dans ce cas, il est difficile de mettre une date précise, car il y a fallu presque dix ans pour que la preuve de Perelman convainque le reste de la communauté mathématique.

Il est difficile de concevoir qu'il reste des conjectures en mathématiques, mais c'est bien le cas. Un exemple particulièrement simple est la *conjecture de Goldbach*, selon laquelle tout nombre entier pair plus grand que 6 est la somme de deux nombres premiers.

Une classe d'objets importants est constituée des *variables*. C'est un moyen de parler d'un objet (nombre, ensemble, fonction) sans forcément le connaître parfaitement. Par exemple lorsqu'on cherche à résoudre une équation comme $x^2 - 3x + 1 = 0$, on introduit une variable x , sans dire plus que le fait que x est un nombre réel qui satisfait $x^2 - 3x + 1 = 0$. Parfois, on dira même « Soit t un nombre réel quelconque. » Dans ce cas, on ne sait rien de plus que le fait que t soit réel. À l'inverse lorsqu'on dit « Posons $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ». On vient de donner un nom à un nombre un peu compliqué. Dans ce cas la valeur de ϕ est bien définie.

Définition 2.27 (Variable)

Une variable est un symbole représentant un objet mathématique dont la valeur n'est pas connue.

Lorsqu'une variable est introduite dans un énoncé en disant à quel ensemble elle appartient, on dit que la variable est *liée*. Sinon elle est dite *libre*.

Ainsi, dans les exemples précédents, les variables sont liées puisqu'on a donné l'ensemble des valeurs possibles pour la variable (les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$ dans le premier cas, n'importe quel réel dans le second cas, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dans le troisième cas). En revanche dans l'expression $y^3 - 3y = 0$, on n'a rien précisé sur y , c'est donc une variable libre. Notons que si on ne sait rien sur y , on ne sait pas si l'assertion « $y^3 - 3y = 0$ » est vraie ou fausse. Plus généralement, une assertion contenant une variable libre n'est ni vraie, ni fausse : tant qu'on ne sait rien de plus sur cette variable, on ne peut déterminer sa vérité.

Terminologie 2.28

Une assertion ne contenant que des variables liées est dite *close*. Elle est vraie ou fausse. ^a

Une assertion contenant au moins une variable libre est dite *ouverte*. On dit qu'elle dépend des *paramètres* que sont les variables libres. Une telle assertion n'est ni vraie ni fausse.

^a. En fait, ce n'est pas le cas, et ça a été une révolution mathématique et philosophique de comprendre qu'il existe des assertions qui sont indémontrables, c'est-à-dire ni vraies ni fausses (théorèmes d'incomplétude de Gödel, 1931). Cependant, les énoncés indémontrables ne sont pas si fréquents, et la plupart des assertions que nous pourrions écrire sont en effet vraies ou fausses.

Exemples 2.29. —

- « n est plus grand que 3 » est une assertion ouverte. On ne sait si elle est vraie ou fausse, puisque n est une variable libre.
- « Pour tout entier naturel n , n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est fausse. La variable n est liée, et on se convainc que l'assertion est fausse puisqu'il existe des entiers strictement inférieurs à 3.
- En revanche, « Pour tout entier naturel n , si n est plus grand que 5, alors n est plus grand que 3 » est une assertion close, qui est vraie. La variable n est encore liée.

2.3. Valeurs de vérité et tables de vérité. — En mathématiques, on combine des assertions entre elles à l'aide d'opérateurs (ou connecteurs) logiques. Une façon de décrire la signification de ces opérateurs est de décrire la valeur de vérité de l'assertion obtenue pour toutes les valeurs de vérité possibles des assertions auxquelles on applique cet opérateur.

Définition 2.30 (Opérateurs logiques)

Étant donné deux assertions P et Q , on peut former de nouvelles assertions :


- la *négation* de P , notée $\neg P$ (« non P »), qui est vraie si et seulement si P est fausse,
- la *conjonction* de P et Q , notée $P \wedge Q$ (« P et Q »), qui est vraie si et seulement si à la fois P et Q sont vraies,

- la *disjonction* de P et Q , notée $P \vee Q$ (« P ou Q »), qui est vraie si et seulement au moins l'une parmi les deux assertions P et Q est vraie.

Exemples 2.31. — Voici quelques assertions composées et leur traduction.

$$\begin{aligned} \neg(n < 5) & \quad n \text{ n'est pas strictement inférieur à } 5 \\ (n < 5) \wedge (n \leq 2) & \quad n \text{ est strictement inférieur à } 5 \text{ et inférieur ou égal à } 2 \\ (n \geq 2) \vee (n \leq 0) & \quad n \text{ est supérieur ou égal à } 2 \text{ ou } n \text{ est inférieur ou égal à } 0 \end{aligned}$$

Observez l'usage des parenthèses qui permettent d'identifier les énoncés dont l'assertion est composée.

 Dans la vie courante le mot « ou » a deux significations possibles : dans un menu de restaurant il est « exclusif » : parmi les entrées proposées, vous n'en choisissez qu'une seule. En mathématiques, par contre, le « ou » est toujours inclusif : P ou Q signifie que l'une *au moins* des deux assertions est vraie (peut-être les deux). Par opposition, le « ou exclusif » est vrai quand exactement une des deux assertions est vraie.

Définition 2.32

Une assertion composée est appelée une *tautologie* si elle est vraie quelle que soit la valeur de vérité des assertions qui la composent.

Exemple 2.33. — L'assertion $P \vee (\neg P)$ est une tautologie.

Lorsqu'on combine des assertions à l'aide de connecteurs, il peut être utile d'utiliser des *tables de vérité*. Dans l'exemple ci-dessous, on décrit l'effet des connecteurs sur deux assertions P et Q , selon qu'elles sont vraies (V) ou fausses (F), en disant dans chacun des 4 cas si l'assertion composée est elle-même vraie ou fausse.

		négation non	conjonction et	disjonction ou
P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

Lorsqu'on a une assertion dépendant de 3 ou 4 assertions de base, on peut établir ainsi à l'aide d'une table à 8 ou 16 lignes si l'assertion composée est vraie ou fausse, selon la valeur de vérité de chaque assertion de base.

Exemple 2.34. — On veut savoir si l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est vraie selon que P , Q et R sont vraies ou fausses. On dresse la table ci-dessous, où les 8 lignes correspondent aux huit possibilités.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$\neg(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V

Ainsi l'assertion $(P \wedge Q) \vee \neg(P \wedge R)$ est fausse si P et R sont vraies et Q fausse, et elle est vraie dans tous les autres cas.

2.4. Quantificateurs. — Les quantificateurs permettent de réaliser une conjonction et une disjonction d'une famille d'assertion indicée par un paramètre parcourant un ensemble. Il y en a deux, selon que l'on veut réaliser une conjonction ou une disjonction.

Définition 2.35 (Quantificateurs)

Les quantificateurs sont les deux symboles \forall « quel que soit » et \exists « il existe ». Si A est un ensemble et $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x , alors

- l'assertion $(\forall x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour n'importe quel x dans A .
- l'assertion $(\exists x \in A, P(x))$ est vraie si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x dans A .

On dit aussi que \forall est le quantificateur *universel* et \exists le quantificateur *existantiel*. On les utilise pour des énoncés du type :

$$(10) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \quad n < m.$$

Cette formule se lit : quel que soit n appartenant à \mathbf{N} , il existe m appartenant à \mathbf{N} tel que $n < m$. Soit encore : pour tout entier n , il existe un entier m strictement plus grand que n . Il est crucial de retenir que dans ce cas l'entier m peut dépendre de l'entier n . Cette assertion est vraie : pour tout n , le nombre $m = n + 1$ vérifie bien $n < m$.

Noter que l'assertion « $n < m$ » contient deux variables libres, et donc elle n'est ni vraie ni fausse. De même l'assertion « $\exists m \in \mathbf{N}, n < m$ » contient une variable libre n , et donc elle n'est ni vraie ni fausse. En revanche l'assertion « $\forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, n < m$ » contient deux variables qui sont maintenant liées, puisqu'introduites par un quantificateur.

De façon générale, si $P(x)$ est une assertion ouverte dépendant d'un unique paramètre x , les assertions $(\forall x \in A, P(x))$ et $(\exists x \in A, P(x))$ sont des assertions closes.

Remarque 2.36. — Le nom ou la lettre qu'on utilise pour désigner une variable n'a pas d'importance en général. On peut donc le changer, du moment qu'on le change à chaque fois que la variable intervient. Ainsi les deux assertions

$$(11) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \quad n < m$$


et

$$(12) \quad \forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{N}, \quad x < y$$

sont équivalentes. Par contre elles ne sont pas équivalentes à

$$(13) \quad \forall n \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, \quad n < n$$

qui n'a pas de sens, car la variable n est introduite deux fois dans la même assertion !

 L'ordre dans lequel on écrit les quantificateurs est très important. Échangeons dans (11) les deux quantificateurs.

$$\exists m \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n < m .$$

Cette assertion se lit : il existe un entier m tel que tout entier n vérifie $n < m$ (ce qui est faux).

Nous commettrons souvent l'abus de notation consistant à regrouper des quantificateurs de *même nature* et portant sur les *mêmes ensembles*. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N}, \quad m + n \in \mathbf{N},$$

sera plutôt écrit :

$$\forall n, m \in \mathbf{N}, \quad m + n \in \mathbf{N}.$$

(La somme de deux entiers naturels est un entier naturel.)

Ou encore,

$$\exists n \in \mathbf{N}, \exists m \in \mathbf{N}, \quad n + m < 10,$$

deviendra :

$$\exists n, m \in \mathbf{N}, \quad n + m < 10.$$

(Il existe deux entiers dont la somme est strictement inférieure à 10.)

Une règle importante est que la négation échange les deux quantificateurs.

Proposition 2.37

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x et soit A un ensemble. alors les assertions

$$\neg(\forall x \in A, P(x)) \quad \text{et} \quad (\exists x \in A, \neg P(x))$$

sont équivalentes. De façon semblable, les assertions

$$\neg(\exists x \in A, P(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in A, \neg P(x))$$

sont équivalentes.

Remarques 2.38. — i) Pour écrire la négation d'une assertion comportant des quantificateurs on change donc les \forall en \exists et les \exists en \forall , puis on écrit la négation de l'assertion qui suit la liste des quantificateurs. Ceci est tout à fait conforme à l'intuition. La négation de « tout les x vérifient $P(x)$ » est bien « il existe un x qui ne vérifie pas $P(x)$ ». La négation de « il existe un x qui vérifie $P(x)$ » est bien « aucun x ne vérifie $P(x)$ » soit encore « tous les x vérifient $\neg P(x)$ ». Ecrivons par exemple la négation de l'assertion (10).

$$\exists n \in \mathbf{N}, \quad \forall m \in \mathbf{N}, (n \geq m).$$

Il existe un entier n supérieur ou égal à tout entier m (ce qui est faux).

ii) La première assertion permet en fait de définir le quantificateur universel à partir du quantificateur existentiel : $\forall x \in A, P(x)$ peut être défini comme $\neg(\exists x \in A, \neg P(x))$. la seconde assertion découle aussi de cette définition.

Pour les deux autres opérateurs logiques, il faut se méfier : il y a deux cas où l'on peut *distribuer*, et deux cas où l'on ne peut pas.

Proposition 2.39

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions dépendant d'un paramètre et soit A un ensemble. Les assertions

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

et

$$(\exists x \in A, P(x)) \vee (\exists y \in A, Q(y))$$


sont équivalentes. De même, les assertions

$$\forall x \in A, \quad P(x) \wedge Q(x)$$

et

$$(\forall x \in A, P(x)) \wedge (\forall y \in A, Q(y))$$

sont équivalentes.

 Il convient d'être extrêmement prudent dans l'utilisation de cette propriété. En effet, le quantificateur existentiel n'est pas distributif par rapport à « et » et le quantificateur universel ne l'est pas par rapport à « ou » ! Par exemple, « il existe un entier supérieur à 7 et inférieur à 6 » (faux) n'est pas équivalent à « il existe un entier supérieur à 7 et il existe un entier inférieur à 6 » (vrai). De même « tout entier est inférieur ou égal à 7, ou supérieur ou égal à 6 » (vrai) n'est pas équivalent à « tout entier est inférieur ou égal à 7 ou tout entier est supérieur ou égal à 6 » (faux).

Idée de la preuve de la proposition. — Démontrons la première équivalence. Supposons

$$\exists x \in A, \quad P(x) \vee Q(x)$$

On se donne donc un élément $a \in A$ tel que $P(a)$ ou $Q(a)$. Dans le premier cas, $\exists x \in A, P(x)$, dans le second $\exists y \in A, Q(y)$ ce qui implique l'assertion

$$(\exists x \in A, P(x)) \vee (\exists y \in A, Q(y))$$

Réciproquement, on raisonne de façon similaire en distinguant deux cas. La deuxième équivalence peut se déduire de la première en utilisant la proposition 2.37. \square

2.5. Implication et raisonnement déductif. — Vous avez déjà l'habitude d'utiliser l'implication et l'équivalence. Ce sont des mécanismes fondamentaux de raisonnement. Ces notions peuvent être vues comme des opérateurs logiques.

Définition 2.40 (Implication)

Pour des assertions P et Q , l'implication $P \implies Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$ (« non P ou Q »).

Remarque 2.41. — Par définition, l'implication $P \implies Q$ est vraie soit si P est fausse soit si P et Q sont vraies toutes les deux. Autrement dit, l'implication $P \implies Q$ est définie comme $(\neg P) \vee Q$.

Notons que si $P \implies Q$ et P sont vraies alors Q est vraie. Cela fait de l'implication la base du raisonnement mathématique : l'assertion Q est démontrée dès lors qu'on a démontré P et $P \implies Q$.

Pour bien comprendre l'implication, reprenez chacune des formulations ci-dessous en remplaçant P par « $n > 3$ » et Q par « $n > 2$ ».

$P \implies Q$
P implique Q
P entraîne Q
si P est vrai alors Q est vrai
pour que Q soit vrai il suffit que P le soit
P est une condition suffisante pour Q
pour que P soit vrai il faut que Q le soit
Q est une condition nécessaire pour P

Remarque 2.42. — Pour démontrer une implication $P \implies Q$, la technique la plus simple consiste à supposer l'assertion P et à faire un raisonnement qui démontre Q . On parle de raisonnement *direct*. C'est le plus utilisé. Nous verrons plus tard d'autres méthodes (raisonnement par contraposée ou par l'absurde).

Le raisonnement déductif consiste à démontrer une implication en enchainant les implications. Il est fondé sur le résultat suivant.

Proposition 2.43

Soit P, Q, R trois assertions. Alors l'assertion $((P \implies Q) \wedge (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$ est une tautologie.

Pour le démontrer il suffit (par exemple) de faire une table de vérité.

Autrement dit si l'implication $P \implies Q$ est vraie, ainsi que l'implication $Q \implies R$, alors l'implication $P \implies R$ est également vraie.

Définition 2.44 (Réciproque)

Étant donné une implication $P \implies Q$, l'implication réciproque est $Q \implies P$.

Définition 2.45 (Équivalence)

Soit P et Q deux assertions (dépendant éventuellement de paramètres). On définit $P \iff Q$ comme $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Exemple 2.46. —

- Si n est un entier, les assertions « $n \geq 5$ » et « $n > 4$ » sont équivalentes.
- Si n est réel, les assertions « $n \geq 5$ » et « $n > 4$ » ne sont pas équivalentes (par exemple $n = 9/2$ rend la première assertion vraie, mais la seconde fausse).

Pour bien comprendre l'équivalence, reprenez chacune des formulations en remplaçant P par « $n \geq 3$ » et Q par « $n > 2$ », où n est un nombre entier.

$P \iff Q$
P est équivalent à Q
P équivaut à Q
P entraîne Q et réciproquement
si P est vrai alors Q est vrai et réciproquement
P est vrai si et seulement si Q est vrai
pour que P soit vrai il faut et il suffit que Q le soit
P est une condition nécessaire et suffisante pour Q

Voici la table de vérité de l'implication, de l'implication réciproque, et de l'équivalence, entre deux assertions P et Q . Constatez que l'équivalence $P \iff Q$ est vraie

quand P et Q ont la même valeur de vérité et fausse sinon.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Remarque 2.47. — Pour démontrer une équivalence $P \iff Q$, On peut, dans les cas faciles, démontrer une chaîne d'équivalences

$$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \dots \iff P_n \iff Q$$

C'est souvent ainsi qu'on résout un système d'équations par exemple.

Quand on ne peut pas faire ainsi, une méthode générale consiste à démontrer successivement une implication $P \implies Q$ puis sa *réciproque* $Q \implies P$. On introduit souvent la démonstration de la réciproque par le mot « réciproquement ».

Dans le cas des équations, on parle aussi d'*analyse* et *synthèse* : on démontre d'abord que les équations impliquent que les valeurs cherchées appartiennent à un certain ensemble; c'est la phase d'*analyse* de l'équation. On vérifie ensuite que les solutions trouvées conviennent, c'est la phase de *synthèse*.

Parmi les propriétés fondamentales de l'implication, on peut donner les énoncés suivants.

Axiomes 2.48

Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre x , soit A un ensemble et a un élément de A . Alors les assertions

$$(\forall x \in A, P(x)) \implies P(a)$$

et

$$P(a) \implies (\exists x \in A, P(x))$$

sont des tautologies.

Exemple 2.49. — L'assertion

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

implique l'assertion

$$\pi^2 - 2\pi + 1 \geq 0,$$

car π est un nombre réel.

Les deux énoncés des axiomes 2.48 sont conformes à l'intuition. Notons que le deuxième correspond à la façon « standard » de démontrer une assertion d'existence : pour démontrer que $\exists x \in A, P(x)$, il suffit d'exhiber un élément $a \in A$ tel qu'on puisse démontrer $P(a)$. Une telle démonstration est dite *constructive* ou *effective* si on explique comment construire l'élément a . En particulier, pour démontrer qu'une assertion

$$\forall x \in A, P(x)$$

est *fausse*, il suffit d'exhiber un *contre-exemple* c'est-à-dire un élément $a \in A$ tel que $\neg P(a)$.

Remarque 2.50. — Pour démontrer une assertion avec un quantificateur universel

$$(14) \quad \forall x \in A, P(x),$$

on commence le plus souvent par écrire « Soit $x \in A$ ». Cela signifie que dans la démonstration qui suit x désigne un élément *arbitraire* et *fixé* de l'ensemble A . Si on démontre $P(x)$, alors, comme cela vaut pour un x arbitraire, on a démontré (14).

Exemple 2.51. — Démontrons l'assertion

$$(15) \quad \forall t \in \mathbf{R}, t^2 + 2t + 2 > 0.$$

Soit $t \in \mathbf{R}$. On a l'égalité $t^2 + 2t + 2 = (t + 1)^2 + 1$. Comme le carré d'un nombre réel est positif, $(t + 1)^2 \geq 0$. Donc $(t + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$. Cela conclut la preuve de (15).

2.6. Autres modes de raisonnement. — Il ne s'agit pas de proposer ici une théorie du raisonnement mathématique. Nous avons déjà mentionné (*cf.* remarque 2.47) le raisonnement *direct*, qu'on utilise le plus souvent, ainsi que les raisonnements *par analyse et synthèse*. Nous allons maintenant donner quelques exemples de démonstrations, pour illustrer quatre types de raisonnements supplémentaires : par contraposée, par l'absurde, par disjonction de cas et par récurrence.

Raisonnement par contraposée

Il consiste, plutôt que de démontrer l'implication $P \implies Q$, à démontrer sa contraposée $(\neg Q) \implies (\neg P)$. En effet ces deux implications sont équivalentes, comme on peut le vérifier sur une table de vérité.

Il est difficile de donner une règle générale d'utilisation de ce raisonnement. Un bon conseil avant de se lancer dans la démonstration d'une implication, est d'écrire d'abord sa contraposée. Avec un peu d'expérience, on arrive vite à sentir laquelle des deux est la plus facile à démontrer. Si le résultat désiré est Q , on cherche les conséquences

de non Q pour arriver aux bonnes hypothèses. Notre premier exemple est un résultat facile, mais très utile.

Proposition 2.52

Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$. Alors $x \leq 0$.

Démonstration. — Nous devons démontrer l'implication :

$$\left(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \quad x \leq \varepsilon \right) \implies (x \leq 0).$$

Ecrivons sa contraposée :

$$(x > 0) \implies \left(\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* ; \quad x > \varepsilon \right).$$

« Si x est strictement positif, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$ ». C'est vrai : il suffit de choisir $\varepsilon = x/2$. \square

N Étant donné deux assertions P et Q et l'implication $P \implies Q$, il ne faut pas confondre la contraposée qui est l'implication $(\neg Q) \implies (\neg P)$ et la réciproque qui est l'implication $Q \implies P$. La contraposée $(\neg Q) \implies (\neg P)$ est équivalente à $P \implies Q$, et donc se démontre à la place de $P \implies Q$. En revanche la réciproque $Q \implies P$ n'est PAS équivalente à $P \implies Q$.

Insistons : lorsque $P \implies Q$ est vraie, alors automatiquement la contraposée $(\neg Q) \implies (\neg P)$ est vraie. En revanche, la réciproque $Q \implies P$ peut être vraie ou fausse, selon les cas.

Exemple 2.53. — L'implication $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 2) \implies (x > 1)$ est vraie.

Sa contraposée est $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leq 1) \implies (x \leq 2)$, elle est aussi vraie.

Par contre l'implication réciproque est $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 1) \implies (x > 2)$, elle est fausse.

Raisonnement par l'absurde

Il consiste à démontrer une assertion en vérifiant que sa négation conduit à une contradiction avec les hypothèses. Formellement, si P désigne les hypothèses, plutôt que de démontrer $P \implies Q$, on démontre $(P \wedge (\neg Q)) \implies (1 = 0)$. S'il n'y a pas d'hypothèse et qu'on veut démontrer une assertion Q , cela revient plutôt à démontrer $\neg Q \implies (1 = 0)$.

Dans certains cas il se distingue mal du raisonnement par contraposée : si P désigne la conjonction des hypothèses et Q la conclusion, nier Q et aboutir à une contradiction, revient à démontrer $\neg P$ à partir de $\neg Q$, ce qui est la contraposée de $P \implies Q$.

Voici un résultat classique.

Proposition 2.54

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration. — Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers ; un nombre irrationnel n'est pas rationnel. Nous devons donc démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers. Supposons le contraire : il existe deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$. Quitte à simplifier la fraction, nous pouvons supposer que p et q n'ont pas de facteur commun. Multiplions par q et élevons au carré :

$$2q^2 = p^2 .$$

Le nombre $p^2 = 2q^2$ est pair, donc p est également pair. Mais si p est pair, alors p^2 est multiple de 4. Donc q^2 est multiple de 2, donc q est pair. Mais alors 2 est un facteur commun à p et q , ce qui est une contradiction. \square

Raisonnement par disjonction de cas

Dans certains raisonnements, il peut être pratique de considérer successivement deux cas. Ainsi, si on veut démontrer une assertion $P(x)$ pour tout élément x d'un ensemble E qui est la réunion de deux parties A et B , on démontre d'abord l'assertion $P(x)$ pour $x \in A$ puis l'assertion $P(x)$ pour $x \in B$ et, comme $E = A \cup B$, on peut conclure que l'assertion $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

À titre d'exemple, démontrons le résultat suivant :

Proposition 2.55

Pour tout entier n , le nombre rationnel $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.

Démonstration. — Nous allons distinguer deux cas suivant la parité de l'entier n .

Premier cas. Si n est pair alors ce nombre est le produit de l'entier $\frac{n}{2}$ par l'entier $n + 1$. C'est donc un entier.

Deuxième cas. Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et le nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ est le produit de l'entier n par l'entier $\frac{n+1}{2}$; c'est donc également un entier.

Comme tout nombre entier est soit pair soit impair, l'assertion « $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier » est démontrée pour tout entier n . \square

Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une assertion $H(n)$ dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, on démontre :

1. $H(0)$ « initialisation »,
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $(H(n) \implies H(n+1))$ « hérédité ».

L'assertion $H(n)$ est l'*hypothèse de récurrence*. Il peut se faire qu'elle ne soit vraie que pour $n \geq 1$ ou $n \geq 2$, auquel cas, on la démontre pour la plus petite valeur pour laquelle elle est vraie. Voici la démonstration d'une formule à connaître :

Proposition 2.56

Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des entiers de 1 à n vaut $n(n+1)/2$.

Démonstration. — L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

1. *Initialisation.* Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} .$$

2. *Hérédité.* Soit n un entier strictement positif quelconque. Supposons que $H(n)$ est vraie. Écrivons :

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) .$$

En appliquant $H(n)$, on obtient

$$(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) ,$$

Le membre de droite s'écrit

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

Nous avons donc démontré que

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ,$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie.

□

On pourra noter au passage que la proposition donne une nouvelle preuve du fait que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier !

On peut être amené, pour démontrer $H(n+1)$ à utiliser $H(m)$ pour $m \in \{0, \dots, n\}$, ce qui ne change rien au principe de la récurrence. L'hérédité est remplacée par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left((\forall m \in \{0, \dots, n\}, H(m)) \implies H(n+1) \right).$$

Pour deviner quelle est la bonne hypothèse $H(n)$, on doit souvent essayer plusieurs valeurs successives de n : $n = 0$, puis $n = 1$, $n = 2, \dots$. C'est parfaitement inutile pour la démonstration. Attention, ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour quelques valeurs de n qu'elle est vraie pour tout n . Voici deux exemples.

1. Les nombres 31, 331, 3 331, \dots , 33 333 331 sont tous premiers. Mais 333 333 331 = $17 \times 19\,607\,843$ ne l'est pas.
2. Pour toutes les valeurs de n allant de 0 à 39, le nombre $n^2 + n + 41$ est premier. Mais le nombre $40^2 + 40 + 41 = 41^2$ ne l'est pas.

Exercices

Ensembles, nombres entiers, rationnels et réels

Exercice 2.1. (*)

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}$,
2. $\{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$,
3. $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\}$,
4. $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\}$,
5. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}$,
6. $(\{1, 2\} \cup \{1, 3\}) \cap \{3, 4\}$,
7. $(\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\}) \cup \{5, 6\}$,
8. $(\{1, 2\} \cup \{3, 4\}) \cap \{2, 4\}$,
9. $(\{1, \{2\}\} \cup \{2, 3\}) \cap \{\{2\}, \{3\}\}$,
10. $(\{1, \{2\}\} \cap \{\{2\}, \{3\}\}) \cap \{\{2\}, 3\}$,
11. l'ensemble des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π .

Exercice 2.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et B l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A \cap B$,
2. $A \cup B$,
3. $A \setminus B$,
4. $B \setminus A$,
5. $\{x + 2; x \in A\}$,
6. $\{2x; x \in B\}$,
7. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
8. $\{x + y; (x, y) \in A \times B\}$,
9. $\{x + y; (x, y) \in A \times A\}$,
10. $\{x + x; x \in A\}$,
11. $\{xy; (x, y) \in A \times B\}$,
12. $\{x \in A \mid x \geq 2\}$,
13. $\{x \in B \mid x \geq 2\}$,
14. $\{y \in A \mid y \leq 5\}$,
15. $\{z \in A \cup B \mid z \geq 0\}$,

Exercice 2.3. (*)

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $[0, 1] \cup [1, 2]$,
2. $[0, 1] \cap [1, 2]$,
3. $[0, 1] \cap \mathbf{Z}$,

Exercice 2.4. (*)

Écrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunions d'intervalles de \mathbf{R} :

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x < 6\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 0,5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 2| < 0,1\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 5| \leq 0,01\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 0,1| < 0,2\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 3\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \geq 1\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x \geq 0\}$.

Exercice 2.5. (*/)**

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (justifier).

1. $\{x \in \mathbf{R} \mid \lfloor x \rfloor = 3\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq \lfloor x \rfloor \leq 6\}$,
3. $\{x \in \mathbf{Q} \mid |x| \leq 3\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\}$.
5. $\bigcup_{i \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \bigcap_{j \in \{2,3\}} [i + j, i + 2j]$

Exercice 2.6. ()**

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont inclus dans lesquels ?

1. $[0, 1]$,
2. $] - 1, 1[$,
3. $[0, \frac{1}{2}]$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - x = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x| < \frac{1}{5}\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \mid |x - 0,2| < 0,1\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\}$.

Exercice 2.7. ()**

Les ensembles suivants coïncident-ils ?

1. $\{1, 1, 2\}$ et $\{2, 1\}$;
2. $\{1, (1, 2)\}$ et $\{(1, 1)\}$;
3. $\{(1, 1), (1, 2)\}$ et $\{(1, 1), (2, 1)\}$;
4. $\{\{1\}, \{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2, 1\}\}$;
5. $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{x \in \mathbf{Z} \mid x \leq 3\}$;
6. $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 3\}$;
7. $\llbracket 1, 3 \rrbracket \times \llbracket 0, 3 \rrbracket$ et $\{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$;
8. $\{(x, y) \in \mathbf{N}^2 \mid 0 \leq x < y \leq 3\}$ et $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Exercice 2.8. ()**

Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^c A \cap B \cap C) \cup {}^c B \cup {}^c C$.

2. Démontrer que $(A \cap {}^c B) \cap C = A \cap {}^c(B \cup C) = (A \cap C) \cap {}^c B$.
3. A-t-on toujours $(A \cup B) \cap ({}^c A \cup {}^c C) \cap {}^c B \cap ({}^c A \cup B \cup C) = \emptyset$?

Langage mathématique

Exercice 2.9. (*) Lorsque T est un tableau de nombres, on note $T(i, j)$ le contenu de la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j . On considère les 4 assertions suivantes, portant sur des tableaux ayant au moins 4 lignes et 4 colonnes.

$$A : \forall i \in \{1, \dots, 4\}, \forall j \in \{1, \dots, 4\}, T(i, j) = 1$$

$$B : \forall i \in \{1, \dots, 4\}, \exists j \in \{1, \dots, 4\}, T(i, j) = 1$$

$$C : \exists i \in \{1, \dots, 4\}, \forall j \in \{1, \dots, 4\}, T(i, j) = 1$$

$$D : \exists i \in \{1, \dots, 4\}, \exists j \in \{1, \dots, 4\}, T(i, j) = 1$$

Pour chacun des tableaux ci-dessous, dire quelles sont les assertions vérifiées parmi A, B, C , et D .

$$(a) T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(c) T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$(b) T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(d) T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Exercice 2.10. (*)

Écrire des assertions à l'aide de quantificateurs traduisant les énoncés suivants.

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
2. Tout élément de \mathcal{P} est le double d'un entier.
3. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif plus grand.
4. Pour tout nombre réel, il existe un nombre rationnel tel que la différence des deux est plus petite que 0,1 en valeur absolue.
5. Tout nombre complexe non nul est le carré de deux nombres complexes distincts.
6. Il existe deux nombres réels irrationnels dont le produit est rationnel.

Exercice 2.11. (*)

Soit P, Q, R trois assertions, et a, b, c trois nombres réels. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $P \wedge (\neg Q)$
2. $(P \implies Q) \wedge R$
3. $\exists x \in [1, +\infty[, a \geq b + x$
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, a = b + x$
5. $a = b = c$

Exercice 2.12. ()**

Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On rappelle qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geq y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geq y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geq y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geq y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geq y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geq y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geq z \implies y \geq z))$.

Exercice 2.13. ()**

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $1 + 1 = 2 \implies 1 + 1 = 3$;
2. $1 + 1 = 3 \implies 1 + 1 = 2$;
3. $1 = 0 \implies (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2 + b^2 = 0)$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2 \implies x \geq 3$;
5. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 3 \implies x \geq 3$;
6. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2, 3] \implies x \in [0, 4]$;
7. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2, 3] \implies x \leq 3$;
8. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2, 3] \implies x \geq 3$;
9. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2, +\infty[\implies x \leq 3$;
10. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x > y \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
11. $\exists x \in \mathbf{R}_+, x < \sqrt{x}$;
12. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
13. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
14. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
15. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x + y > 0$;
16. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |x| < \varepsilon$;
17. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
18. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
19. $\exists t \in \mathbf{R}_+, \forall x \in \mathbf{R}, |x| < t \implies x^2 < 3$;

Exercice 2.14. (*)

Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Ecrire en fonction de A , B , C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.
3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Assertions et tables de vérité**Exercice 2.15. (*)**

Soient P , Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifiez que l'implication

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$$

est toujours vraie.

Exercice 2.16. (*)

Soit P et Q deux assertions, l'assertion $P \oplus Q$ (dire " P ou exclusif Q ") est vraie si exactement l'une des deux assertions P et Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$ selon les vérités de P et Q .
2. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

Raisonnements

Exercice 2.17. ()** Soit a un paramètre réel. Résoudre l'inéquation suivante, en l'inconnue x réelle :

$$1. ax + 3 \leq 2x + 1$$

$$2. |3x - 1| \leq |x + 4|$$

Exercice 2.18. ()** Soit a un nombre réel. On note \mathcal{D}_a la droite d'équation $y = x + 2a$ et \mathcal{C}_a le cercle de centre $(a, 1)$ et de rayon 1.

1. Pour quelles valeurs de a existe-t-il des points communs à \mathcal{D}_a et \mathcal{C}_a ?
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles \mathcal{D}_a est tangente à \mathcal{C}_a ?

Exercice 2.19. (*)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

1. Le produit de 3 nombres réels est négatif si et seulement si l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.
2. Le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Exercice 2.20. (*)

1. Écrire la contraposée de l'assertion $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x + y) > 2 \Rightarrow (x > 1 \vee y > 1)$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.
3. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2.21. (*)

(Conjectures de Goldbach). La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair ≥ 4 est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair ≥ 7 est la somme de trois nombres premiers.

1. Traduire les deux énoncés par des assertions mathématiques à l'aide de symboles.
2. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible. La conjecture faible implique-t-elle la conjecture forte ?

Remarque : En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.

Exercice 2.22. (*) Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre $\frac{10^n - 1}{9}$ est entier. (On pourra faire une récurrence.)

Exercice 2.23. (*)** On dispose d'un jeu de $2n$ cartes rangées en un tas où toutes les cartes sont initialement face vers le bas. On considère deux types d'opérations sur ce jeu :

- A) on prend les deux cartes du dessus entre deux doigts, on retourne cet ensemble de deux cartes sans les séparer, puis on replace les deux cartes sur le dessus du paquet (la première carte devient ainsi la deuxième carte, mais retournée, et la deuxième carte devient la première carte, retournée)
- B) on coupe le jeu (c'est à dire qu'on prend le paquet des k cartes du dessus, pour un k dans $\{1, \dots, 2n - 1\}$ et on le met en-dessous du reste du paquet, sans retourner les cartes).

Montrer qu'après n'importe quel nombre d'opérations comme au-dessus, le jeu vérifie la propriété suivante¹⁴ :

(\mathcal{P}) Le nombre de cartes de position paire tournées « face vers le haut » est égal au nombre de cartes de position impaire tournées « face vers le haut ».

Exercice 2.24. (*) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si la somme $a + b$ est irrationnelle (c'est-à-dire $a + b \notin \mathbf{Q}$), alors a ou b est irrationnel. (On pourra considérer la contraposée.)

Exercice 2.25. (*) Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \geq -2$.

Exercice 2.26. ()**

On considère les propriétés suivantes de l'ordre total sur \mathbf{R} , valables pour tous a, b et c réels :

$$(16) \quad (a \leq b \text{ et } b \leq c) \Rightarrow a \leq c$$

$$(17) \quad a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

$$(18) \quad (a \leq b \text{ et } c \geq 0) \Rightarrow ac \leq bc$$

1. Résoudre dans \mathbf{R} l'inéquation $3x + 2 \leq -2x + 1$ d'inconnue x en utilisant uniquement (en ce qui concerne les propriétés de l'ordre total) les règles ci-dessus. À chaque étape, on indiquera la règle utilisée.
2. Montrer, en utilisant uniquement les règles (16) et (17), la règle suivante, valable pour tous réels a, b, c et d :

$$(a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d$$

3. Montrer, en utilisant uniquement les règles (16), (17) et (18), la règle suivante :

$$(a \leq b \text{ et } c \leq 0) \Rightarrow ac \geq bc$$

4. Montrer, en utilisant uniquement la règle (18), la règle suivante :

$$(a < b \text{ et } c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

Exercice 2.27. ()**

En utilisant un raisonnement direct, montrer que

14. Cette propriété est à la base du tour de magie "Royal Hummer" présenté dans le livre de Diaconis et Graham "Magical mathematics", chapitre 1

1. Si f est une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de \mathbf{Q} , il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 2.28. ()**

En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*),

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Soient a et b deux réels, montrer qu'on a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

3. Montrer que, quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.
5. Trouver tous les réels x tels que $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 2.29. ()**

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.
2. Soit n un entier naturel non nul et a_1, \dots, a_n n nombres réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.30. ()**

En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse,

1. Soit a, b deux nombres réels. Démontrer que l'assertion $\forall x \in [0, 1], ax + b \geq 0$ est équivalente à l'assertion $(b \geq 0 \wedge a + b \geq 0)$.
2. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1 , ni à D_2 . Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2 . Combien y a-t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$*)
3. Montrer que toute fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2.31. ()**

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que tout nombre entier supérieur ou égal à 12 peut s'écrire sous la forme $4a + 5b$, pour des entiers naturels a et b .
2. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n \geq 2, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 2.32. ()**

(Nombres de Fibonacci). On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n \geq 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n) , pour $1 \leq n \leq 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geq 2, \forall m \geq 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ (on pourra fixer un entier $n \geq 2$ et démontrer $\forall m \geq 1, F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ par récurrence double.)
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geq 2, F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Exercice 2.33. (*)** Déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe z telle que $\frac{z^2}{z+i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 2.34. ()**

Une récurrence boîteuse. La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geq 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbf{R}$, ils sont en fait tous égaux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

« quels que soient $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{R}$, on a $u_1 = u_2 = \dots = u_n$. »

Montrons $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. S'il n'y a qu'un nombre u_1 , il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geq 1$ un entier tel que $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} \in \mathbf{R}$.

D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \dots = u_n$.

Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \dots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille (u'_1, \dots, u'_n) , on obtient $u'_1 = \dots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \dots = u_n = u_{n+1}$.

Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Exercice 2.35. (*)** *Théorème de Helly en dimension 1*

Soit $n \geq 2$ un entier, et I_1, I_2, \dots, I_n des intervalles de \mathbf{R} . On considère l'assertion suivante :

si pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ l'intersection $I_i \cap I_j$ est non vide,
alors l'intersection globale $\bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} I_i$ est un intervalle non vide de \mathbf{R} .

Pour simplifier, on ne considère que des intervalles fermés.

1. Faites un dessin pour $n = 3$ pour vous convaincre que l'assertion est vraie dans ce cas.
2. Montrer que l'assertion est fausse si on suppose seulement que I_1, \dots, I_n sont des sous-ensembles de \mathbf{R} et pas nécessairement des intervalles.
3. En utilisant la notion de min et de max, donner une preuve directe de l'assertion.
4. Le théorème est-il encore vrai s'il y a une infinité d'intervalles ?

Fonctions et dénombrement

Ce chapitre est consacré aux notions de *fonction* et d'*application*, et à leur application dans des problèmes de dénombrement.

Cours

3.1. Fonctions, suites. — Intuitivement, une fonction f est un objet mathématique qui associe à tout élément x d'un ensemble E un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble F . On peut avoir comme image mentale la fonction “capitale”, qui associe à chaque pays sa capitale : E pourrait désigner l'ensemble des pays, et F l'ensemble des villes. Pour bien définir la fonction, il faut bien préciser l'ensemble E , l'ensemble F et la “règle de correspondance” qui permet d'obtenir x à partir de $f(x)$. Il se trouve qu'on peut formuler cette règle en termes ensemblistes, et on peut définir une fonction de manière ensembliste de la façon suivante.

Définition 3.1

Soient E et F des ensembles. Une *fonction f de E dans F* , aussi appelée *application de E dans F* est définie par son *graphe* : c'est un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$, tel que pour tout $x \in E$, exactement un élément y de F vérifie $(x, y) \in \Gamma_f$. Cet élément y est l'*image* de x et est noté $f(x)$. La notation standard est la suivante :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

L'ensemble E est appelé *l'ensemble de départ de la fonction f* et F est *l'ensemble d'arrivée*.

Remarque 3.2. — Parfois, on distingue les notions de fonction et d'application. Une application de E dans F correspond alors à la définition ci-dessus, mais une fonction

n'est pas nécessairement définie partout : une fonction associe à un élément de l'ensemble de départ au plus une valeur de l'ensemble d'arrivée. L'ensemble de définition d'une telle fonction $f : E \rightarrow F$ est un sous-ensemble de E . Cette distinction est parfois pratique, mais dans ce cours nous garderons la notion définie ci-dessus : les fonctions et les applications sont la même chose, et l'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours définie.

Exemple 3.3. — Si $E = \mathbf{R}^*$ et $F = \mathbf{R}$, l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \mid xy = 1\}$ définit la fonction

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Par contre, l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas le graphe d'une fonction, en effet $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ appartiennent tous deux à Γ , ce qui contredit la définition précédente.

Remarque 3.4. — Les définitions redonnent que le graphe Γ_f est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où x parcourt le domaine de définition \mathcal{D}_f . On retrouve donc la description du graphe que vous avez déjà rencontré dans le secondaire :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Mais il faut saisir que, du point de vue de la théorie des ensembles, c'est le graphe qui définit la fonction.

Remarque 3.5. — Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si elles ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et le même graphe.

Représentation 3.6. — Pour des ensembles finis, il est parfois commode de représenter le graphe d'une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F par des flèches entre deux patatoïdes : pour chaque élément a de E , on trace un point dans le patatoïde correspondant à E et pour chaque élément b de F , on trace un point dans le patatoïde de F , en donnant un nom à chacun de ces points ; ensuite pour chaque couple (a, b) on trace une flèche allant du point correspondant à a vers le point correspondant à b .

À titre d'exemple, soient $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$. Considérons l'application de E dans F qui à un nombre associe le reste de sa division euclidienne par 2 : 0 s'il est pair, 1 s'il est impair. Le graphe de cette application est :

$$\Gamma = \{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (3, 1)\},$$

sa représentation graphique est donnée sur la figure 7.

Pour des fonctions d'une partie de \mathbf{R} vers \mathbf{R} , on représente le graphe comme dans le secondaire en dessinant pour chaque élément (x, y) du graphe le point de coordonnées

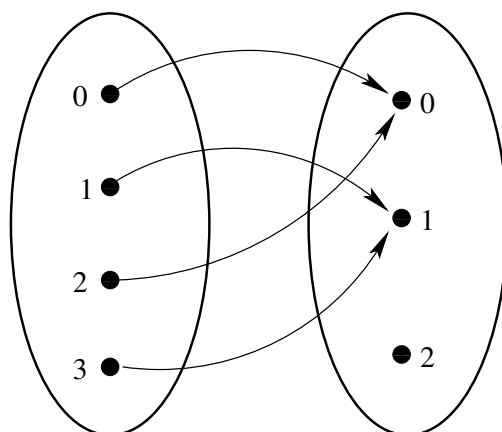


FIGURE 7. Représentation graphique d'une application de $\{0, 1, 2, 3\}$ vers $\{0, 1, 2\}$.

(x, y) . Ainsi, dans la figure 8, nous avons représenté une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On constate que pour tout x fixé de l'ensemble de définition (représenté en vert sur l'axe des abscisses), la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée est x croise le graphe, tracé en rouge, en un unique point de coordonnées $(x, f(x))$ la valeur de $f(x)$, qui est la deuxième coordonnée de ce point est donc bien déterminée par x .

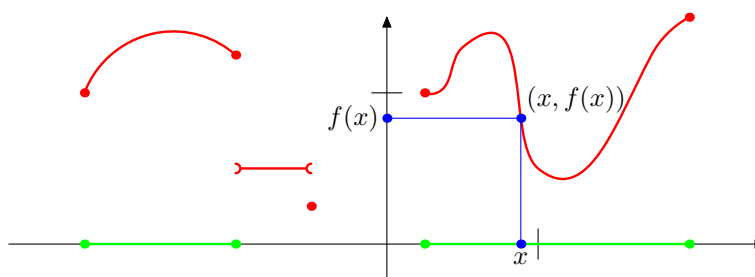
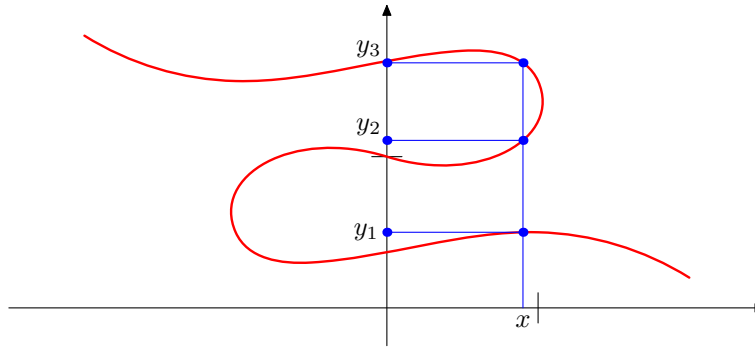


FIGURE 8. Représentation graphique d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R}

Par contre, pour la partie Γ de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ représentée en rouge dans le dessin de la figure 9, on peut trouver un nombre réel x , tel que la droite verticale correspondant aux points dont la première coordonnée vaut x croise l'ensemble Γ en trois points distincts (x, y_1) , (x, y_2) et (x, y_3) . Donc l'ensemble Γ n'est pas le graphe d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} ; pour le nombre réel x , on ne peut pas définir de manière univoque le nombre réel $f(x)$.

FIGURE 9. Ensemble qui n'est pas le graphe d'une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} **Définition 3.7**

Une *suite* d'éléments de E est une fonction de \mathbf{N} dans E . De préférence à la notation fonctionnelle, on emploie pour les suites une notation *indicielle*, et on parlera de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où u_n désigne l'image de n par la fonction u .

Remarque 3.8. — Par abus de langage, si $n_0 \in \mathbf{N}$, on appellera également suite d'éléments de E une application de $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq n_0\}$ dans E , on note alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Exemples 3.9. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie pour $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Ainsi $u_0 = 1, u_1 = -1, \dots$

On peut aussi définir une suite par récurrence. Par exemple soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 3u_n + 4$. Ainsi, $u_1 = 4, u_2 = 16, \dots$

Définition 3.10


Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

1. Soit A un sous-ensemble de E . On appelle *image de A par f* et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A .

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

2. Soit B un sous-ensemble de F . On appelle *image réciproque (ou préimage) de B par f* et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B .

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

 Attention à la notation f^{-1} : elle ne signifie pas que f est inversée. C'est une convention pour désigner un sous-ensemble de l'espace de départ.

Exemple 3.11. — Dans l'application de la figure 7, L'image de $\{0, 2\}$ est le singleton $\{0\}$. L'image réciproque de $\{1\}$ est $\{1, 3\}$. L'image réciproque de $\{2\}$ est l'ensemble vide.

Terminologie 3.12

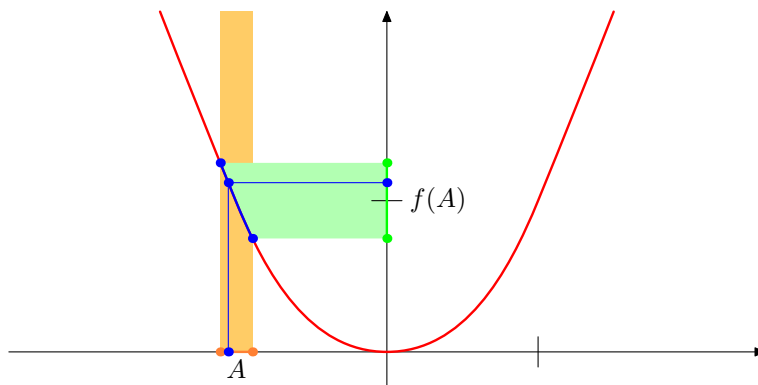
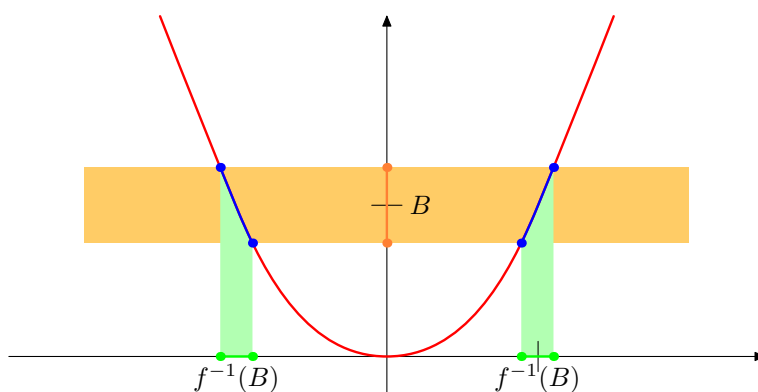
Un élément x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle un *antécédent* de y . D'après la définition 3.10, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

Remarque 3.13. — On pourra noter que pour une partie B de l'ensemble d'arrivée F , la partie $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B .

Dessin 3.14. — Sur la figure 10, on considère l'image par une application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ d'un segment représenté en orange sur la figure. Pour chaque x de ce segment, on peut construire comme précédemment son image $f(x)$; l'ensemble $f(A)$ est formé de tous les $f(x)$ où x parcourt le segment. Il est représenté en vert. Autrement dit, on regarde la partie du graphe dessinée en bleue, qui est obtenue en intersectant la bande verticale orange correspondant aux points du plan dont la première coordonnée est dans A avec le graphe de la fonction. On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des ordonnées, ce qui donne, dans cet exemple, un intervalle correspondant à $f(A)$.

Pour la même application f , étant donné un intervalle B de \mathbf{R} , on considère sur la figure 11 l'intersection du graphe avec la bande horizontale orange correspondant aux points dont la seconde coordonnée est dans B . On projette alors cette partie du graphe sur l'axe des abscisses ce qui donne alors la partie correspondant à $f^{-1}(B)$ qui est ici la réunion de deux intervalles.

Remarquons que les notions d'ensemble image et d'image réciproque permettent de construire des ensembles.

FIGURE 10. Image d'une partie A .FIGURE 11. Image réciproque d'une partie B .

On trouve souvent une notation alternative à la notation $f(A)$ lorsque f est une fonction, cela correspond à ce qu'on appelle la définition d'un ensemble *en fonction*.

Notation 3.15

Si f est une fonction de E dans F et $A \subset E$, on peut noter, au lieu de $f(A)$:

$$\{f(x); x \in A\}.$$

On dit que cet ensemble est défini *en fonction*.

Cette notation est souvent utilisée avec des expressions explicites à la place de f , comme dans l'exemple suivant.

Exemple 3.16. — L'ensemble $\{2n + 1; n \in \{1, 2, 3\}\}$ doit être compris comme suit. Notons f la fonction de \mathbf{N} dans \mathbf{N} qui à n associe $2n + 1$. L'ensemble $\{f(n); n \in \{1, 2, 3\}\}$ est l'ensemble obtenu en partant de $\{1, 2, 3\}$ et en appliquant la fonction f . C'est donc l'ensemble $\{3, 5, 7\}$. C'est la même chose que l'ensemble $f(\{1, 2, 3\})$.

Dans la description précédente le point-virgule a le sens de « où ». Ainsi on peut lire $\{2n + 1; n \in \{1, 2, 3\}\}$ comme « l'ensemble des nombres de la forme $2n + 1$, où n appartient à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ ».

Définition 3.17

Soient E , F , et G des ensembles, f une application de E vers F et g une application de F vers G . On définit la *composée* de f par g , notée $g \circ f$, comme l'application de E vers G qui à x associe $g \circ f(x) = g(f(x))$.

 Attention à l'ordre des applications dans l'écriture $g \circ f$: c'est l'ordre inverse des flèches dans le schéma ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) . \end{array}$$

Définition 3.18

Soient E et F des ensembles et f une application de E vers F . On dit que f est :

1. *injective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au plus* un antécédent dans l'ensemble de départ.

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \left(f(x_1) = f(x_2) \right) \implies x_1 = x_2 .$$

2. *surjective* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *au moins* un antécédent dans l'ensemble de départ.

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y .$$

3. *bijection* si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède *exactement* un antécédent dans l'ensemble de départ.

Une application est donc bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective (voir figure 12). On dit également *injection* à la place d'application injective, *surjection* à la place d'application surjective et *bijection* à la place d'application bijective.

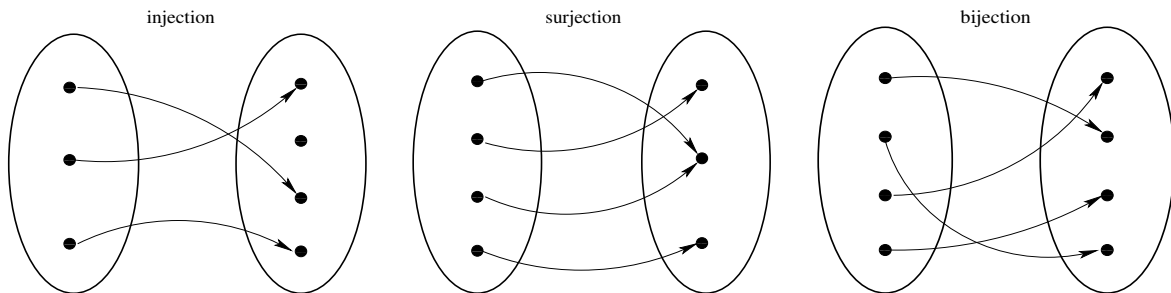


FIGURE 12. Représentations graphiques d'une injection, d'une surjection et d'une bijection.

Définition 3.19

Si une application f de E vers F est bijective, tout élément de F a un antécédent et un seul par f . On peut alors définir l'application réciproque de f , notée f^{-1} , par


$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y.$$

Si f est bijective, alors $f^{-1} \circ f$, la composée de f par son application réciproque f^{-1} , est l'application qui à x associe x , de E vers E . On l'appelle *application identique de E* , ou *identité de E* .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{f^{-1}} & E \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x. \end{array}$$

Les notations pour l'application réciproque et pour l'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée F sont liées par la relation :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

 On prendra garde au fait que si l'image réciproque d'une partie est définie pour toute application, l'application réciproque, quant à elle, n'est définie que pour une application bijective.

La notion de bijection est importante pour montrer que deux ensembles ont le même cardinal.

Définition 3.20

Un ensemble E est dit *fini* s'il existe un entier naturel n et une bijection de E dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Cet entier n est alors unique et est appelé le *cardinal de E* . On le note $|E|$, ou $\sharp E$, ou bien encore $\text{card}(E)$.

Remarque 3.21. — Cette définition contient en fait un résultat très intuitif : le fait que $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, m \rrbracket$ sont en bijection si et seulement si $n = m$.

Remarquons aussi que l'ensemble vide est fini ; c'est l'unique ensemble de cardinal 0. Par ailleurs, un ensemble E est de cardinal 1 si et seulement c'est un singleton, c'est-à-dire qu'il a un unique élément. Si on note a cet élément, on obtient l'égalité $E = \{a\}$.

On admettra les résultats intuitifs suivants :

Théorème 3.22 (admis)

1. **Principe d'addition** : Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints est la somme des cardinaux.
2. **Principe de multiplication** : Le cardinal du produit de deux ensembles finis est le produit des cardinaux.

En fait, le principe d'addition peut être affiné.

Théorème 3.23 (admis)

Principe d'inclusion-exclusion : Soient A et B deux ensembles finis, alors on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

On admet ce théorème mais le résultat est intuitif : pour compter le nombre d'éléments dans $A \cup B$, on compte les éléments de A , puis on compte les éléments de B , et enfin on retire une fois ceux que l'on a compté deux fois.

3.2. Sommes et produits. —

Commençons par les sommes.

L'écriture

$$\sum_{k=0}^5 2^k$$

se lit « somme pour k allant de zéro à cinq de deux puissance k ». C'est une notation abrégée pour :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5.$$

La lettre k est l'*indice de sommation*. On la remplace successivement par toutes les valeurs entières comprises entre les deux bornes, qui sont 0 et 5 dans notre exemple. Donnons une définition plus précise de ces notations :

Définition 3.24

Soient $p, q \in \mathbf{Z}$ des entiers relatifs tels que $p \leq q$. Soit (u_p, \dots, u_q) une famille de $q - p + 1$ nombres réels (ou complexes) On définit

$$\sum_{k=p}^q u_k := u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$$

Le terme de gauche se lit « somme pour k allant de p à q des u_k ». De même

$$\prod_{k=p}^q u_k := u_p \times u_{p+1} \times \dots \times u_q$$

et se lit « produit pour k allant de p à q des u_k »

Remarque 3.25. — Les bornes peuvent elles-mêmes être des variables. Par exemple, pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n 2^k$$

désigne la somme

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n .$$

Rappelons que, par convention, $a^0 = 1$ pour tout nombre réel a . En revanche, les bornes ne peuvent dépendre de l'indice de sommation, ainsi

$$\sum_{k=0}^k 2^k$$

n'a pas de sens, car on ne sait où arrêter la somme. Prenez l'habitude d'écrire les sommes sous forme développée quitte à introduire des points de suspension entre les premiers termes et les derniers.

On introduit la notation suivante qui est plus générale. Le recours aux ensembles rend parfois les manipulations plus explicites.

Définition 3.26

Soit E un ensemble fini et $f : E \rightarrow \mathbf{C}$ (ou \mathbf{R} , ou \mathbf{Z}) une fonction. Alors l'expression

$$\sum_{x \in E} f(x)$$

désigne la somme de toutes les valeurs $f(x)$ où x parcourt l'ensemble E .

Exemple 3.27. — L'expression $\sum_{k \in [1,5]} 2^k$ désigne la même chose que $\sum_{k=1}^5 2^k$, c'est-à-dire la somme $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

L'expression $\sum_{k \in [1,5]} 2^n$ désigne la somme de 5 copies de l'expression 2^n , d'où $\sum_{k \in [1,5]} 2^n = 5 \cdot 2^n$. Dans l'expression précédente, la variable n est donc libre puisqu'elle n'a pas été introduite, tandis que la variable k est muette : l'écriture $\sum_{k \in [1,5]}$ l'introduit.

On définit de la même façon l'écriture $\prod_{x \in E} f(x)$.

Cette écriture en termes d'ensemble peut simplifier les manipulations, grâce aux remarques ci-dessous :

Proposition 3.28

- (Principe d'addition) Étant donné un ensemble E tel que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, et une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{x \in A} f(x) + \sum_{x \in B} f(x).$$

- (Principe de changement de variable) Étant donné deux ensembles E, F , une fonction $g : F \rightarrow E$ qui est une bijection, et une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{C}$, on a

$$\sum_{x \in E} f(x) = \sum_{y \in F} f(g(y)).$$

Exemple 3.29. — Voici quelques exemples d'égalités illustrant la manipulation des indices et des bornes. Nous donnons sous chaque exemple une écriture sous forme développée.

Dans ce premier exemple, on utilise la bijection $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ qui retranche 1 à chaque entier.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^k &= \sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} 2^k = \sum_{h \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} 2^{h+1} = \sum_{h=0}^{n-1} 2^{h+1} \\ 2^1 + \dots + 2^n &= 2^{0+1} + \dots + 2^{n-1+1}. \end{aligned}$$

L'indice de sommation peut être remplacé par n'importe quel autre : comme on l'a déjà dit, c'est une variable muette. Dans ce second exemple, on change une fois d'indice de sommation, on utilise la bijection $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ qui ajoute n à chaque entier, et on regroupe deux ensembles de sommation via $\llbracket 0, n \rrbracket \cup \llbracket n+1, 2n \rrbracket = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n 2^k + \sum_{h=1}^n 2^{n+h} &= \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} 2^k + \sum_{h \in \llbracket 1, n \rrbracket} 2^{n+h} \\ &= \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} 2^k + \sum_{k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket} 2^k = \sum_{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k \\ (2^0 + \dots + 2^n) + (2^{n+1} + \dots + 2^{2n}) &= 2^0 + \dots + 2^{2n}. \end{aligned}$$

Observez que la borne peut être une des variables de la quantité à sommer, comme dans l'exemple

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^n &= \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} 2^n = (n+1)2^n \\ 2^n + \cdots + 2^n &= (n+1)2^n.\end{aligned}$$

Dans cet exemple la quantité à sommer ne dépend pas de l'indice de sommation : celle-ci a pour seul effet de compter les termes. Attention, pour $m \leq n$, il y a $n - m + 1$ termes dans la somme de m à n .

Dans ce dernier exemple, une double somme est une somme de sommes, et on peut intervertir les deux tant que les bornes de la seconde somme ne dépendent pas de l'indice de sommation de la première somme.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^1 2^{k+h} &= \sum_{(k,h) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, 1 \rrbracket} 2^{k+h} = \sum_{(h,k) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket} 2^{k+h} = \sum_{h=0}^1 \sum_{k=0}^n 2^{k+h} \\ (2^0 + 2^1) + \cdots + (2^n + 2^{n+1}) &= (2^0 + \cdots + 2^n) + (2^1 + \cdots + 2^{n+1}).\end{aligned}$$

Exemple 3.30. — Voici un enchaînement d'égalités, montrant que la somme des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n vaut $(2^{n+1} - 1)$ (c'est un cas particulier d'une formule à connaître que nous verrons plus loin). Pour chaque ligne de calcul, nous donnons à droite l'écriture sous forme développée. On rappelle que $2^0 = 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^k &= 2 \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) &= 2(2^0 + \cdots + 2^n) - (2^0 + \cdots + 2^n) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n 2^{k+1} \right) - \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) &= (2^1 + \cdots + 2^{n+1}) - (2^0 + \cdots + 2^n) \\ &= \left(\sum_{h=1}^{n+1} 2^h \right) - \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) &= (2^1 + \cdots + 2^{n+1}) - (2^0 + \cdots + 2^n) \\ &= \left(\sum_{h \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} 2^h \right) - \left(\sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} 2^k \right) &= (2^1 + \cdots + 2^{n+1}) - (2^0 + \cdots + 2^n) \\ &= 2^{n+1} - 2^0 &= 2^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Ce que nous venons de voir pour les sommes s'applique aussi aux produits. Le produit des entiers de 1 à n intervient dans de nombreuses formules.

Définition 3.31

La *factorielle* de n , notée « $n!$ », est définie comme le produit

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n .$$

Il est souvent utile d'étendre la définition de la factorielle en convenant que $0! = 1$.

Voici les premières valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

3.3. Dénombrement. —**Définition 3.32**

Soit X un ensemble. On appelle permutation de X une application bijective de X dans X . Soit n un entier positif ou nul, On appelle *permutation des nombres de 1 à n* une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. L'ensemble des permutations des nombres de 1 à n est noté \mathfrak{S}_n ¹⁵.

Une permutation u des nombres de 1 à n peut être vue comme un n -uplet d'entiers (u_1, \dots, u_n) dans lequel chaque entier entre 1 et n apparaît une et une seule fois. Par exemple $(5, 3, 2, 4, 1)$ est une permutation des nombres de 1 à 5.

En effet soit (u_1, \dots, u_n) un tel n -uplet. On définit alors l'application σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même par $\sigma(k) = u_k$ si $1 \leq k \leq n$. σ est une bijection.

Réciproquement, à une bijection σ de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, on associe le n -uplet $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$.

Théorème 3.33

Le nombre de permutations des nombres de 1 à n est $n!$.

Autrement dit, on a $|\mathfrak{S}_n| = n!$.

Démonstration. — On montre le théorème par récurrence sur n .

Si $n = 1$, la seule permutation des entiers de 1 à 1 est (1) .

15. La lettre \mathfrak{S} est une lettre S majuscule dans l'alphabet gothique.

On suppose donc que le résultat est vrai pour l'entier n . Montrons-le pour l'entier $n+1$. Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq n+1$ et comptons le nombre A_k de permutations

$$(u_1, \dots, u_{n+1})$$

telles que $u_k = n+1$. À une telle permutation, associons le n -uplet :

$$(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+1}).$$

C'est une permutation des nombres de 1 à n . Inversement étant donnée une permutation (v_1, \dots, v_n) des entiers de 1 à n , alors

$$(v_1, \dots, v_{k-1}, n+1, v_{k+1}, \dots, v_n)$$

est une permutation des entiers de 1 à $n+1$ dont le k -ième terme est $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient que $A_k = n!$. Donc grâce au principe de d'addition, le nombre total de permutations des nombres de 1 à $n+1$ est :

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!,$$

ce qui montre le résultat pour $n+1$. □

Remarques 3.34. — i) De manière générale, si X est un ensemble fini de cardinal n l'ensemble des permutations de X est fini de cardinal $n!$.

ii) Pour ordonner n objets, il faut associer à chacun un nombre entre 1 et n de sorte que chaque nombre renvoie à un objet et un seul. Il y a autant de manières de le faire que de permutations des n premiers entiers : $n!$.

Définition 3.35

Le *nombre de combinaisons* de k objets parmi n est le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k . On le note

$$\binom{n}{k}.$$

Remarque 3.36. — C'est le nombre de manières de choisir k objets parmi n , sans distinguer leur ordre. La notation $\binom{n}{k}$ que nous utilisons ici, de préférence à l'ancienne notation C_n^k , est conforme aux programmes en vigueur et à l'usage international. On peut éventuellement la lire « k parmi n ».

Noter que si k n'est pas dans l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$, il n'y a aucun sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k , et on a donc $\binom{n}{k} = 0$ dans ce cas. Aussi, il n'y a qu'un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal 0, à savoir l'ensemble vide \emptyset , et il n'y a qu'un sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal n , à savoir l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ tout entier.

Proposition 3.37

Pour n un entier naturel et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$(20) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration. — Pour choisir k nombres dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on peut se donner une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$, et décider de retenir les k premiers nombres. Parmi les permutations, toutes celles qui auront en commun leurs k premiers nombres conduiront au même choix. Il faut donc diviser par le nombre de permutations des k objets choisis, et par le nombre de permutations des $n - k$ objets qui ne l'ont pas été. On arrive alors à la formule voulue. \square

Observez que (20) ne change pas si on remplace k par $n - k$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Choisir k objets parmi n (ceux que l'on garde) revient à en choisir $n - k$ (ceux que l'on laisse).

Voici une autre expression de $\binom{n}{k}$.

$$(21) \quad \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{h=0}^{k-1} (n-h) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\ 2\ \cdots\ k}.$$

Notez qu'il y a k facteurs au numérateur, comme au dénominateur. On obtient cette formule en simplifiant le quotient $n!/(n-k)!$ dans (20).

On peut aussi raisonner comme suit. Il y a n façons de choisir le premier objet, puis $n - 1$ de choisir le second (puisqu'un objet a déjà été choisi), etc. Pour choisir le k -ième objet, il reste $n - (k - 1)$ possibilités. Ceci correspond au numérateur de (21). Cette manière de procéder retourne une liste ordonnée. Il faut donc diviser par le nombre d'ordres possibles des k objets choisis, qui est $k!$.

Observez les relations suivantes, faciles à déduire de (20) ou (21) et de la définition de la factorielle.

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Pour calculer $\binom{n}{k}$ en pratique, on n'utilise ni (20) ni (21). Le calcul récursif par la formule du *triangle de Pascal* (connue des indiens, des chinois et des arabes bien avant Pascal) est beaucoup plus rapide.

Proposition 3.38 (Formule du triangle de Pascal)

$$(22) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Nous conseillons au lecteur de démontrer cette formule à partir des expressions (20) et (21). Voici la justification combinatoire. Supposons que parmi les n objets dont k doivent être choisis, l'un d'entre eux soit distingué (disons qu'il est rouge). Parmi les choix possibles de k objets, certains ne contiennent pas l'objet rouge, d'autres le contiennent. Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$, car les k objets sont choisis parmi les $n-1$ différents de l'objet rouge. Les choix contenant l'objet rouge sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ car l'objet rouge ayant été retenu, il reste $k-1$ objets à choisir parmi les $n-1$ autres. Voici, disposées en triangle, les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour n allant de 0 à 6.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Chaque valeur est la somme de celle qui est au-dessus, et de celle qui est à gauche de celle qui est au-dessus. S'il n'est pas indispensable de connaître ce tableau par cœur, il est souvent utile de savoir le réécrire rapidement.

3.4. Trois formules à connaître. — Les formules données par les trois théorèmes qui suivent sont souvent utiles.

Théorème 3.39

Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers vaut $n(n+1)/2$.

$$(23) \quad \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. — Nous donnons d'abord la démonstration par récurrence. Nous verrons ensuite une justification géométrique et une justification combinatoire. L'hypothèse de récurrence est :

$$H(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Supposons maintenant que $H(n)$ est vraie. Écrivons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1).$$

En appliquant $H(n)$, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Le membre de droite s'écrit :

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Nous avons donc démontré l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

c'est-à-dire que $H(n+1)$ est vraie. □

Voici maintenant une justification géométrique. Considérons un rectangle dont la largeur et la hauteur valent respectivement $n + 1$ et n unités (figure 13). Ce rectangle peut être découpé en deux moitiés superposables. Chacune est formée de $1 + 2 + \dots + n$ carrés de côté unité, et couvre une surface égale à la surface du rectangle divisée par 2, soit $n(n + 1)/2$.

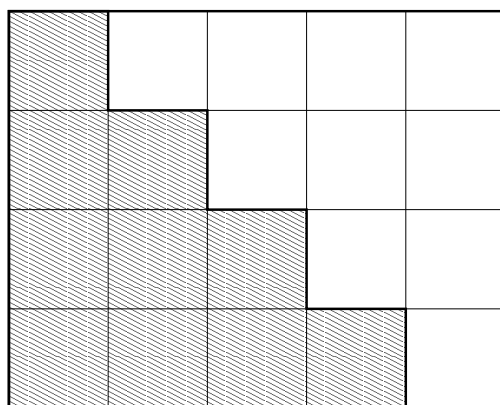


FIGURE 13. La somme des n premiers entiers vaut $n(n + 1)/2$.

Voici maintenant une explication combinatoire. Autour d'une table $n + 1$ personnes sont assises et s'appêtent à trinquer. Combien de bruits de verre entendra-t-on ? Il y a deux manières de compter. La première consiste à prendre les personnes dans l'ordre : la première doit trinquer avec les n autres. La seconde, qui a déjà trinqué avec la première, doit encore trinquer avec $n - 1$ autres. Ainsi de suite jusqu'à la n -ième personne, qui ayant déjà trinqué avec les $n - 1$ autres n'aura plus que la n -ième avec qui trinquer. On entendra donc $n + (n - 1) + \dots + 1$ bruits de verre. La seconde manière de compter consiste à remarquer que le nombre de bruits de verre est égal au nombre de combinaisons de 2 personnes parmi $n + 1$:

$$\binom{n + 1}{2} = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Les deux formules suivantes portent sur deux variables a et b que vous pouvez voir dans un premier temps comme deux réels. Ces formules sont aussi valables pour des nombres complexes, et plus généralement pour des objets quelconques que l'on peut ajouter et multiplier de façon commutative (par exemple des polynômes ou des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R}).

La première généralise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Théorème 3.40

Pour tout entier n ,

$$(24) \quad a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right) = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n).$$

(Rappelons la convention $a^0 = b^0 = 1$.)

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence. L'affirmation est vraie pour $n = 0$ puisque :

$$\sum_{k=0}^0 a^0 b^0 = 1.$$

Supposons le résultat vrai pour n .

$$\begin{aligned} (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k} b^k \right) &= (a - b) \left(\left(\sum_{k=0}^n a^{n+1-k} b^k \right) + b^{n+1} \right) \\ &= (a - b) \left(a \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right) + b^{n+1} \right) \\ &= a(a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right) + (a - b)b^{n+1} \\ &= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a - b)b^{n+1} \\ &= a^{n+2} - b^{n+2} \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence a été utilisée pour obtenir l'avant-dernière égalité. Le résultat est vrai pour $n + 1$, donc pour tout n . \square

Des cas particuliers du théorème 3.40 reviennent souvent dans les calculs. Nous avons déjà rencontré le cas $a = 2, b = 1$. Vous pouvez retenir le suivant :

$$(1 - x) \left(\sum_{k=0}^n x^k \right) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

Plus généralement, on a la relation :

Proposition 3.41 (Somme d'une série géométrique)

Soit x un nombre réel différent de 0 et de 1 et soient p et q des entiers relatifs tels que $p \leq q$. Alors :

$$\sum_{k=p}^q x^k = \frac{x^p - x^{q+1}}{1 - x}.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que :

$$(1 - x) \left(\sum_{k=p}^q x^k \right) = \sum_{k=p}^q x^k - \sum_{k=p+1}^{q+1} x^k = x^p - x^{q+1}.$$

□

Une autre formule à connaître est celle du *binôme de Newton*, qui généralise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Théorème 3.42 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout entier $n \geq 1$,

$$(25) \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = b^n + nb^{n-1}a + \cdots + nba^{n-1} + a^n.$$

À cause de (25), les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent les *coefficients binomiaux*.

Démonstration. — Ici encore la démonstration se fait par récurrence, nous donnerons ensuite une justification combinatoire. Pour $n = 1$:

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0.$$

Supposons que la formule est vraie pour n et démontrons-la pour $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\
 &= (a + b) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) \\
 &= \left(\sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} \right) + \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) \\
 &= a^{n+1} + \left(\sum_{h=1}^n \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
 &= a^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \right) + b^{n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
 \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, nous avons appliqué la formule du triangle de Pascal (22). Le résultat est démontré. \square

Voici maintenant la justification combinatoire. La quantité $(a + b)^n$ est le produit de n facteurs, chacun contenant deux termes a et b . Quand on développe le produit, on prend dans le premier facteur un des deux termes, on le multiplie par un terme du second facteur, ainsi de suite jusqu'au n -ième facteur. Le produit obtenu est égal à $a^k b^{n-k}$ si on a choisi le terme a dans k facteurs et le terme b dans les $n - k$ autres. Le nombre de produits égaux à $a^k b^{n-k}$ est le nombre de combinaisons de k facteurs parmi n , soit $\binom{n}{k}$.

Exercices

Fonctions

Exercice 3.1. (*)

On note \mathbf{R} l'ensemble des nombres réels. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont les graphes d'une application d'un sous-ensemble de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . Lorsque l'ensemble est le graphe d'une application, donner son ensemble de départ.

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x + 1 = 0\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2\}$;
3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \text{ et } y \geq 0\}$.

Exercice 3.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et B l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{x + 2; x \in A\}$,
2. $\{2x; x \in B\}$,
3. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
4. $\{x + y; (x, y) \in A \times B\}$,
5. $\{x + y; (x, y) \in A \times A\}$,
6. $\{x + x; x \in A\}$,
7. $\{xy; (x, y) \in A \times B\}$,

Exercice 3.3. (*/**)

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (aucune justification n'est attendue).

1. $\{3n + 2; n \in \{1, 2, 3\}\}$,
2. $\{2n + 1; n \in \llbracket 2, 5 \rrbracket\}$,
3. $\{3n + 2; n \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{4n + 3; n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$,
4. $\{3n + 2; n \in \{1, 2, 3\}\} \cap \{4n + 3; n \in \{1, 2, 3, 4\}\}$,
5. $\left\{ \frac{p}{q}; p \in \{1, 2, 3, 4\}, q \in \{1, 2, 3, 4\} \right\}$.

Exercice 3.4. ()** Soient I un intervalle non vide de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

5. La fonction f présente un minimum.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 3.5. ()**

Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations :

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.
9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leq 0 \text{ ou } f(x) \geq 0)$.

Exercice 3.6. (*)

Soient f et g les applications de \mathbf{N} dans \mathbf{N} définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, f(n) = 2n \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.

Exercice 3.7. ()**

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E . On appelle "fonction indicatrice de A " et on note \mathbf{I}_A l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E . Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E, \mathbf{I}_{cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E, \mathbf{I}_{A \cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) \mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E, \mathbf{I}_{A \cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x) \mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 3.8. ()**

Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F . Soient A et A' deux sous-ensembles de E . Soient B et B' deux sous-ensembles de F . Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.
3. $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. $f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. $f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $f(f^{-1}(B)) = B$.
9. $f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. $f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

Exercice 3.9. (*) Soit A une partie de \mathbf{R} et f une application de A dans \mathbf{R} .

1. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $A =]-1; 1[\cup]2, 3[$, que f est dérivable sur A et que $f'(x) > 0$ pour tout x dans A . Peut-on en déduire que f est injective ?

Exercice 3.10. ()** Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G .

1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

$$g \circ f \text{ injective} \implies g \text{ injective.}$$

Exercice 3.11. ()** Soit f une application de E dans F . Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est injective,
- (ii) $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 3.12. (*) Soit I un intervalle de \mathbf{R} et f une application de I dans \mathbf{R} . On suppose que f est continue sur I .

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que $f(I)$ est un intervalle.
2. On considère la fonction f de $I =]-\infty; 2]$ dans \mathbf{R} , définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Montrer que f réalise une bijection de I sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3.13. Soit f l'application de $[0, 1[$ dans $]0, 2]$ définie par :

$$f : \begin{cases} [0, 1[& \rightarrow &]0, 2] \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{cases} \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. L'application f est-elle bijective ?
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\left(f(x) \geq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$$

Exercice 3.14. ()** Soient a et b deux nombres complexes. Soit f la fonction de \mathbf{C} dans \mathbf{C} définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & az + b \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijective si et seulement si $a \neq 0$.
2. On suppose que a est non nul. Montrer que si ABC est un triangle équilatéral, alors $f(A)f(B)f(C)$ est encore un triangle équilatéral.

Exercice 3.15. ()** Soit f la fonction de \mathbf{C} dans \mathbf{C} définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 \end{cases}$$

1. On dit que z est un point fixe de f si $f(z) = z$. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on notera a .
2. Montrer que $f(z)$ est l'image de z par la rotation de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 3.16. ()** Soit f la fonction de \mathbf{C} dans \mathbf{C} définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{z} + 1 \end{cases}$$

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est une droite, que l'on notera Δ .
2. Montrer que $f(z)$ est l'image de z par la symétrie orthogonale d'axe Δ .

Exercice 3.17. ()** Soient a et b deux nombres complexes. On pose :

$$f : \begin{cases} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & a\bar{z} + b \end{cases}$$

Soient M, N, P et Q quatre points du plans tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$. On note $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$. Montrer que f « renverse les angles », au sens suivant :

$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}) = -(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}).$$

Sommes et produits

Exercice 3.18. (*)

Calculer les nombres suivants.

$$\begin{array}{ccc} \sum_{k=1}^3 \sum_{h=1}^k 1, & \sum_{k=1}^3 \sum_{h=1}^k h, & \sum_{k=1}^3 \sum_{h=1}^k k, \\ \sum_{k=1}^3 \prod_{h=1}^k h, & \sum_{k=1}^3 \prod_{h=1}^k k, & \prod_{k=1}^3 \sum_{h=1}^k h, \\ \prod_{k=1}^3 \sum_{h=1}^k k, & \prod_{k=1}^3 \prod_{h=1}^k h, & \prod_{k=1}^3 \prod_{h=1}^k k. \end{array}$$

Exercice 3.19. (*)

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Écrire à l'aide des symboles \sum et \prod les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3.20. (**)

Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n (k+1) = (n+1)(n+2)/2$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

3. $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4.$
4. $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1.$
5. $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$
6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3, \prod_{k=3}^n \frac{k^2 - 4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$
7. $\forall n \in \mathbf{N}^*, \prod_{k=1}^n (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^n (2k-1).$

Dénombrement

Exercice 3.21. (*) Soient p et q deux entiers naturels non nuls et soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{cases} \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\} & \rightarrow \{1, \dots, pq\} \\ (i, j) & \mapsto j + (i-1)q \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie (i.e que ses images sont bien dans $\{1, \dots, pq\}$) et que c'est une bijection.
2. Cette bijection correspond à énumérer les cases d'un tableau à p lignes et q colonnes en le parcourant de gauche à droite, ligne par ligne en partant de la première ligne. Donner une bijection correspondant à l'énumération du même tableau, mais en le parcourant de haut en bas, colonne par colonne, en partant de la première colonne.

Exercice 3.22. (**) Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathcal{A}_{n,2}$ l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$. Pour a dans $\{1, \dots, n\}$, on note E_a l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$ dont la première coordonnée est a .

1. Quel est le cardinal de E_a ?
2. Montrer que si a et a' sont distincts, alors E_a et $E_{a'}$ sont disjoints.
3. Montrer que

$$\mathcal{A}_{n,2} = \bigcup_{a \in \{1, \dots, n\}} E_a$$

et représenter cette relation par un arbre de dénombrement.

4. En déduire que $|\mathcal{A}_{n,2}| = n(n-1)$.
5. Montrer que $\mathcal{A}_{n,2}$ est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $\{1, 2\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

Exercice 3.23. (*)

Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactly 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 3.24. (*)

On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des 26 lettres de l'alphabet (deux jetons distincts portent donc deux lettres distinctes). On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 3.25. ()**

1. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7 ?
2. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 3000 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?

Identités remarquables

Exercice 3.26. ()**

Démontrer les égalités suivantes, en utilisant des manipulations et des identités algébriques (sans utiliser de récurrence).

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!, \forall n \geq 1.$ 2. $\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \forall n \geq 2.$ 3. $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1, \forall n \geq 1.$ 4. $\prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}, \forall n \geq 2.$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\sum_{k=0}^n (n-k) = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbf{N}.$ 6. $\sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \forall n \in \mathbf{N}.$ 7. $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, \forall n \in \mathbf{N}.$ 8. $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2, \forall n \geq 2.$ |
|---|---|

$$9. \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{k/2} = \frac{2^n - 1}{\sqrt{2} - 1}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

$$10. \sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1} - 1}{6}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$11. \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}, \forall n \in \mathbf{N}.$$

$$12. \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}.$$

Exercice 3.27. ()**

Démontrer, pour tout entier naturel n , les égalités suivantes.

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

$$2. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

$$3. \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$$

(ajoutez les deux égalités précédentes).

$$4. \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

$$5. \sum_{k=0}^n 2^{3k-1} \binom{n}{k} = 9^n/2.$$

$$6. \sum_{k=0}^n 2^{3k} 3^{n-2k} \binom{n}{k} = (17/3)^n.$$

$$7. \sum_{k=0}^n i^k \binom{n}{k} = 2^{n/2} e^{ni\pi/4}.$$

$$8. \sum_{k=0}^n 3^{k/2} i^k \binom{n}{k} = 2^n e^{ni\pi/3}.$$

Exercice 3.28. ()**

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

- En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x .
- La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0, 1]$ vaut

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.

- En déduire les valeurs des expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3.29. ()**

Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^n k^p$, sur le cas particulier $p = 2$.

1. Soit $x \rightarrow P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Dédire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.30. (*)**

Le but de l'exercice est de calculer la somme $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ pour tout n entier positif.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ pour $n = 0, 1, 2$, et 3.
2. Utiliser la formule du binôme pour développer l'expression $(1+1)^n$ et en déduire pour tout entier positif n l'égalité $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Pour tout n entier on note $T_0(n) = \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$, $T_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$, et $T_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$.

Que vaut la somme $T_0(n) + T_1(n) + T_2(n)$?

4. On désigne par j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que j satisfait $1 + j + j^2 = 0$.
5. Démontrer $(j+1)^{3n} = T_0(n) + jT_1(n) + j^2T_2(n)$ et $(j^2+1)^{3n} = T_0(n) + j^2T_1(n) + jT_2(n)$.
6. Dédire des questions précédentes l'égalité

$$3T_0(n) = 2^{3n} + (j+1)^{3n} + (j^2+1)^{3n}.$$

7. Montrer qu'on a $j+1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $j^2+1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et en déduire l'égalité

$$T_0(n) = \frac{2^{3n} + 2(-1)^n}{3}.$$

Exercice 3.31. (*)** Construction de \mathbf{Q} à partir de \mathbf{Z} .

Quand on définit, un peu rapidement, les nombres rationnels à partir des entiers relatifs, on précise que si (p, q) et (p', q') sont dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{Z}^*$ alors :

$$(26) \quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = p'q$$

$$(27) \quad \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

$$(28) \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

En fait, cette manière de procéder est peu précautionneuse : il se pourrait que l'égalité de fractions définie par (26) ne soit pas compatible avec les définitions de l'addition (27) et de la multiplication (28). Dans la suite, s, t et s', t' sont également des éléments de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ et $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$, alors

$$\frac{p}{q} + \frac{s}{t} = \frac{p'}{q'} + \frac{s'}{t'} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{s}{t} = \frac{p'}{q'} \times \frac{s'}{t'}.$$

De manière plus abstraite, mais un peu plus rassurante, on peut procéder à l'aide de la notion de relation d'équivalence. Soient E un ensemble et \mathcal{R} une partie de $E \times E$. On dit que \mathcal{R} est une *relation d'équivalence* sur E si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- $\forall x \in E, (x, x) \in E$,
- $\forall (x, y) \in E \times E, (y, x) \in E$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, ((x, y) \in E) \wedge ((y, z) \in E) \implies (x, z) \in E$.

Si $x \in E$ et \mathcal{R} est une relation d'équivalence, on note

$$C_{\mathcal{R}}(x) := \{y \in E \mid (x, y) \in \mathcal{R}\},$$

qui est appelé *classe d'équivalence de x* (pour la relation \mathcal{R}). On note E/\mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence :

$$E/\mathcal{R} := \{C_{\mathcal{R}}(x); x \in E\}.$$

2. Montrer que si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E , alors $x \in C_{\mathcal{R}}(x)$.
 3. Si $E = \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et

$$\mathcal{R} := \{((p, q), (p', q')) \mid pq' = p'q\},$$

montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E .

4. Soit f une fonction de $E \times E$ dans E . On suppose que pour tous x, x', y et y' dans E ,

$$(29) \quad (x, x') \in \mathcal{R} \text{ et } (y, y') \in \mathcal{R} \implies f((x, y)) = f((x', y')) .$$

Montrer que si x et x' sont dans E , $f(C_{\mathcal{R}}(x) \times C_{\mathcal{R}}(x'))$ est un singleton.

On peut alors définir \bar{f} , une fonction de $(E/\mathcal{R})^2$ dans E/\mathcal{R} mais qui agit comme f sur E^2 : si C et C' sont dans E/\mathcal{R} , $\bar{f}(C, C')$ est défini comme $C_{\mathcal{R}}(y)$ où y est tel que $f(C \times C') = \{y\}$ (la question précédente assure que $f(C \times C')$ est bien un singleton).

5. Montrer que si E et \mathcal{R} sont définis comme dans la question 3, et que f est définie sur E^2 par :

$$f((p, q), (p', q')) = (pq' + p'q, qq') ,$$

alors f vérifie (29).

6. Vérifier la même chose pour g définie par :

$$g((p, q), (p', q')) = (pp', qq') .$$

On peut alors définir \mathbf{Q} comme $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, muni des opérations \bar{f} et \bar{g} , et s'assurer que \mathbf{Q} muni de ces deux opérations vérifie tout ce qu'on souhaite¹⁶.

16. Associativité, commutativité et distributivité de f et g , le fait que \mathbf{Q} « contient \mathbf{Z} » au sens des classes des éléments de $\mathbf{Z} \times \{1\}$, que chaque élément possède un opposé et un inverse (sauf 0). De plus, tout ensemble qui possède ces propriétés doit contenir un ensemble de la même forme que \mathbf{Q}

Limites de suites

Dans ce chapitre on revoit la notion de limite d'une suite numérique et on la traduit en termes d'assertion mathématique.

Cours

4.1. Compléments sur les nombres réels. — On commence par quelques compléments sur les réels qui seront utiles pour définir et utiliser la notion de limite.

Tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R}$ admet un plus petit élément m . Cela se traduit par l'assertion

$$\forall S \subset \mathbf{R}, (|S| \in \mathbf{N}) \implies (\exists m \in S, \forall s \in S, m \leq s).$$

On note $\min(x_1, \dots, x_n)$ ce plus petit élément. De même, tout sous-ensemble fini S admet un plus grand élément noté $\max(x_1, \dots, x_n)$. Il est commode d'étendre un peu cette notion en rajoutant deux objets $+\infty$ et $-\infty$ qui satisfont

$$\forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, x \leq +\infty \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, -\infty \leq x.$$

Pour tout sous-ensemble fini $S = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a encore des notions de min et de max.

Rappelons que la *valeur absolue* d'un nombre réel x est définie par la formule

$$|x| = \max(x, -x).$$

Son graphe est représenté sur la Figure 14. Il est immédiat de voir que la valeur absolue est positive :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geq 0.$$

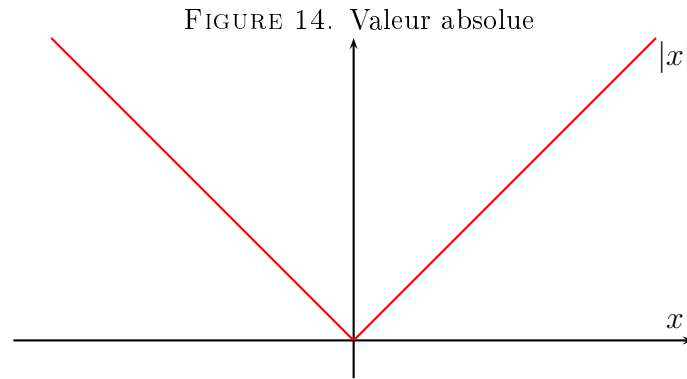
et ne s'annule qu'en 0 :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |x| = 0 \iff x = 0.$$

D'autre part, la valeur absolue est multiplicative :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, |xy| = |x| \times |y|.$$

Elle vérifie aussi les inégalités triangulaires :



Proposition 4.1 (Inégalités triangulaires)

Soient x et y des nombres réels, alors on a les deux inégalités

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

et

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Démonstration. — On a les inégalités $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$. Cela implique l'inégalité $x + y \leq |x| + |y|$. De même, les inégalités $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$ impliquent la relation $-(x + y) \leq |x| + |y|$ comme $|x + y|$ est égal à $x + y$ ou $-(x + y)$, la première inégalité triangulaire est démontrée.

Démontrons la seconde. Par la première inégalité, on a les relations

$$|x| = |y + x - y| \leq |y| + |x - y|$$

ce qui implique l'inégalité $|x| - |y| \leq |x - y|$. En échangeant x et y dans ce raisonnement, on obtient $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Comme $||x| - |y||$ vaut $|x| - |y|$ ou $|y| - |x|$ la seconde inégalité triangulaire est démontrée. \square

Rappelons également que pour $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}.$$

Définition 4.2

Soit x un nombre réel et ε un réel positif. On dit qu'un nombre y (réel, rationnel, ou décimal) est une *approximation de x à ε près* (ou *avec une marge d'erreur d'au plus ε*) si on a $|x - y| \leq \varepsilon$.

Exemple 4.3. — On écrit souvent $\pi = 3,14\dots$. Il n'y a en fait pas égalité puisqu'on ne sait précisément ce qu'il y a dans les \dots . Ce que dit cette écriture c'est que π est dans l'intervalle $[3,14, 3,15[$, et donc qu'on a $|\pi - 3,14| \leq 0,01$. Ainsi $3,14$ est une approximation de π à $0,01$ près. En utilisant $3,14$ comme valeur de π , on fait donc une erreur d'au plus $0,01$.

Enfin, voici quelques notions utiles sur les suites :

Définition 4.4

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est

- *périodique* s'il existe un entier naturel p non nul, tel que pour tout entier n on a $u_{n+p} = u_n$ (on dit dans ce cas que p est une *période* de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$),
- *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout entier n on a $u_n \leq M$;
- *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout entier n on a $u_n \geq m$;
- *bornée* si elle est majorée et minorée.

4.2. Définition de la limite d'une suite. — Une définition rigoureuse de la notion de limite est la suivante.

Définition 4.5 (Limite d'une suite en termes d' ε)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels et ℓ un nombre réel. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ si


$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_0) \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite finie, qui vaut ℓ .

L'interprétation graphique est la suivante : si on représente le graphe de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans le plan (c'est-à-dire qu'on trace les points de coordonnées (n, u_n) dans \mathbf{R}^2), alors pour toute bande horizontale contenant la droite d'équation $y = \ell$, tous les points du graphe, sauf un nombre fini, sont dans la bande.

 Il faut être très attentif au fait de ne pas parler de la limite d'une suite tant qu'on n'a pas démontré qu'elle existe, c'est à dire qu'il existe un réel ℓ tel que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers ℓ .

Vous avez probablement vu au lycée une définition qui semble différente à première vue :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert non vide contenant ℓ contient toutes les valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à partir d'un certain rang.

En fait, cette définition est équivalente à la Définition 4.5 car un intervalle ouvert non vide contenant ℓ contient toujours un intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

Exemples 4.6. — Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Comme n est toujours non nul pour $n \in \mathbf{N}^*$, cette suite est bien définie pour $n \geq 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant la Définition 4.5.

Pour cela, on fixe $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, et on doit chercher n_0 correspondant. Comme on veut $\frac{1}{n} < \varepsilon$, cette inégalité est équivalente à $n > \frac{1}{\varepsilon}$. On choisit alors n_0 dépendant de ε par la formule $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on a alors $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$. Comme dans l'exemple précédent, elle est bien définie pour $n \geq 1$. Montrons qu'elle a pour limite le nombre 0 en utilisant le même schéma.

Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Posons $n_0 = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$. Alors on a $n^2 \geq n_0^2 > (\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})^2 = \frac{1}{\varepsilon}$, et donc

$$|u_n - 0| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n_0^2} < \varepsilon,$$

ce qu'on voulait démontrer.

Dans les deux exemples précédents, la clé est le choix de l'entier n_0 qui fait marcher la preuve. Dans le premier exemple on a un peu plus détaillé comment on le choisit :

d'abord on cherche au brouillon à résoudre l'inégalité $|u_n - \ell| < \varepsilon$, et si tout va bien, on trouve une ou plusieurs contraintes sur n . On choisit alors un n_0 qui fait que cette ou ces contraintes sont satisfaites. Parfois, il n'est pas simple de trouver une condition nécessaire et suffisante sur n pour avoir $|u_n - \ell| < \varepsilon$, mais on parvient tout de même à trouver une condition suffisante du type « si $n \geq n_0$, alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$ », et nous avons tout de même la conclusion.

Passons maintenant aux limites infinies.

Définition 4.7 (Limites infinies de suites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n > n_0) \implies u_n > a,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $-\infty$ si on a

$$\forall a \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n > n_0) \implies u_n < a,$$

on écrit alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, ou bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 4.8. — Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_n = n^2$, et montrons qu'elle tend vers $+\infty$. Pour cela, soit a un nombre réel quelconque. Posons alors $n_0 = \min(0, \lfloor \sqrt{a} \rfloor + 1)$. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à n_0 . Alors, si a est négatif on a automatiquement $u_n \geq 0 > a$, et si a est positif on a $u_n = n^2 \geq n_0^2 > (\sqrt{a})^2 = a$. On a donc bien montré l'assertion définissant le fait que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

Pour montrer qu'une suite admet une limite (finie ou infinie), il faut d'abord deviner la limite, puis démontrer que la suite tend effectivement vers cette limite, à l'aide par exemple de la Définition 4.5 ou de la Définition 4.7. À ce propos il faut noter qu'une suite ne peut pas admettre deux limites distinctes :

Proposition 4.9 (Unicité de la limite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

Démonstration. — Supposons qu'on a une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et deux réels ℓ_1, ℓ_2 tels que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende à la fois vers ℓ_1 et vers ℓ_2 . On cherche à montrer qu'alors on a $\ell_1 = \ell_2$. On va traiter le cas de deux limites finies, et laisser les cas où ℓ_1 ou ℓ_2 sont infinies en exercice. On va raisonner par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$, et aboutir à une contradiction (le cas $\ell_1 < \ell_2$ se traite de même en inversant les rôles de ℓ_1 et ℓ_2).

Posons $\varepsilon := \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$. Par hypothèse, on a $\varepsilon > 0$. On va appliquer la définition du fait que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et ℓ_2 à cette valeur de ε .

Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1$, il existe n_1 tel qu'on a

$$\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| < \varepsilon. \quad 17$$

De même comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2$, il existe n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geq n_2, |u_n - \ell_2| < \varepsilon.$$

Alors pour $n > \max(n_1, n_2)$, on a $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$ et $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$. L'inégalité triangulaire donne alors

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| &\leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &= |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = |\ell_1 - \ell_2| \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent l'hypothèse est fautive, et on a bien $\ell_1 = \ell_2$. \square

Définition 4.10 (Convergence et divergence)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite dans \mathbf{R} , et on dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est *divergente* si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

17. Pour alléger l'écriture et parce que le contexte est clair, on contracte « $\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq n_1 \implies \dots)$ » en « $\forall n \geq n_1, \dots$ ».

Remarque 4.11. — On a vu des exemples de suites ayant une limite (finie ou infinie). Comment montrer qu'une suite n'a pas de limite finie? Il faut nier la propriété définissant la limite. La négation de

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

est

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - \ell| \geq \varepsilon.$$

Il s'agit donc pour tout réel ℓ de trouver un nombre ε tel que la suite repasse toujours à une distance supérieure à ε du nombre ℓ .

Exemple 4.12. — Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ n'admet pas de limite. Pour cela, on raisonne par l'absurde, et on suppose qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbf{R}$. Raisonnons selon que ℓ est positif ou négatif.

Cas 1 : $\ell \geq 0$. Dans ce cas, posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier impair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 1$ si n_0 est pair et $n_0 + 2$ si n_0 est impair). Alors on a $u_n = -1$, et donc $|u_n - \ell| = |-1 - \ell| = 1 + \ell > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers ℓ .

Cas 2 : $\ell < 0$. Ce cas est semblable au précédent : posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ quelconque, et soit n un entier pair supérieur à n_0 (par exemple $n_0 + 2$ si n_0 est pair et $n_0 + 1$ si n_0 est impair). Alors on a $u_n = 1$, et donc $|u_n - \ell| = |1 - \ell| = 1 + |\ell| > \frac{1}{2} = \varepsilon$, ce qui contredit la définition du fait que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tende vers ℓ .

Que ce soit pour montrer qu'une suite admet une limite ou pour montrer qu'elle n'en a pas, il y a donc toujours un choix judicieux à faire, à savoir n_0 en fonction de ε pour montrer la convergence, ou ε pour montrer qu'il n'y a pas de limite.

Finissons ce paragraphe par un petit résultat qui sera utile dans la suite : si une suite converge, alors elle est bornée.

Proposition 4.13

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente. Alors, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Démonstration. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente. Notons $\ell \in \mathbf{R}$ sa limite. Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, il existe un rang n_0 à partir duquel u_n est dans l'intervalle $] \ell - 1, \ell + 1[$:

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in] \ell - 1, \ell + 1[.$$

Avant le rang n_0 , la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs¹⁸. Notons $S = \{u_0, \dots, u_{n_0-1}\}$ l'ensemble de ces valeurs. Posons alors :

$$M = \max S \cup \{\ell + 1\} \text{ et } m = \min S \cup \{\ell - 1\}.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}, m \leq u_n \leq M.$$

En effet, $m \leq u_n \leq M$ est vraie pour $n \geq n_0$ car $\ell - 1 \leq m$ et $M \geq \ell + 1$, et $m \leq u_n \leq M$ est vraie pour $n \leq n_0 - 1$ car dans ce cas $u_n \in S$. \square

4.3. Opérations sur les limites. — Dans la partie précédente, on a vu que, pour prouver qu'une suite converge ou qu'elle n'a pas de limite, il y a toujours un choix judicieux à faire. Or ce choix n'est pas toujours facile. Heureusement, il y a des résultats permettant de montrer la convergence, ou la non-convergence, sans avoir recours à la définition. Vous avez certainement vu ces résultats au lycée, et nous allons en démontrer rigoureusement certains.

Le premier résultat est connu sous le nom de *théorème des gendarmes*

Théorème 4.14 (Théorème des gendarmes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des suites à valeurs dans \mathbf{R} . Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On fait les deux hypothèses suivantes :

(i) Il existe un entier $N \in \mathbf{N}$ tel qu'on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \implies (u_n \leq v_n \leq w_n);$$

(ii) Les suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite ℓ .

Alors $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente, et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. En appliquant la définition de la limite à $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (resp. $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$) et au nombre ε , on obtient $n_1 \in \mathbf{R}_+^*$ (resp. $n_2 \in \mathbf{R}_+^*$) tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_1 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

18. C'est une différence entre les suites et les fonctions définies sur un sous-ensemble quelconque de \mathbf{R} . La Proposition 4.13 n'est pas vraie dans le cas des fonctions définies sur un sous-ensemble quelconque de \mathbf{R} .

(resp.

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_2 \implies |w_n - \ell| < \varepsilon).$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, N)$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$. alors n vérifie $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon$. D'autre part on a $n \geq N$ ce qui donne les inégalités

$$u_n - \ell \leq v_n - \ell \leq w_n - \ell$$

et donc

$$-(w_n - \ell) \leq -(v_n - \ell) \leq -(u_n - \ell)$$

Par conséquent, $|v_n - \ell| \leq \max(|u_n - \ell|, |w_n - \ell|) < \varepsilon$. Ceci prouve que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ . \square

Une autre façon de se ramener à des cas plus simples est de décomposer la suite étudiée en somme ou produit de suites plus simples.

Proposition 4.15 (Somme et produit de limites)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites à valeurs réelles. On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2 , avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbf{R}$. Alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$ et la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $\ell_1 \ell_2$.

Démonstration. — Commençons par la somme des deux suites. Fixons $\varepsilon > 0$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 , il existe un entier n_1 tel qu'on a ¹⁹

$$\forall n \geq n_1, |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ }^{20}$$

De même comme $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2 , il existe un entier n_2 tel qu'on a

$$\forall n \geq n_2, |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons alors $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors pour tout $n \geq n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. En additionnant ces inégalités et à l'aide de l'inégalité triangulaire, on a alors

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui démontre la propriété pour la somme des deux suites.

¹⁹. Noter que par commodité on note n_1 l'entier en question, et non n_0 , ce qui permettra de le différencier de l'entier n_2 à venir.

²⁰. Noter qu'ici on a appliqué la définition avec $\frac{\varepsilon}{2}$ et non ε , en vue de la suite.

Passons maintenant au produit. La détermination des entiers n_1 et n_2 est plus subtile.

Commençons par une analyse : on veut démontrer une inégalité de type $|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$. Pour cela on va utiliser une hypothèse sur $|u_n - \ell_1|$ et sur $|v_n - \ell_2|$. Il faut donc relier ces quantités. C'est possible, comme suit :

$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = u_n v_n - u_n \ell_2 + u_n \ell_2 - \ell_1 \ell_2 = u_n (v_n - \ell_2) + \ell_2 (u_n - \ell_1).$$

Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, d'après la Proposition 4.13, elle est bornée. Donc il existe une constante $C > 0$ telle que $|u_n| \geq C$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Notons $C' = \max\{\ell_2, C\}$ et remarquons que $C' > 0$. On a, grâce à l'écriture précédente et l'inégalité triangulaire, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |u_n (v_n - \ell_2) + \ell_2 (u_n - \ell_1)| \\ &\leq |u_n (v_n - \ell_2)| + |\ell_2 (u_n - \ell_1)| \\ &= |u_n| |(v_n - \ell_2)| + |\ell_2| |(u_n - \ell_1)| \\ &\leq C' |(v_n - \ell_2)| + C' |(u_n - \ell_1)| \\ &= C' (|(v_n - \ell_2)| + |(u_n - \ell_1)|) \end{aligned}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_1 et que $\frac{\varepsilon}{2C'} > 0$, il existe un entier n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, |(u_n - \ell_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2C'}.$$

De même, comme $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ_2 et que $\frac{\varepsilon}{2C'} > 0$, il existe un entier n_2 tel que

$$\forall n \geq n_2, |(v_n - \ell_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2C'}.$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Alors, pour tout $n \neq n_0$, on a

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq C' (|(v_n - \ell_2)| + |(u_n - \ell_1)|) \leq C' \left(\frac{\varepsilon}{2C'} + \frac{\varepsilon}{2C'} \right) \leq \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq \varepsilon$. Donc $(u_n v_n)_{n \geq 0}$ tend vers $\ell_1 \ell_2$. \square

Exemple 4.16. — Pour $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $v_n = 2 - \frac{2}{n}$, la proposition précédente implique directement que $(u_n + v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 3 et $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 2.

La proposition 4.15 s'étend au cas des limites infinies, avec les règles suivantes que l'on admettra :

- $a + \infty = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $+\infty + \infty = +\infty$,
- $a - \infty = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,

- $+\infty - \infty$ est indéfini : on ne peut rien conclure dans ce cas,
- $a \times (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (+\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $a \times (-\infty) = -\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_+^*$,
- $a \times (-\infty) = +\infty$ pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$,
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$,
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$,
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
- $0 \times (+\infty)$ est indéfini,
- $0 \times (-\infty)$ est indéfini

Finissons cette partie avec les inverses :

Proposition 4.17

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle tendant vers une limite $\ell \in \mathbf{R}^*$. Alors la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand, et elle tend vers $\frac{1}{\ell}$.

Dire que $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est définie pour n assez grand signifie que $\frac{1}{u_n}$ n'est peut-être pas défini pour tout entier naturel n , puisque u_n peut s'annuler. Mais comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers une limite non nulle, elle ne peut s'annuler une infinité de fois.

Démonstration. — Fixons $\varepsilon > 0$. Le but est de majorer $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}|$ en fonction de $|u_n - \ell|$. On fait donc un calcul préliminaire pour guider les choix. On a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n \ell|}$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Alors comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers ℓ , il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a à la fois $|u_n - \ell| < \varepsilon \cdot \frac{|\ell|^2}{2}$ et $|u_n| > \frac{|\ell|}{2}$. Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| &= \frac{|\ell - u_n|}{|u_n \ell|} \\ &< \frac{|\ell - u_n| \cdot 2}{|\ell|^2} < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui prouve bien la convergence de $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ vers $\frac{1}{\ell}$. □

On peut dire quelque chose dans le cas des limites infinies : si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, alors $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0. Pour la réciproque, il faut veiller au signe : si u_n est de signe constant, alors on a une réciproque, mais si le signe de u_n change une infinité de fois et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0, alors $(\frac{1}{u_n})_{n \in \mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

Exercices

Réels et approximation

Exercice 4.1. (*)

Dans chacun des cas suivants, dire si on a bien une approximation avec la marge indiquée, ou sinon la corriger.

1. 3,14 est une approximation de π à 0,01 près.
2. 3,1416 est une approximation de π à 0,001 près.
3. 3,1416 est une approximation de π à 10^{-5} près.
4. 1,41 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
5. 2,72 est une approximation de e à 10^{-2} près.

Exercice 4.2. (*) Soit x un réel strictement positif.

1. Montrer que $x > 10 \Rightarrow \left| \frac{2 \sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{5}$
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4.3. (*) Soient a et b deux nombres réels de $[1, +\infty[$.

1. Montrer que

$$a \geq b \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \leq 1 + \frac{1}{b}$$

2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4.4. (*) Soit $a \in [0, 1/2]$. Montrer que

$$|b| \leq \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{3} \leq \frac{a+b}{1+a} \leq \frac{3a}{2}$$

Exercice 4.5. (**) Soit $c \geq 1$.

1. Montrer que si y est tel que $0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{c}$, alors

$$\frac{1}{1-y} \leq 1 + cy$$

2. Soit b un réel supérieur à 10. Montrer que

$$a \geq b \Rightarrow a \leq \frac{a^2 + a + 1}{a - 5} \leq a \left(1 + \frac{13}{b} \right)$$

3. Lorsqu'on approche un réel A par un autre réel B , on appelle erreur relative la valeur $|B - A|/|A|$. Montrer que si $a \geq 13 \cdot 10^k$, avec k un entier naturel, on peut approcher $\frac{a^2+a+1}{a-5}$ par a avec une erreur relative inférieure ou égale à 10^{-k} .

Quantifications successives

Exercice 4.6. ()** Pour tous i et j entiers naturels non nuls, on note $P(i, j)$ l'assertion " j est un multiple de i ".

1. Pour visualiser les choses, représenter P sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
 - (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geq J \Rightarrow P(i, j)$
 - (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que ($j \geq J$ et $P(i, j)$)

Exercice 4.7. ()** Pour tous i et j entiers naturels non nuls, on note $P(i, j)$ l'assertion " $\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{i}$ ".

1. Représenter P sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
 - (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geq J \Rightarrow P(i, j)$
 - (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que ($j \geq J$ et $P(i, j)$)

Exercice 4.8. ()** Soit u une suite de nombres entiers dont toutes les valeurs sont dans $\{0, 1, 2\}$. Pour tout entier $j \geq 3$ et tout entier $i \geq 1$, on note $P(i, j)$ l'assertion " $\left| \frac{1}{j-u_j} \right| \leq \frac{1}{i}$ ".

1. Représenter P sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes (si on ne peut mettre vrai ou faux à coup sûr, on mettra un point d'interrogation).
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
 - (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^* \cap [3, +\infty[, j \geq J \Rightarrow P(i, j)$
 - (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^* \cap [3, +\infty[$ tel que ($j \geq J$ et $P(i, j)$)
 - (c) La suite $j \mapsto \frac{1}{j-u_j}$ admet-elle une limite ? Si oui, que vaut-elle ?

Exercice 4.9. ()** Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (Justifier rigoureusement, en montrant séparément deux inclusions).

1. $\bigcup_{x \in \mathbf{R}} \{x^2\}$,
2. $\bigcup_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$,
3. $\bigcap_{x \in [0,1]}]x - 1, x + 1[$,
4. $\bigcap_{x \in [0,1]} [x - 1, x + 1]$,
5. $\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$,
6. $\bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

Limites de suites

Exercice 4.10. (*)

Pour chacune des suites suivantes, trouver deux entiers N_{10} et N_{100} tels que les assertions

$$\forall n \geq N_{10}, |u_n| < \frac{1}{10}$$

$$\forall n \geq N_{100}, |u_n| < \frac{1}{100}$$

soient vraies.

1. $u_n = \frac{1}{n}$,
2. $u_n = \frac{1}{n^2}$,
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,
4. $u_n = 2^{-n}$,
5. $u_n = 10^{-n}$,
6. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
7. $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,
8. $u_n = \frac{\cos(n)}{3^n}$.

Exercice 4.11. (*/**)

Pour chacune des suites suivantes et pour tout réel strictement positif ε , trouver un entier N_ε tel que l'assertion

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon$$

soit vraie.

1. $u_n = \frac{1}{n}$,
2. $u_n = \frac{1}{n^2}$,
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$,
4. $u_n = 2^{-n}$,
5. $u_n = 10^{-n}$,

6. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},$

7. $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases},$

8. $u_n = \frac{\cos(n)}{3^n}.$

Exercice 4.12. ()** La phrase suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier.

Si une suite de nombre réels est périodique, alors elle est bornée.

Exercice 4.13. ()**

Pour chacune des suites suivantes, dire si la suite est périodique, majorée, minorée, bornée, convergente, si elle tend vers $\pm\infty$, ou si elle diverge (démontrez toutes vos réponses). Si elle est convergente, déterminer sa limite.

1. $u_n = (-1)^n,$

4. $u_n = \frac{n}{n+1},$

8. $u_n = n + (-1)^n,$

2. $u_n = \frac{1}{n},$

5. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$

9. $u_n = n + (-1)^n n,$

10. $u_n = \frac{n+1}{n^2}.$

3. $u_n = \frac{1}{n^2},$

6. $u_n = \cos(n),$

7. $u_n = 2^{-n},$

11. $u_n = \frac{2n^2 + n + 3}{n^2}.$

Exercice 4.14. (*)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (ce qu'on peut traduire par l'assertion $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$).

Exercice 4.15. ()** *Le nombre d'or*

1. Résoudre dans \mathbf{R} l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

La solution positive, notée ϕ , est appelée "nombre d'or".

2. Démontrer qu'on a $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ comme suit. On pose $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{4}{9}|u_n - \phi|$. (Utiliser la question 2.)

5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$|u_n - \phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

6. Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
7. Déterminer un entier n tel que u_n est une approximation de ϕ à 10^{-6} près.

Exercice 4.16. ()** *Racines carrées, méthode égyptienne*

On présente un algorithme pour obtenir des approximations de racines carrées. Soit a un nombre réel plus grand que 1 dont on cherche à déterminer la racine carrée. On suppose qu'on sait déterminer la partie entière $\lfloor \sqrt{a} \rfloor$. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ comme suit : on part de $u_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor + 1$, et on définit par récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante et qu'on a $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} > \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer qu'on a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire que la suite u_n tend vers \sqrt{a} .
4. Déterminer un entier n tel que u_n est une approximation de \sqrt{a} à 10^{-6} près.

Exercice 4.17. ()**

Soit u_0 un entier positif quelconque. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ u_n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
2. Montrez que, pour toute valeur initiale $u_0 \in \mathbf{N}^*$, l'assertion

$$\exists N \in \mathbf{N}, u_N = 1.$$

est vraie.

(Si on remplace $u_n + 1$ par $3u_n + 1$ dans la définition, alors c'est un problème ouvert de savoir si l'assertion est vraie. Cela s'appelle le *problème de Syracuse*.)

GLOSSAIRE

\mathbf{C} : Nombres complexes	12	\neg : Négation	47
$\operatorname{Re}(z)$: Partie réelle	12	\wedge : Conjonction	47
$\operatorname{Im}(z)$: Partie imaginaire	12	\vee : Disjonction	48
$ z $: Module	13	\forall : « quel que soit », quantificateur universel	49
e^z : Exponentielle complexe	16	\exists : « il existe », quantificateur existentiel	49
$\{a, b, c, \dots\}$: Ensemble décrit en extension	37	\implies : Implication	53
\in : Appartenance d'un élément à un ensemble	38	\iff : Équivalence	54
\notin : Non appartenance d'un élément à un ensemble	38	$f(x)$: Image de x	71
\subset : Inclusion d'un sous-ensemble	38	$f(A)$: Image d'une partie	74
$\not\subset$: Non inclusion	38	$f^{-1}(B)$: Image réciproque	75
$\{x \in R \mid P(x)\}$: Ensemble décrit en compréhension	39	$\{f(x); x \in E\}$: Ensemble décrit en fonction	76
\cup : Union de deux ensembles	39	$g \circ f$: Composée	77
\cap : Intersection de deux ensembles	39	f^{-1} : Application réciproque	78
\setminus : Différence de deux ensembles	40	$n!$: Factorielle	84
(u_1, \dots, u_n) : n -uplet d'éléments	43	$\binom{n}{k}$: Coefficient binomial	85
(u_1, u_2) : couple	43	C_n^k : Coefficient binomial	85
(u_1, u_2, u_3) : triplet	43	min minimum	105
		max maximum	105
		$ x $: Valeur absolue	105

INDEX

A	
Addition complexe	12
Affixe	12
Antécédent	75
Application	71
bijective	78
composée	77
injective	77
réciproque	78
surjectice	77
Argument d'un nombre complexe	13
Assertion	44
close	47, 64
ouverte	47
B	
Bijective (application \rightarrow)	78
Bornée (suite \rightarrow)	107
C	
Cardinal	79
Complémentaire	40
Complexe	12
addition	12
argument	13
conjugué	13
exponentielle	16
forme exponentielle	17
forme polaire	17
module	13
multiplication	12
partie imaginaire	12
partie réelle	12
Composée	77
Compréhension (définition d'un ensemble en \rightarrow)	39
Conjonction	47
Conjugué d'un nombre complexe	13
Contre-exemple	56
Corollaire	45
couple	43
D	
D'Alembert-Gauss (théorème de \rightarrow)	22
Démonstration constructive	56
effective	56
Départ (ensemble de \rightarrow)	71
Différence (de deux ensembles)	40
Disjonction	48
E	
Ensemble	37
complémentaire	40
d'arrivée	71

de départ	71		
différence	40		
fini	79		
intersection	39		
produit	43		
sous-ensemble	38		
union	39		
Équivalence	54		
Euler (formules d'—)	19		
Exponentielle complexe	16		
Extension (définition d'un ensemble en —)	37		
F			
Factorielle	84		
Fonction	71		
Fonction (définition d'un ensemble par —)	76		
Forme exponentielle	17		
Forme polaire	17		
Formule			
d'Euler	19		
du binôme de Newton	91		
G			
Graphe	71		
I			
Image	74		
réciproque	75		
Implication	53		
Indice de sommation	80		
Inégalités triangulaires	106		
Injective (application —)	77		
Intersection	39		
L			
Lemme	45		
M			
Majorée			
(suite —)	107		
Maximum	105		
Minimum	105		
Minorée			
(suite —)	107		
Module d'un nombre complexe	13		
Multiplication complexe	12		
N			
Négation	47		
Newton (formule du binôme de —)	91		
Nombre			
complexe	12		
de combinaisons	85		
de permutations	84		
n -uplet	43		
O			
Opérateur logique	47		
Origine	12		
P			
Partie			
imaginaire d'un nombre complexe	12		
réelle d'un nombre complexe	12		
Pascal (triangle de —)	87		
Périodique			
(suite —)	107		
Permutation	84		
(nombre de —)	84		
Polynôme	19		
Polynôme			
complexe	22		
Proposition	45		
Q			
Quantificateur			
existentiel	49		
universel	49		
R			
Racine			
carrée d'un nombre complexe	24		
de l'unité	27		
n -ième d'un nombre complexe	26		
Réciproque	55		
(application —)	78		
S			
Série géométrique	90		
Suite	74		
Surjective (application —)	77		
T			
Table de vérité	48		
Tautologie	48		

Théorème	45		
de d'Alembert-Gauss	22		
fondamental de l'algèbre	22		
Triangle de Pascal	87		
triplet	43		
		U	
		Union	39
		V	
		Valeur absolue	105
		Variable	46