L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2021-2022

Interrogation écrite n°1

Nombres complexes

Exercice n° 1.
Question de cours. Montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
Correction : Cf. cours.

Exercice n° 2.
Résoudre l'équation suivante en l'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(i-3)z + 2i + 1 = 4 - i\ .$$

Correction : Pour tout z complexe,

$$\begin{aligned}
(i-3)z + 2i + 1 = 4 - i \quad &\Leftrightarrow \quad (i-3)z = 3 - 3i \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{3-3i}{i-3} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{(3-3i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{-3i-9-3+9i}{10} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{-12+6i}{10} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{-6+3i}{5}
\end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution, qui est $\frac{-6+3i}{5}$.

Exercice n° 3.
Calculer le module et un argument de $(-2i + 2\sqrt{3})^4$.

Correction : On pose d'abord $z = -2i + 2\sqrt{3}$ et on cherche à l'exprimer sous forme exponentielle. On a :

$$z = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 4(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}\ .$$

Donc :

$$z^4 = 4^4 e^{-4i\frac{\pi}{6}} = 2^8 e^{-2i\frac{\pi}{3}}\ .$$

Comme $2^8 > 0$ et que $-\frac{2\pi}{3}$ est réel, on en déduit que le module de z^4 est 2^8 et qu'un argument de z^4 est $-\frac{2\pi}{3}$.