L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2020-2021

Interrogation écrite n°1

Ensembles

Exercice n° 1.
On note A l'ensemble $\{0, -2, 3\}$ et B l'ensemble $\{-6, 4, 3\}$. Ecrire en extension (c'est à dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A \cap B$
2. $A \cup B$
3. $A \setminus B$
4. $\{(a, b)\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\}$
5. $\{\frac{p}{q}\,;\, p \in A \text{ et } q \in B\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \in A\}$ (justifier)

Correction :

1. $A \cap B = \{3\}$
2. $A \cup B = \{-6, -2, 0, 3, 4\}$
3. $A \setminus B = \{-2, 0\}$
4. $\{(a, b)\,;\, a \in A \text{ et } b \in B\} = \{(0, -6), (0, 4), (0, 3), (-2, -6), (-2, 4), (-2, 3), (3, -6), (3, 4), (3, 3)\}$
5. $\{\frac{p}{q}\,;\, p \in A \text{ et } q \in B\} = \{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \in A\} = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. En effet, $x^2 = 0$ a pour unique solution 0, $x^2 = -2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ puisque $-2 < 0$, et

$$\begin{aligned} x^3 = 3 &\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Donc $x^2 = 3$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Exercice n° 2.
Ecrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunion d'intervalles.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \text{ et } x > 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x > 7\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| < 5\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 7\}$

Correction :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \text{ et } x > 1\} =]1; 4]$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ ou } x > 7\} =]-\infty; 3] \cup]7; +\infty[$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| < 5\} =]-2; 8[$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| \geq 7\} =]-\infty; -5] \cup [9; +\infty[$

Exercice n° 3.
Dire pour chacune des phrases suivantes si elle est vraie ou fausse (justifier rapidement).

1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$. *Correction :* Vraie. Chaque intervalle de l'intersection est inclus dans $]0;+\infty[$, donc l'intersection est incluse dans $]0;+\infty[$. Montrons qu'aucun élément de $]0;+\infty[$ n'est inclus dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right]$, ce qui montrera que la phrase est vraie. En effet, si $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < x$ (on peut prendre pour n n'importe quel entier strictement supérieur à $1/x$). Donc pour cette valeur de n, x n'est pas dans $\left]0, \frac{1}{n}\right]$. Donc en particulier, x n'est pas dans l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]0, \frac{1}{n}\right]$.

2. 1 est un élément de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[2n, 2n+\frac{1}{2}\right]$. *Correction :* Faux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geq 2$. Donc tous les intervalles de l'union ci-dessus sont inclus dans $[2;+\infty[$. Donc la réunion elle-même est incluse dans $[2;+\infty[$. Or 1 n'appartient pas à $[2;+\infty[$, donc 1 n'est pas un élément de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[2n, 2n+\frac{1}{2}\right]$.