Capes de Mathématiques **Université Joseph Fourier**
Préparation à l'écrit **Année 2008-2009**

Quelques principes de rédaction mathématique

« *He who can, does. He who cannot, teaches.* » *George Bernard Shaw*

À l'origine de ce texte, on trouve des notes d'inspiration similaire mises à la disposition des étudiants par Christophe Champetier, mais comme d'habitude en pareil cas, les vues exprimées ici ne sont pas de sa responsabilité. D'ailleurs la façon la plus profitable de lire ce qui suit est sans doute d'essayer de réfuter, ou au moins de discuter rudement, chacune des affirmations proposées (et pour commencer, la citation (célèbre) ci-dessus).

Règle 1 : Définir clairement les objets qu'on utilise

> *Tout caractère (x, t, n, a, f, i, A, F, α, ϕ ou autre) qui désigne un objet mathématique (élément, ensemble, fonction ou autre) doit impérativement être présenté et clairement défini avant d'être utilisé.*

Ce principe élémentaire est fondamental pour qu'une phrase, en particulier dans un raisonnement mathématique, ait un sens.

Par exemple à tout moment d'une rédaction, si on écrit « $f(x) \geqslant 0$ », ou bien « la suite réelle (a_n) est majorée par C », il faut <u>auparavant</u> avoir dit ce que sont f, x, (a_n) et C. Sinon, au mieux le raisonnement n'est pas clair, au pire il n'a pas de sens, et dans les deux cas il risque d'être interprété comme faux.

Autrement dit, on ne parle pas de quelque chose tant qu'on n'a pas dit ce que c'était. Dans un raisonnement, une variable, notée par exemple x, f, (a_n), k ou ε, désigne un ensemble ou un élément d'un ensemble, qui a été lui-même précédemment défini, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou l'ensemble des suites réelles.

Présentation d'un symbole

Un symbole représente un objet souvent présenté par un quantificateur.

Par exemple on écrira : « Pour tout $x \in E$, ... »Et si la suite du raisonnement est trop longue, on pourra commencer par : « Soit $x \in E$ [quelconque]. »

Quelques exemples

- « $\forall \varepsilon > 0, \dots$ » signifie : « Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \dots$ »
- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos x = \sin x$.
- Soit $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = \sin x$.

Expliquons à présent un point de détail qui va nous permettre de souligner un autre point, crucial quant à lui.

Certains mathématiciens considèrent qu'en toute rigueur, « Soit $x \in E$. » sous-entend que l'ensemble E n'est pas vide alors que « Pour tout $x \in E$, ... » est correct, que E soit vide ou non. Dans la pratique, on accepte les deux. Par exemple :

> Soit E l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 = 0\}$.
> Soit $x \in E$.
> Alors $(x+1)^2 + 1 = 0$ donc $(x+1)^2 = -1$.
> Or on sait que le carré de tout nombre réel est un nombre réel positif ou nul.
> Comme -1 est strictement négatif, c'est absurde, donc $E = \emptyset$.

Exercice

> *Expliquer pourquoi, dans la rédaction ci-dessus, la phrase* « Soit $x \in E$ » *est indispensable.*

Par conséquent, sauf dans les cas de raisonnement par l'absurde (précisément !), il <u>faut</u> rappeler ou démontrer que l'ensemble dans lequel on prend la variable n'est pas vide, sinon le raisonnement est vraisemblablement absurde ou faux.

Exemples de formulations

- Soit $x \in \mathbb{R}$. (Sous-entendu : x quelconque.)
- Soit x un réel vérifiant la propriété P.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x$.
- $\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x$.
- $\forall x \in [0, \pi],\ ((\cos x = \sin x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4})$.
- Pour tout $x \in [0, \pi]$, si $\cos x = \sin x$, alors $x = \frac{\pi}{4}$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x > 0,\ \mathrm{e}^{-x} > 1 - \varepsilon$.

Sans les quantificateurs qui introduisent x, ces phrases n'auraient pas de sens. Par exemple les phrases

$$(\cos x = \sin x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

et

$$(\cos x = \sin x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

n'ont aucun sens si x et k ne sont pas présentés avant d'être utilisés.

Une cause fréquente des erreurs de raisonnement rencontrées dans les copies est le non-respect de ces règles : une variable n'est pas définie (on ne sait pas dans quel ensemble elle varie) ou bien l'ensemble dans lequel elle varie change au milieu de la preuve (par exemple une constante devient soudain une variable quelconque) ou bien l'ensemble dans lequel elle varie est supposé implicitement non vide sans qu'on ait vérifié si c'était le cas.

Règle 2 : La manipulation des objets mathématiques obéit à des critères précis qui sont imposés par leur définition

Par exemple, un nombre complexe, la somme de deux fonctions réelles, la dérivée d'une fonction réelle, une suite numérique sont des objets qui sont précisément définis. Ainsi une fonction (notée par exemple f) est la donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et pour chaque élément (noté par exemple x) de l'ensemble de départ d'un unique élément (noté par exemple $f(x)$) de l'ensemble d'arrivée.

Les objets mathématiques ne sont pas des morceaux de théorèmes, ni des théorèmes que l'on imbrique les uns dans les autres pour faire des preuves, mais bien des objets en eux-mêmes qui ont été précisément décrits. Il faut donner un sens à ces objets, à l'aide d'exemples, de représentations visuelles ou autres. Mais ce sens ne permet pas d'écrire des preuves rigoureuses, une preuve étant un discours plus ou moins formel obéissant lui aussi à des règles précises qui sont celles de la logique mathématique.

Règle 3 : Ne pas hésiter à faire des phrases en français

Il est plus agréable, et souvent plus facile, de lire un raisonnement écrit en français qu'avec des symboles logiques.

Une considération connexe à celle-ci et qui la renforce est que les « raisonnements » écrits avec des symboles logiques dans les copies de concours sont plus souvent faux que les autres.

Par exemple, la phrase mathématique

$$\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x$$

ne signifie pas qu'on a fixé $x = \frac{\pi}{4}$, mais seulement qu'il existe un nombre réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus.

Par conséquent, *la lettre x n'a plus aucun sens au-delà de la phrase mathématique considérée*, ici « $\exists x \in [0, \pi],\ \cos x = \sin x$. »

Si on veut appeler x un tel nombre réel pour la suite du raisonnement, on dirait en français :

> Il existe un nombre réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus, soit x un tel nombre réel.

Ou alors :

> Soit x un nombre réel dans l'intervalle $[0, \pi]$ dont le cosinus est égal au sinus.

On peut dire :

> Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \sin x$ (un tel x existe). On a alors $\tan x = 1$.

Par contre, l'écriture « pseudo-mathématique » :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x \Rightarrow \tan x = 1$$

n'a aucun sens. On pourrait écrire :

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ \cos x = \sin x) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ \tan x = 1),$$

mais c'est très lourd donc on l'évite.

Remarque

Le français littéraire autorise parfois à placer le quantificateur à la fin de la phrase, par exemple :

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

et on trouve souvent ce genre de syntaxe sous la plume de mathématiciens professionnels. Mais cette construction peut conduire à des ambiguités, donc nous recommandons de l'éviter dans une rédaction mathématique.

Voici un exercice instructif si vous n'êtes pas au clair sur ces questions.

Exercice *Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ |x - y| < \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Règle 4 : Utiliser correctement les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$

Ici, « correctement » signifie en fait qu'on devrait presque toujours se passer de ces deux symboles et les remplacer par les mots *donc*, *ainsi*, *ce qui équivaut à*, ou autre. En effet l'utilisation de $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ ne devrait s'inscrire que dans un cadre rigoureux de syntaxe logique : ces symboles devraient se trouver entre deux propositions très clairement délimitées (voir l'énoncé de l'exercice qui conclut la règle 3), par exemple placées entre parenthèses.

Exemple La phrase $(\forall x \in E,\ f(x) = g(x) \Rightarrow f = g)$ est ambigüe, donc n'a aucun sens sauf convention, car elle pourrait signifier :

$$(\forall x \in E,\ f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g,$$

ou bien :

$$\forall x \in E,\ (f(x) = g(x) \Rightarrow f = g).$$

Suivant le contexte, ces deux implications peuvent être vraies ou fausses (en général, la première est vraie et la seconde est fausse), en tout cas leurs significations sont très différentes.

Ainsi l'utilisation des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ dans les copies, en début de ligne et sans aucune référence à *quelle proposition* implique *quelle proposition*, est en général peu claire ou incorrecte.

Exercice

Étudier la véracité des différentes propositions obtenues en mettant des parenthèses aux différents endroits possibles dans la phrase suivante :

$$\forall x \in [0, \pi[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sin(nx) < \tfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ x = 0.$$

La syntaxe logique est très lourde et on lui préfèrera presque toujours une rédaction en français. Exemples :

– Si pour tout $x \in E$ on a $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
– Soit $x \in E$. Si $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
– Soit $x \in [0, \pi[$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sin(nx) < \frac{1}{2}$, alors $x = 0$.

À noter également une nuance entre donc et implique : la phrase mathématique $(P \Rightarrow Q)$ signifie que si P est vraie, alors Q est vraie, autrement dit, soit P est fausse, soit Q est vraie, ou encore ((non P) ou Q). Elle ne suppose pas a priori que P est vraie. Dans un raisonnement on affirmera souvent : P est vraie, donc Q est vraie, ce qui n'a pas la même signification.

Enfin le symbole $\Leftrightarrow$ est régulièrement utilisé de manière incorrecte : quand on l'utilise, il faut impérativement vérifier (mentalement) les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ et les justifier si elles ne sont pas triviales toutes les deux.

Règle 5 : Essayer d'être concis

Il faut apprendre, par exemple en travaillant les démonstrations du cours et les exercices des TD, à distinguer le plus clairement possible les arguments essentiels d'une preuve, les idées importantes et nouvelles s'il y en a, dans un contexte d'arguments considérés comme « évidents » (ou triviaux, immédiats, clairs ou autres) par l'enseignant-correcteur. Pour l'enseignant, dire qu'une affirmation est « évidente » ne signifie pas qu'elle est « intuitive » mais que sa preuve ne nécessite pas d'idée nouvelle et est souvent une simple application des définitions, résultant d'une vérification calculatoire ou d'une méthode classique.

Dans un devoir, surtout en temps limité, il est inutile de recopier un énoncé, un théorème de cours ou une définition. C'est purement et simplement une perte de temps car on peut supposer que le correcteur connaît le cours ou l'énoncé de la question !

Pourtant on trouve encore dans de nombreuses copies des portions importantes d'énoncé. Répétons donc que cette pratique ne comporte **aucun** avantage (zéro point gagné) et des inconvénients évidents (perte de temps, impression d'« amateurisme »). Encore une fois :

> Il est toujours inutile de recopier l'énoncé, c'est purement et simplement une perte de temps.

Abordons maintenant un point un peu plus subtil, celui du niveau de rédaction. Un principe général :

> Le niveau de rédaction de la copie doit se situer au niveau de compréhension du candidat.

N'oublions pas non plus que la rédaction vise à convaincre le correcteur de la justesse du raisonnement menant le candidat à la conclusion. Personne n'écrit de preuve « complète », c'est-à-dire lisible par un ordinateur à qui on aurait appris les règles de la logique mathématique.

Pour le candidat, il s'agit donc de convaincre le correcteur qu'il a compris un raisonnement, et qu'il pourrait justifier toutes ses affirmations. Ainsi :

Tout argument utile est indispensable.

Il vaut donc mieux une copie où tout est démontré en (légèrement) plus de lignes que le minimum nécessaire, qu'une copie où il manque des arguments indispensables. Avec de l'habitude et de l'expérience, on apprend à gagner du temps en donnant certains arguments sans autre justification que celle qu'ils sont « évidents » à vérifier. Par contre :

Tout argument inutile est nuisible.

On a parfois l'impression qu'un certain nombre de résultats du cours qui semblent vaguement en rapport avec la question posée mais sans plus, sont cités par le candidat pour « faire bon poids ». En fait, c'est un moyen très sûr de persuader le correcteur que vous ne savez pas de quoi vous parlez.

Ainsi, savoir rédiger correctement une preuve s'acquiert évidemment en travaillant le cours et en maîtrisant les notions acquises précédemment. En particulier, cette maîtrise du cours doit permettre de faire la différence entre les questions « évidentes » (en général en début d'énoncé, mais pas uniquement) pour lesquelles rédiger une solution détaillée ne serait qu'une perte de temps, et les questions plus substantielles pour lesquelles on attend une solution détaillée.

. . . Et remarquons pour terminer que ce texte déroge déjà amplement à la règle 5, donc on s'arrêtera là.