L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2018-2019

DS N°1

Chapitre 1 : Langage mathématique

Attention : **la qualité de la rédaction sera largement prise en compte dans l'évaluation.**

Exercice n° 1. Question de cours

Montrer, en dressant une table de vérité, que l'assertion suivante est une tautologie :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Correction : On écrit la table de vérité de l'assertion

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

On voit que l'assertion prend toujours la valeur "Vrai", donc c'est une tautologie.

Exercice n° 2.

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Si A est un sous-ensemble de E et B est un sous-ensemble de F, rappeler la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.

   Correction : $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A :

   $$f(A) := \{f(x), x \in A\} ,$$

   et $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B :

   $$f^{-1}(B) := \{x \in E | f(x) \in B\} .$$

2. Montrer que pour tout sous-ensemble A de E,

   $$A \subset f^{-1}(f(A)) .$$

   Correction : D'après la question précédente,

   $$f^{-1}(f(A)) = \{x \in E | f(x) \in f(A)\}$$

   Soit x appartenant à A. Alors, $f(x) \in f(A)$, par définition de $f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. On a donc montré que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Exercice n° 3.
Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} \text{ et } g(x) = \frac{x-2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de définition de g, noté $\mathcal{D}_g$.

   Correction : Si x est un nombre réel, $f(x)$ est défini pour tout x tel que $x+2 \geq 0$. Or, pour tout x réel,
   $$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$
   Donc $\mathcal{D}_f = [-2; +\infty[$.
   Si x est un nombre réel, $g(x)$ est défini pour tout x tel que $3-x \neq 0$, c'est à dire pour tout x différent de 3. Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

2. Déterminer $\mathcal{D}_{g\circ f}$, le domaine de définition de $g \circ f$, et donner l'expression de $g \circ f(x)$ en fonction de x, lorsque $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$.

   Correction : L'ensemble $\mathcal{D}_{g\circ f}$ est donné par
   $$\mathcal{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f | f(x) \in \mathcal{D}_g\} \ .$$
   Or, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, $x+2$ est positif. Donc, pour tout x de $\mathcal{D}_f$:
   $$\begin{aligned} f(x) \in \mathcal{D}_g \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+2} \neq 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x+2 \neq 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq 7 \end{aligned}$$
   Donc
   $$\mathcal{D}_{g\circ f} = \mathcal{D}_f \setminus \{7\} = [-2; 7[\cup]7; +\infty[$$
   Enfin, pour x appartenant à $[-2; 7[\cup]7; +\infty[$,
   $$g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{3-\sqrt{x+2}} \ .$$

Exercice n° 4.
Soit f l'application de $[0, 1[$ dans $]0, 2]$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1[& \to &]0,2] \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x+1 & \text{si} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{si} & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ?

   Correction : Soient x et x' deux éléments de $[0, 1[$ tels que $f(x) = f(x')$.

- Si x et x' appartiennent à $[0,1/2]$, alors $2x+1=2x'+1$, donc $x=x'$.
- Si x et x' appartiennent à $]1/2,1[$, alors $2x-1=2x'-1$, donc $x=x'$.
- Si x appartient à $[0,1/2]$ et x' appartient à $]1/2,1[$, alors $2x+1=2x'-1$, donc $x=x'-1$. Ceci est impossible, car $x'-1$ appartient à $]-1/2,0[$ et x appartient à $[0,1/2]$.
- Si x appartient à $]1/2,1[$ et x' appartient à $[0,1/2]$, on peut faire le même argument en échangeant les rôles de x et x'.

En conlusion, pour tous x et x' $[0,1[$, si $f(x)=f(x')$, alors $x=x'$. Donc f est injective.

2. L'application f est-elle surjective ?

   Correction : Soit y un élément de $]0,2]$.
   - Si $y\in]0,1[$, alors $\frac{y+1}{2}\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ donc $f(\frac{y+1}{2})=2(\frac{y+1}{2})-1=y$. Donc y admet un antécédent par f.
   - Si $y\in[1,2]$, alors $\frac{y-1}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ donc $f(\frac{y-1}{2})=2(\frac{y-1}{2})+1=y$. Donc y admet un antécédent par f.

   On a montré que tout élément de l'ensemble d'arrivée de f admet un antécédent par f, donc f est surjective.

3. L'application f est-elle bijective ?

   Correction : L'application f est injective et surjective, donc elle est bijective.

4. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$,

$$\left(f(x)\geq\frac{3}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\right)$$

   Correction : Soit $x\in[0,1[$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x)\geq\frac{3}{2} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x\in[0,1/2] & \text{et } 2x+1\geq\frac{3}{2} \\ \text{ou} & \\ x\in]1/2,1[& \text{et } 2x-1\geq\frac{3}{2}\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x\in[0,1/2] & \text{et } 2x\geq\frac{1}{2} \\ \text{ou} & \\ x\in]1/2,1[& \text{et } 2x\geq\frac{5}{2}\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x\in[0,1/2] & \text{et } x\geq\frac{1}{4} \\ \text{ou} & \\ x\in]1/2,1[& \text{et } x\geq\frac{5}{4}\end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow x\in[1/4,1/2]
\end{aligned}$$