L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2018-2019

DS N°1

Chapitre 1 : Langage mathématique

Attention : **la qualité de la rédaction sera largement prise en compte dans l'évaluation.**

Exercice n° 1. Question de cours
Montrer, en dressant une table de vérité, que l'assertion suivante est une tautologie :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Exercice n° 2.
Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Si A est un sous-ensemble de E et B est un sous-ensemble de F, rappeler la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.
2. Montrer que pour tout sous-ensemble A de E,
$$A \subset f^{-1}(f(A))\ .$$

Exercice n° 3.
Soient f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} \text{ et } g(x) = \frac{x-2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ et l'ensemble de définition de g, noté $\mathcal{D}_g$.
2. Déterminer $\mathcal{D}_{g\circ f}$, le domaine de définition de $g \circ f$, et donner l'expression de $g \circ f(x)$ en fonction de x, lorsque $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$.

Exercice n° 4.
Soit f l'application de $[0,1[$ dans $]0,2]$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1[& \to &]0,2] \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x+1 & \text{si} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{si} & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. L'application f est-elle bijective ?
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,
$$\left(f(x) \geq \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$$