L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2022-2023

Devoir surveillé n°1

Nombres complexes et langage mathématique

Exercice n° 1.
Question de cours. Montrer, en utilisant leurs formes algébriques, que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|.|z_2|$.

Solution de l'exercice 1

Cf. cours.

Exercice n° 2.

1. Mettre sous forme algébrique ($a + ib$, avec a et b réels) le nombre complexe $z = \frac{i+1}{2i-5}$.

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned} z &= \frac{i+1}{2i-5} \\ &= \frac{(i+1)(-2i-5)}{(2i-5)(-2i-5)} \\ &= \frac{-3-7i}{29} \end{aligned}$$

2. Soit $z = \sqrt{3} - i$. Calculer le module et l'argument de z, et en déduire le module et l'argument de z^7.

Solution de l'exercice 2

On a :

$$\sqrt{3} - 1 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc :

$$z = 2^7 e^{-i\frac{7\pi}{6}}$$

Ainsi, $|z| = 2^7$ et $Arg(z) = -\frac{7\pi}{6}$.

Exercice n° 3.

1. Déterminer les racines carrées complexes du nombre $2-i$, sous forme algébrique.
2. En déduire les racines carrées complexes de $8-4i$.
3. Résoudre l'équation suivante en l'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (on donnera les solutions sous forme algébrique) :
$$iz^2 - 2z + (1+i) = 0\ .$$

Solution de l'exercice 3

1. Soit $\delta = x+iy$ avec x et y réels. On a :
$$\begin{aligned}
\delta^2 = 2-i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2+2ixy = 2-i \\ |\delta|^2 = |2-i| \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-y^2 = 2 \\ 2xy = -1 \\ x^2+y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^2 = 2+\sqrt{5} \\ 2xy = -1 \\ 2y^2 = \sqrt{5}-2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x| = \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} \\ 2xy = -1 \\ |y| = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ et } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \end{cases}
\end{aligned}$$
Donc les racines carrées de $2-i$ sont δ et $-\delta$, avec $\delta = \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}$.
2. Comme $8-4i = 4(2-i)$, on remarque que $(2\delta)^2 = 4(2-i) = 8-4i$ et $(-2\delta)^2 = 4(2-i) = 8-4i$. Donc les racines carrées de $2-i$ sont 2δ et -2δ.
3. On calcule le discriminant Δ du polynôme $P(z) = iz^2-2z+(1+i)$, et on trouve :
$$\Delta = 4-4i(1+i) = 8-4i$$
Donc les racines carrées complexes de Δ sont 2δ et -2δ avec $\delta = \sqrt{1+\frac{\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}$. Donc les racines de P sont
$$z_1 = \frac{2+2\delta}{2i} \text{ et } z_2 = \frac{2-2\delta}{2i}$$

Ce qui donne :

$$z_1 = -i - i\delta = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1} - i\left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} + 1\right)$$

et

$$z_2 = -i + i\delta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1} + i\left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}} - 1\right)$$

Exercice n° 4.
Soit $a \in \mathbb{C}$. On pose :

$$\mathcal{A}_a := \{z \in \mathbb{C} \,|\, a + \bar{z} = z\} \ .$$

et on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des imaginaires purs :

$$\mathcal{I} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, Re(z) = 0\} \ .$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z - \bar{z} = 2iIm(z) \ .$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$a + \bar{z} = z \Rightarrow a \in \mathcal{I} \ .$$

3. Montrer que si $\mathcal{A}_a$ n'est pas vide, alors a appartient à $\mathcal{I}$.
4. On suppose dans cette question que $a = ib$, avec b un nombre réel. Montrer que

$$\mathcal{A}_a = \{z \in \mathbb{C} \,|\, Im(z) = \frac{b}{2}\}$$

   et représenter l'ensemble $\mathcal{A}_a$ dans le plan complexe.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$a + \bar{z} = ze^{i\theta} \Leftrightarrow ze^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathcal{A}_{ae^{-i\frac{\theta}{2}}} \ .$$

Solution de l'exercice 4

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$z - \bar{z} = Re(z) + iIm(z) - (Re(z) - iIm(z)) = 2iIm(z) \ .$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $a + \bar{z} = z$, alors $a = z - \bar{z} = 2iIm(z)$ d'après la question précédente. Donc $Re(a) = 0$ (puisque $2Im(z)$ est réel). Donc $a \in \mathcal{I}$.

3. Si $\mathcal{A}_a$ n'est pas vide, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $a + \bar{z} = z$. Donc d'après la question précédente, a appartient à $\mathcal{I}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} z \in \mathcal{A}_a & \Leftrightarrow & a + \bar{z} = z \\ & \Leftrightarrow & z - \bar{(}z) = ib \\ & \Leftrightarrow & 2iIm(z) = ib \\ & \Leftrightarrow & Im(z) = b/2 \end{array}$$

ce qui montre le résultat voulu. La représentation de $\mathcal{A}_a$ dans le plan complexe est la droite d'équation $y = b/2$ (qui est une droite parallèle à l'axe des abscisses).
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.On a :

$$\begin{array}{rcl} a + \bar{z} = ze^{i\theta} & \Leftrightarrow & ae^{-i\frac{\theta}{2}} + \bar{z}e^{-i\frac{\theta}{2}} = ze^{i\theta}e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ & \Leftrightarrow & ae^{-i\frac{\theta}{2}} + \overline{ze^{i\frac{\theta}{2}}} = ze^{i\frac{\theta}{2}} \\ & \Leftrightarrow & ze^{i\frac{\theta}{2}} \in \mathcal{A}_{ae^{-i\frac{\theta}{2}}} \end{array}$$

Exercice n° 5.
Soit E l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E, et on pose :

$$\mathcal{A} := \{x + y\,;\,(x, y) \in E \times \{0, 2\}\}\ ,$$

et

$$\mathcal{B} := \{B \in \mathcal{P}(E)\,|\,\{2, 3\} \subset B \text{ et } (4 \in B^c \text{ ou } 1 \in B^c)\}\ .$$

1. Écrire $\mathcal{A}$ en extension (on ne demande pas de justification).
2. Écrire $\mathcal{B}$ en extension (on ne demande pas de justification).
3. On considère l'assertion P suivante :

$$\forall x \in E, x^2 \in \mathcal{A} \text{ ou } x - 3 \in E$$

Ecrire la négation de P.
4. P est-elle vraie ? Justifier.

Solution de l'exercice 5

1. $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. $\mathcal{B} = \{\{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.
3. $\exists x \in E,\ x^2 \notin \mathcal{A}$ et $x - 3 \notin E$.
4. P est fausse. En effet, posons $x = 3$. Alors, x est un élément de E, $x^2 = 9$ n'est pas dans A et $x - 3 = 0$ n'est pas dans E. Cela montre que la négation de P est

vraie, donc que P est fausse.