L1 IMA, Université Grenoble Alpes
MAT101
2020-2021

DS N°1

ENSEMBLES ET COMPLEXES
DURÉE : 1H

Calculatrices et documents interdits. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Exercice n° 1.
Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. La phrase suivante est-elle vraie ?

Si $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$ alors $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Correction : Il suffit de faire un diagramme de Venn pour se rendre compte que l'intersection $A \cap B \cap C$ peut être vide tout en ayant $A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$. La phrase est donc fausse. Un contre-exemple explicite est donné avec l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$,$B = \{1, 3\}$ et $C = \{2, 3\}$. Dans ce cas, on a $A \cap B \neq \{1\}$, $B \cap C \neq \{3\}$ et $A \cap C \neq \{2\}$, mais $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Exercice n° 2.
Dire pour chacune des phrases suivantes si elle est vraie ou fausse (justifier).

1. $18 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [4n; 4n + 1]$. *Correction :* Il est bon de commencer par faire un dessin représentant quelques-uns des intervalles $[4n; 4n + 1]$ pour n dans $\mathbb{N}^*$. On remarque alors qu'il y a des "trous" et que 18 va justement être dans un de ces trous. La phrase est donc fausse, et nous allons le prouver.

   Si $n \leq 4$, alors $4n+1 \leq 17$ donc tous les éléments de $A := \bigcup_{n \in [\![1;4]\!]} [4n; 4n + 1]$ sont inférieurs ou égaux à 17, donc 18 n'est pas dans A. De même, si $n \geq 5$, $4n + 1 \geq 21$ donc tous les éléments de $B := \bigcup_{n \geq 5} [4n; 4n + 1]$ sont supérieurs ou égaux à 21, donc 18 n'est pas dans B. Donc 18 n'est pas dans $A \cup B$ qui est égal à $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [4n; 4n + 1]$.

2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]2 + \frac{1}{n}; 3 + \frac{1}{n}\right] =]2; 4]$. *Correction :* Il est bon de commencer par faire un dessin représentant quelques-uns des intervalles $\left]2 + \frac{1}{n}; 3 + \frac{1}{n}\right]$ pour n dans $\mathbb{N}^*$. On se rend compte que la phrase est sans doute vraie car le premier intervalle (pour $n = 1$) est $]3; 4]$, que les autres "se chevauchent", ne laissant pas de "trou" et que leur borne inférieure tend vers 2. Montrons que la phrase est vraie : notons $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]2 + \frac{1}{n}; 3 + \frac{1}{n}\right]$, nous allons montrer que $A =]2; 4]$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 + \frac{1}{n} > 2$ et $3 + \frac{1}{n} \leq 4$, donc $A \subset]2; 4]$.

   Montrons l'inclusion réciproque. Tout d'abord $]3; 4] \subset A$ puisque lorsque $n = 1$, $\left]2 + \frac{1}{n}; 3 + \frac{1}{n}\right] =]3; 4]$. Il reste à montrer que $]2; 3]$ est inclus dans A. Soit $x \in]2; 3]$. Comme $x > 2$ et que $2 + \frac{1}{n}$ tend vers 2 lorsque n tend vers l'infini, il existe un entier N tel que $2 + \frac{1}{N} < x$. Par ailleurs, comme $x \leq 3$, on a que $x \leq 3 + \frac{1}{N}$. On a donc trouvé un entier N tel que $x \in \left]2 + \frac{1}{N}; 3 + \frac{1}{N}\right]$, donc $x \in A$. On a bien montré l'inclusion $]2; 3] \subset A$, ce qui finit la preuve.

Exercice n° 3.
Metre sous forme algébrique ($a+ib$, avec a et b réels) les nombres suivants.

1. $z_1 = \frac{2i-1}{1+3i}$ *Correction :*

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2i-1}{1+3i} \\ &= \frac{(2i-1)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} \\ &= \frac{2i+6-1+3i)}{1^2+3^2} \\ &= \frac{5+5i}{10} \\ &= \frac{1}{2}+i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. $z_2 = (1+i\sqrt{3})^7$ *Correction :* On commence par écrire $1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle pour obtenir une expression simple de ses puissances :

$$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z_2 &= (2e^{i\frac{\pi}{3}})^7 \\ &= 2^7 e^{7i\frac{\pi}{3}} \\ &= 2^7 \cos\left(7\frac{\pi}{3}\right) + i2^7 \sin\left(7\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Exercice n° 4.
Montrer que pour tout z complexe, $\sin(3z) = 3\sin(z)\cos^2(z) - \sin^3(z)$.

Correction : On utilise la formule de De Moivre : pour z complexe,

$$\sin(3z) = Im\left(e^{3iz}\right) = Im\left(\left(e^{iz}\right)^3\right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \left(e^{iz}\right)^3 &= (\cos(z)+i\sin(z))^3 \\ &= \cos^3 z + 3i\cos^2 z \sin z + 3i^2 \cos z \sin^2 z + i^3 \sin^3 z \\ &= \cos^3 z - 3\cos z \sin^2 z + i(3\cos^2 z \sin z - \sin^3 z) \end{aligned}$$

Donc pour tout z complexe, $\sin(3z) = 3\sin(z)\cos^2(z) - \sin^3(z)$.

Exercice n° 5.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter leurs solutions dans le plan complexe.

1. $(z+2)^3 = 1$

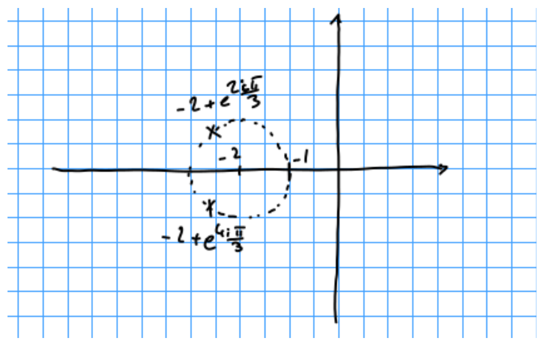
   Correction : On rappelle la formule permettant de factoriser $z^n - 1$, valable pour tout entier $n \geq 1$ et tout complexe z :

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

   On l'utilise ici avec $n = 3$:

$$\begin{aligned} (z+2)^3 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (z+2)^3 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \prod_{k=0}^{2} (z + 2 - e^{\frac{2ik\pi}{3}}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \{0,1,2\},\ z = -2 + e^{\frac{2ik\pi}{3}} \end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions est donc $\{-1, -2 + e^{\frac{2i\pi}{3}}, -2 + e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$. On le représente dans le plan complexe en traçant un cercle de rayon 1 autour de -2, et en y plaçant chaque point z de l'ensemble solution selon l'argument de $z + 2$.



2. $z^4 = 1 + i$

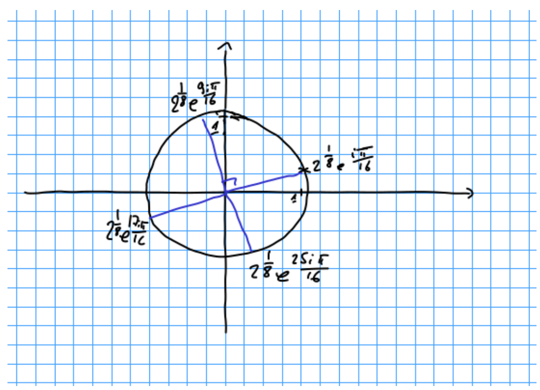
   Correction : On commence par chercher une racine quatrième de $1+i$ en le passant sous forme exponentielle :

$$1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}\right)^4$$

Donc :

$$\begin{aligned} z^4 = 1+i &\Leftrightarrow z^4 = \left(2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}\right)^4 \\ &\Leftrightarrow \frac{z^4}{\left(2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}\right)^4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}}\right)^4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{k=0}^{3} \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}} - e^{\frac{2ik\pi}{4}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \prod_{k=0}^{3} \left(\frac{z}{2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}} - e^{\frac{ik\pi}{2}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3\},\ z = e^{\frac{ik\pi}{2}} 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}} \end{aligned}$$

ce qui donne pour ensemble de solution $\{2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i\pi}{16}}, 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i9\pi}{16}}, 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i17\pi}{16}}, 2^{\frac{1}{8}} e^{\frac{i25\pi}{16}}\}$. Qualitativement, on place ces points dans le plan sur un cercle de centre 0 et de rayon $2^{1/8}$ (proche de 1) en disposant le premier point qui est d'argument $\pi/16$ et en tournant ensuite de 90° dans le sens trigonométrique pour chaque point.



Exercice n° 6.
Soit z un nombre complexe. Montrer que

$$z + 2\overline{z} + i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 1$$

Correction : Notons $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$. On a :

$$\begin{aligned} z + 2\overline{z} + i &= a + ib + 2(a - ib) + i \\ &= 3a + i(1-b) \end{aligned}$$

Comme $3a$ et $1-b$ sont réels, on en déduit :

$$\begin{aligned} z + 2\overline{z} + i \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 3a + i(1-b) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 1 - b = 0 \\ &\Leftrightarrow b = 1 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat puisque $b = Im(z)$.

Exercice n° 7.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante.

$$\frac{1}{1+i}z^2 - (2-i)z + \frac{7-i}{2} = 0$$

Correction : Notons $P(z) = \frac{1}{1+i}z^2 - (2-i)z + \frac{7-i}{2}$. Notons δ le discriminant de ce trinôme : on trouve après calcul

$$\delta = -3 + 4i$$

Cherchons les racines carrées de δ. Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. On a :

$$\begin{aligned}
z^2 = \delta \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 + 2iab &=& -3+4i \\ |z|^2 &=& 5 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 &=& -3 \\ 2ab &=& 4 \\ a^2 + b^2 &=& 5 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} 2a^2 &=& 2 \\ 2ab &=& 4 \\ 2b^2 &=& 8 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} |a| &=& 1 \\ ab &=& 2 \\ |b| &=& 2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad (a = 1 \text{ et } b = 2) \text{ ou } (a = -1 \text{ et } b = -2)
\end{aligned}$$

Donc les racines carrées de δ sont $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$. Pour finir, les racines du polynôme P sont $z_1 = \frac{-b+r_1}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+r_2}{2a}$ avec $a = \frac{1}{1+i}$ et $b = -(2-i)$. On obtient après simplification $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 2 - i$.