Correction de l'exercice 1.10

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifions $(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup B^c \cup C^c$, en utilisant d'abord la distributivité de l'union par rapport à l'intersection :

$$\begin{aligned}
(A \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup B^c \cup C^c &= ((A \cup A^c) \cap (B \cap C)) \cup B^c \cup C^c \\
&= (E \cap (B \cap C)) \cup B^c \cup C^c \\
&= (B \cap C) \cup B^c \cup C^c \\
&= (B \cap C) \cup (B \cap C)^c \\
&= E
\end{aligned}$$

2. Démontrons que $(A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B \cup C)^c = (A \cap C^c) \cap B^c$.
   - En utilisant la commutativité et l'associativité de l'intersection,

$$(A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (C^c \cap B^c) = (A \cap B^c) \cap C^c \; .$$

   - Ensuite, en remarquant que $(B^c \cap C^c) = (B \cup C)^c$, on a :

$$(A \cap B^c) \cap C^c = A \cap (B^c \cap C^c) = A \cap (B \cup C)^c \; .$$

   Ce qui finit de montrer le résultat désiré.

3. Nous allons démontrer que $(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap A^c \cup B \cup C) = \emptyset$, de deux façons différentes.
   - *1ère manière.*

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap (A^c \cup B \cup C) &= [(A \cup B) \cap B^c] \cap (A^c \cup C^c) \cap (A^c \cup B \cup C) \\
&= (A \cap B^c) \cap (A^c \cup C^c) \cap (A^c \cup B \cup C) \\
&= A \cap B^c \cap [(A^c \cup C^c) \cap (A^c \cup (B \cup C))] \\
&= A \cap B^c \cap (A^c \cup (C^c \cap (B \cup C))) \\
&= A \cap B^c \cap (A^c \cup (C^c \cap B)) \\
&\subset A \cap B^c \cap (A^c \cup B) \\
&= (A^c \cup B)^c \cap (A^c \cup B) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

   Donc $(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap (A^c \cup B \cup C) \subset \emptyset$, donc $(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap (A^c \cup B \cup C) = \emptyset$.

   - *2ème manière.* Supposons que $(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap (A^c \cup B \cup C) \neq \emptyset$, et notons x un élément de cet ensemble. On en déduit que $x \in B^c$, mais aussi que $x \in A \cup B$. Donc $x \in A \setminus B$. Puis x appartient aussi à $(A^c \cup C^c)$, mais comme x appartient pas à A (puisqu'il appartient à $A \setminus B$), il n'appartient pas à A^c. Donc, il apartient à $C^c \cap (A \setminus B)$ qui est égal à $C^c \cap A \cap B^c$ ou encore à $(C \cup A^c \cup B)^c$. Or, x appartient aussi à $(A^c \cup B \cup C)$. Ces deux dernières appartenances sont en contradiction, on en déduit qu'il n'existe pas d'élément dans l'ensemble $(A \cup B) \cap (A^c \cup C^c) \cap B^c \cap (A^c \cup B \cup C)$. Autrement dit, cet ensemble est vide.