Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos: el atractor de Lorenz y la dinámica de la herradura de Smale

Ana Rechtman
www-irma.u-strasbg.fr/∼rechtman/cv.html

4

¿Cómo se ve $\mathbb{S}^3$?

$\mathbb{S}^3$ y el mapeo de Hopf

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{S}^3 & \to & \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & \dfrac{z_1}{z_2} \end{array}$$

Las fibras son círculos.

¿Cómo se ve $\mathbb{S}^3$?

$\mathbb{S}^3$ y el mapeo de Hopf

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{S}^3 &\to \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \frac{z_1}{z_2} \end{aligned}$$

Las fibras son círculos.
Describir la imagen inversa del círculo $\{p \in \mathbb{R}^2 \mid |p|^2 = 1\}$.

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Entonces, $\phi_{2\pi} = \phi_0 = Id$.

¿Cómo construir un flujo en $\mathbb{S}^3$ con sólo 2 órbitas periódicas?,

Flujos en $\mathbb{S}^3$ y órbitas periódicas

Flujo de Hopf

Tomamos un campo vectorial tangente a los círculos de Hopf y de norma 1, en particular la caractéristica de Euler de $\mathbb{S}^3$ es cero, el flujo de dicho campo vectorial es

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{it} z_1, e^{it} z_2) = \phi_t(z_1, z_2).$$

Entonces, $\phi_{2\pi} = \phi_0 = Id$.

¿Cómo construir un flujo en $\mathbb{S}^3$ con sólo 2 órbitas periódicas?, ¿1?

Teorema para hoy

Teorema (K. Kuperberg)

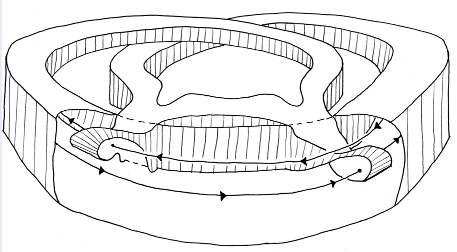
Sea M una variedad compacta y sin frontera de dimensión 3. Entonces M admite un campo vectorial sin singularidades y sin órbitas periódicas de clase C^∞.

Teorema para hoy

Teorema (K. Kuperberg)

Sea M una variedad compacta y sin frontera de dimensión 3. Entonces M admite un campo vectorial sin singularidades y sin órbitas periódicas de clase C^∞.

Demostración



Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Teorema (Poincaré - Hopf)

Sea M una variedad compacta y sin frontera. Hay un campo vectorial no singular tangente a M si y sólo si la característica de Euler de M es igual a cero.

Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Teorema (Poincaré - Hopf)

Sea M una variedad compacta y sin frontera. Hay un campo vectorial no singular tangente a M si y sólo si la característica de Euler de M es igual a cero.

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.

Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Teorema (Poincaré - Hopf)

Sea M una variedad compacta y sin frontera. Hay un campo vectorial no singular tangente a M si y sólo si la característica de Euler de M es igual a cero.

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.
- Wilson construye ejemplos con un número finito de órbitas periódicas, en cualquier variedad compacta y sin frontera.

Un poco de historia precedente al teorema de Kuperberg

Teorema (Poincaré - Hopf)

Sea M una variedad compacta y sin frontera. Hay un campo vectorial no singular tangente a M si y sólo si la característica de Euler de M es igual a cero.

Desde 1950

- Seifert pregunta si todo campo vectorial no singular en $\mathbb{S}^3$ tiene una órbita periódica.
- Wilson construye ejemplos con un número finito de órbitas periódicas, en cualquier variedad compacta y sin frontera.
- Schweitzer construye ejemplos sin órbitas periódicas de clase C^1, en cualquier variedad compacta y sin frontera.

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)
- Las soluciones de la ecuación autónoma de Euler de clase C^ω y cuando la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Etnyre - Ghrist).

Restricción a familias de campos de vectoriales

En dimensión 3, sabemos que algunas familias de campos vectoriales siempre tienen órbitas periódicas:

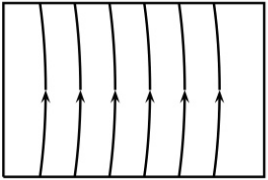
- Los campos de Reeb de una estructura de contacto (Taubes).
- Los campos geodesibles que preservan un volumen si la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Hutchings - Taubes, R.)
- Los campos geodesibles de clase C^ω en $\mathbb{S}^3$ (R.)
- Las soluciones de la ecuación autónoma de Euler de clase C^ω y cuando la variedad no es un fibrado en toros sobre el círculo (Etnyre - Ghrist).

Teorema (G. Kuperberg)

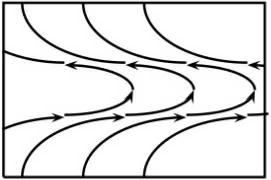
Toda variedad compacta y sin frontera de dimensión 3 admite un campo vectorial no singular y sin órbitas periódicas que preserva el volumen de clase C^1.

Construcción de K. Kuperberg - paso 1

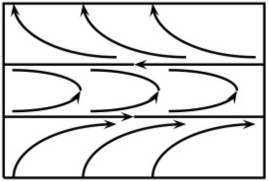
Los cilindros con coordenada r =constante son invariantes.



$r \approx 1,3$

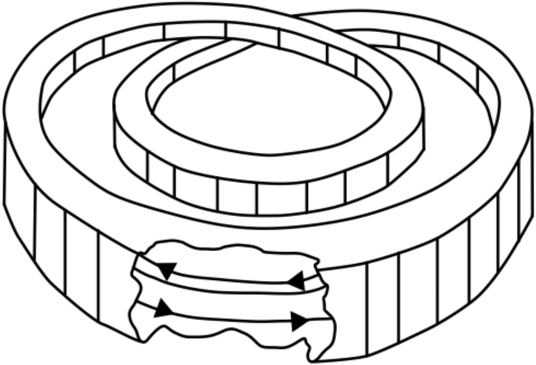


$r \approx 2$

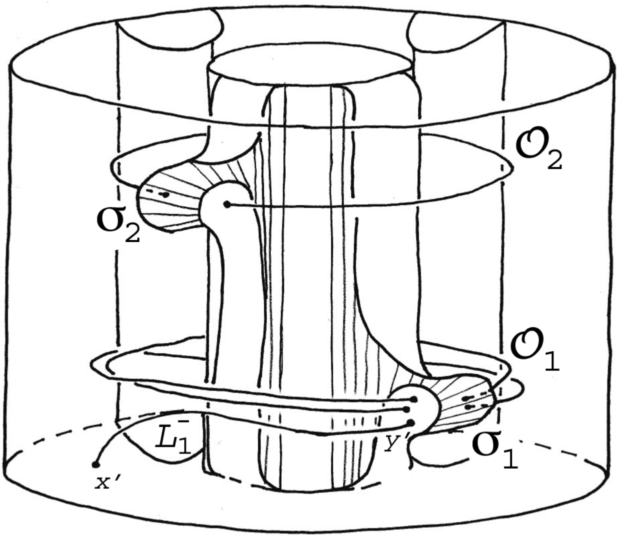


$r = 2$

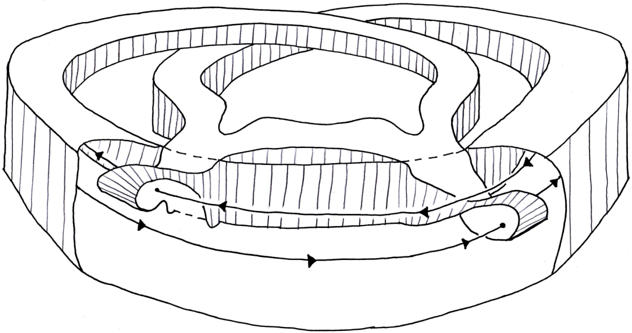
Construcción de K. Kuperberg - paso 2



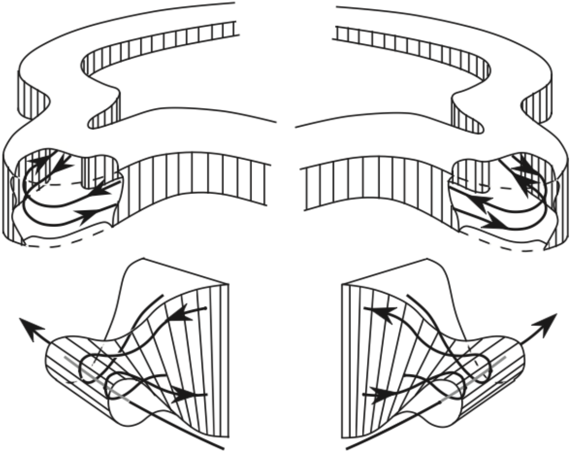
Construcción de K. Kuperberg - paso 3



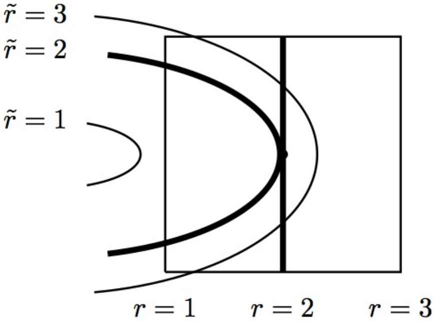
La trampa de K. Kuperberg



Autoinserciones



La desigualdad del radio



Salvo en los puntos especiales,

$$\tilde{r} > r.$$

Trampa de Kuperberg

Satisface:

- No contiene órbitas periódicas.

Trampa de Kuperberg

Satisface:

- No contiene órbitas periódicas.
- Si una órbita atraviesa la trampa, entonces sale frente a su punto de entrada.

Trampa de Kuperberg

Satisface:

- No contiene órbitas periódicas.
- Si una órbita atraviesa la trampa, entonces sale frente a su punto de entrada.
- Existe un conjunto de puntos de entrada cuyas órbitas son atrapadas.

Trampa de Kuperberg

Satisface:

- No contiene órbitas periódicas.
- Si una órbita atraviesa la trampa, entonces sale frente a su punto de entrada.
- Existe un conjunto de puntos de entrada cuyas órbitas son atrapadas.
- El flujo es vertical cerca de la frontera.

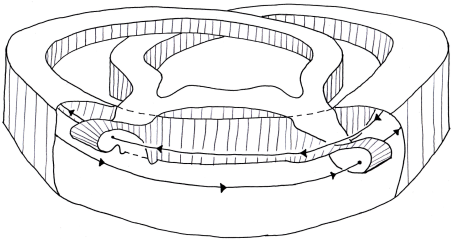
Trampa de Kuperberg

Satisface:

- No contiene órbitas periódicas.
- Si una órbita atraviesa la trampa, entonces sale frente a su punto de entrada.
- Existe un conjunto de puntos de entrada cuyas órbitas son atrapadas.
- El flujo es vertical cerca de la frontera.

Ideas de las demostraciones.

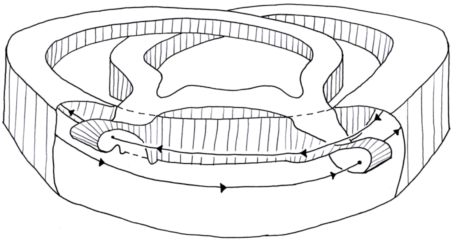
Conjunto minimal de la trampa de Kuperberg



Definición

Un conjunto cerrado es minimal si es invariante bajo la acción del flujo y no contiene subconjuntos propios cerrados e invariantes.

Conjunto minimal de la trampa de Kuperberg

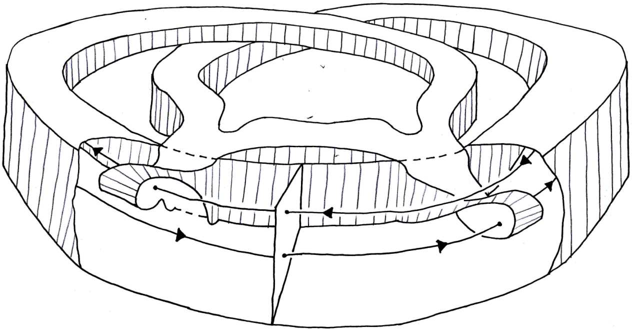


Definición

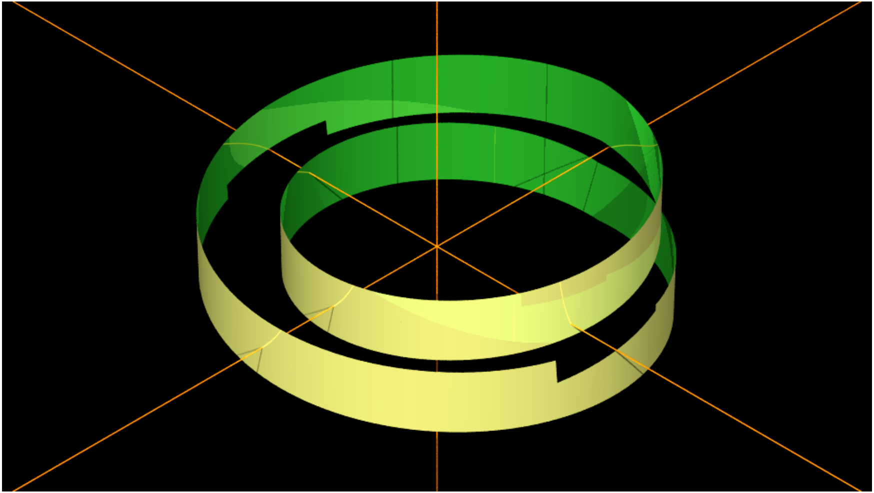
Un conjunto cerrado es minimal si es invariante bajo la acción del flujo y no contiene subconjuntos propios cerrados e invariantes.

- Es único.
- Para una trampa genérica, contiene el "cilindro de Reeb".

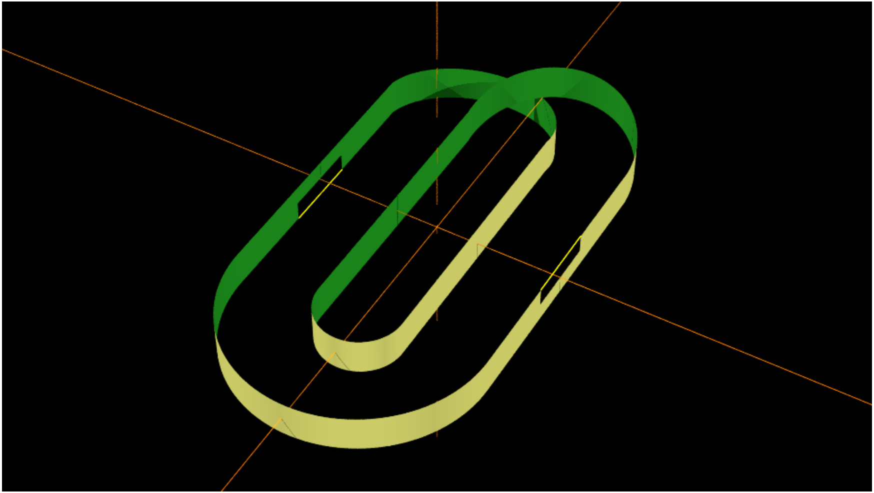
El conjunto minimal de la trampa de Kuperberg



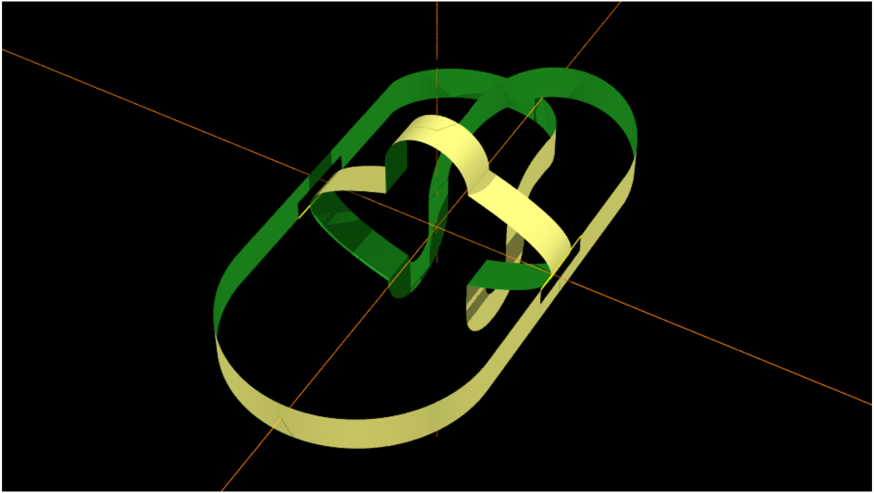
Imágenes hechas por Jos Leys: el cilindro de Reeb



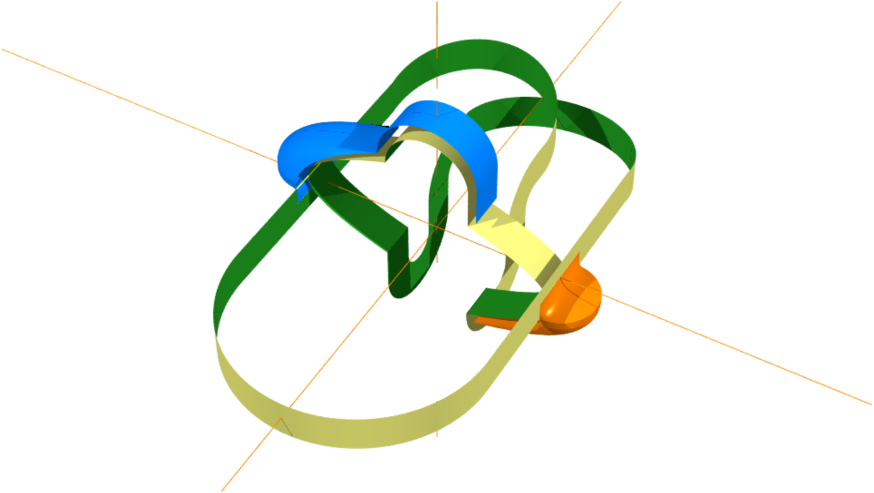
Imágenes hechas por Jos Leys: el cilindro de Reeb



Imágenes hechas por Jos Leys: el cilindro de Reeb en K



Imágenes hechas por Jos Leys: dos hélices infinitas



Imágenes hechas por Jos Leys: dos hélices finitas