Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos: el atractor de Lorenz y la dinámica de la herradura de Smale

Ana Rechtman
www-irma.u-strasbg.fr/ rechtman/cv.html

1

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo discreto

Si tenemos un conjunto X y un mapeo $f : X \to X$ tal que el dominio y la imagen se intersectan, entonces podemos analizar el sistema dinámico definido por las iteraciones de f.

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo discreto

Si tenemos un conjunto X y un mapeo $f : X \to X$ tal que el dominio y la imagen se intersectan, entonces podemos analizar el sistema dinámico definido por las iteraciones de f.

Ejemplo: rotaciones del círculo

$$X = \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)/\sim$$
$$f(x) = x + \theta \bmod(2\pi).$$

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo discreto

Si tenemos un conjunto X y un mapeo $f : X \to X$ tal que el dominio y la imagen se intersectan, entonces podemos analizar el sistema dinámico definido por las iteraciones de f.

Ejemplo: rotaciones del círculo

$$X = \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)/\sim$$
$$f(x) = x + \theta \text{ mod}(2\pi).$$

¿Qué pasa con las órbitas?

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo discreto

Si tenemos un conjunto X y un mapeo $f : X \to X$ tal que el dominio y la imagen se intersectan, entonces podemos analizar el sistema dinámico definido por las iteraciones de f.

Ejemplo: rotaciones del círculo

$$X = \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)/\sim$$
$$f(x) = x + \theta \ \mathrm{mod}(2\pi).$$

¿Qué pasa con las órbitas?

- Si θ es un múltiplo racional de π, todas las órbitas son periódicas.

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo discreto

Si tenemos un conjunto X y un mapeo $f : X \to X$ tal que el dominio y la imagen se intersectan, entonces podemos analizar el sistema dinámico definido por las iteraciones de f.

Ejemplo: rotaciones del círculo

$$X = \mathbb{S}^1 = [0, 2\pi)/\sim$$
$$f(x) = x + \theta \text{ mod}(2\pi).$$

¿Qué pasa con las órbitas?

- Si θ es un múltiplo racional de π, todas las órbitas son periódicas.
- Si θ no es un múltiplo racional de π, entonces todas las órbitas son densas.

Sistema dinámico con tiempo discreto

Ejemplo: dinámica sur-norte

Sistema dinámico con tiempo discreto

Ejemplo: dinámica sur-norte

- Hay dos puntos fijos, los polos S y N.

Sistema dinámico con tiempo discreto

Ejemplo: dinámica sur-norte

- Hay dos puntos fijos, los polos S y N.
- Para todo otro punto,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f^n(x) &= N \\ \lim_{n\to-\infty} f^n(x) &= S \end{aligned}$$

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo continuo

Si tenemos en $\mathbb{R}^n$ una ecuación diferencial

$$X' = F(X),$$

con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Las soluciones definen un flujo en $\mathbb{R}^n$.

¿Qué es un sistema dinámico?

Tiempo continuo

Si tenemos en $\mathbb{R}^n$ una ecuación diferencial

$$X' = F(X),$$

con $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Las soluciones definen un flujo en $\mathbb{R}^n$.

Observación

F podría ser una aplicación que depende del tiempo, es decir, tendríamos una ecuación diferencial de la forma $x' = F(x, t)$. En este caso la ecuación no es autónoma.

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo: una suspensión, pasar de tiempo discreto a continuo

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo: una suspensión, pasar de tiempo discreto a continuo
Ejemplo: un campo lineal en $\mathbb{R}^2$

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo: una suspensión, pasar de tiempo discreto a continuo
Ejemplo: un campo lineal en $\mathbb{R}^2$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo: una suspensión, pasar de tiempo discreto a continuo
Ejemplo: un campo lineal en $\mathbb{R}^2$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observemos que el origen es un punto fijo, pues el campo vectorial es nulo. Decimos que el origen es una singularidad del campo vectorial.

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo: una suspensión, pasar de tiempo discreto a continuo
Ejemplo: un campo lineal en $\mathbb{R}^2$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Observemos que el origen es un punto fijo, pues el campo vectorial es nulo. Decimos que el origen es una singularidad del campo vectorial.

¿Qué podemos decir sobre el comportamiento cerca del origen?

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$x' = cx(1 - x) \qquad c > 1$$

- en $x = 0$ y $x = 1$ el campo vectorial es singular, por lo que son puntos fijos.

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo en el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$

$$x' = cx(1-x) \qquad c > 1$$

- en $x = 0$ y $x = 1$ el campo vectorial es singular, por lo que son puntos fijos.
- para toda $x_0 \in (0,1)$ la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con $x(0) = x_0$ satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= 1 \\ \lim_{t\to-\infty} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo en el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$

$$x' = cx(1-x) \qquad c > 1$$

- en $x = 0$ y $x = 1$ el campo vectorial es singular, por lo que son puntos fijos.
- para toda $x_0 \in (0,1)$ la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con $x(0) = x_0$ satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= 1 \\ \lim_{t\to-\infty} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

- El mapeo $x \mapsto x(1-x) = x - x^2$ tiene como derivada $c(1-2x)$,

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$x' = cx(1 - x) \qquad c > 1$$

- en $x = 0$ y $x = 1$ el campo vectorial es singular, por lo que son puntos fijos.
- para toda $x_0 \in (0, 1)$ la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con $x(0) = x_0$ satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= 1 \\ \lim_{t\to-\infty} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

- El mapeo $x \mapsto x(1 - x) = x - x^2$ tiene como derivada $c(1 - 2x)$,

$$x = 0, \qquad \text{la derivada vale c} \qquad \Rightarrow 0 \qquad \text{es inestable}$$

Sistema dinámico con tiempo continuo

Ejemplo en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$x' = cx(1 - x) \qquad c > 1$$

- en $x = 0$ y $x = 1$ el campo vectorial es singular, por lo que son puntos fijos.
- para toda $x_0 \in (0, 1)$ la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial con $x(0) = x_0$ satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) &= 1 \\ \lim_{t\to-\infty} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

- El mapeo $x \mapsto x(1 - x) = x - x^2$ tiene como derivada $c(1 - 2x)$,

$x = 0$, la derivada vale c $\Rightarrow 0$ es inestable

$x = 1$, la derivada vale -c $\Rightarrow 1$ es estable

Las ecuaciones de Lorenz

Edward N. Lorenz (1917 - 2008),

Las ecuaciones de Lorenz

Edward N. Lorenz (1917 - 2008), en 1967 propone el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$

Las ecuaciones de Lorenz

Edward N. Lorenz (1917 - 2008), en 1967 propone el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$ ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$).

Las ecuaciones de Lorenz

Edward N. Lorenz (1917 - 2008), en 1967 propone el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$ ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$).

Primeras observaciones

Las ecuaciones de Lorenz

Edward N. Lorenz (1917 - 2008), en 1967 propone el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= rx - y - xz \\ z' &= xy - bz. \end{aligned}$$

con $\sigma, r, b > 0$ ($\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$).

Primeras observaciones

- La simetría

$$(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$$

deja el sistema de ecuaciones invariante.

Puntos fijos

$(0,0,0)$ es un punto fijo. ¿Hay otros?

Puntos fijos

$(0,0,0)$ es un punto fijo. ¿Hay otros?

$$\begin{aligned} x' = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = y, \\ z' = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{b}, \\ y' = 0 \quad &\Rightarrow \quad x(r-1) - \frac{x^3}{b} = 0. \end{aligned}$$

Puntos fijos

$(0,0,0)$ es un punto fijo. ¿Hay otros?

$$\begin{aligned} x' = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = y, \\ z' = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{b}, \\ y' = 0 \quad &\Rightarrow \quad x(r-1) - \frac{x^3}{b} = 0. \end{aligned}$$

La última ecuación es equivalente a

$$\frac{x^2}{b} = r - 1,$$

con soluciones $x = \sqrt{b(r-1)}$.

Puntos fijos

$$\frac{x^2}{b} = r - 1,$$

Como $b, r > 0$, distinguimos dos casos:

- Si $0 < r \leq 1$, el único punto fijo es el origen.

Puntos fijos

$$\frac{x^2}{b} = r - 1,$$

Como $b, r > 0$, distinguimos dos casos:

- Si $0 < r \leq 1$, el único punto fijo es el origen.
- Si $r > 1$, tenemos dos nuevos puntos fijos

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \\ p_2 &= (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1). \end{aligned}$$

¿Qué más podemos decir de los puntos fijos?

Aproximación por la diferencial

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2 en una vecindad de un punto x_0, entonces

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

con $\lim_{y \to 0} \frac{\|o(y)\|}{\|y\|} = 0$.

¿Qué más podemos decir de los puntos fijos?

Aproximación por la diferencial

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2 en una vecindad de un punto x_0, entonces

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

  con $\lim_{y \to 0} \frac{\|o(y)\|}{\|y\|} = 0$.
- En el caso de una ecuación diferencial $X' = F(X)$ las soluciones cerca de un punto fijo se pueden aproximar por DF evaluada en el punto fijo.

¿Qué más podemos decir de los puntos fijos?

Aproximación por la diferencial

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2 en una vecindad de un punto x_0, entonces

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

  con $\lim_{y\to 0} \frac{\|o(y)\|}{\|y\|} = 0$.
- En el caso de una ecuación diferencial $X' = F(X)$ las soluciones cerca de un punto fijo se pueden aproximar por DF evaluada en el punto fijo.

$$F(x, y, z) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz),$$

¿Qué más podemos decir de los puntos fijos?

Aproximación por la diferencial

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^2 en una vecindad de un punto x_0, entonces

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

  con $\lim_{y\to 0} \frac{\|o(y)\|}{\|y\|} = 0$.
- En el caso de una ecuación diferencial $X' = F(X)$ las soluciones cerca de un punto fijo se pueden aproximar por DF evaluada en el punto fijo.

$$F(x, y, z) = (\sigma(y - x), rx - y - xz, xy - bz),$$

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix}$$

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de DF en el origen?

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de *DF* en el origen?
En el origen,

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de DF en el origen?
En el origen,

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos decir de los valores propios?

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de DF en el origen?
En el origen,

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos decir de los valores propios?

- $-b$ es un valor propio con espacio propio el generado por $(0,0,1)$.

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de *DF* en el origen?
En el origen,

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos decir de los valores propios?

- $-b$ es un valor propio con espacio propio el generado por $(0,0,1)$.
- Los otros dos valores propios corresponden a raíces de

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) = 0$$

Descripción de los puntos fijos

¿Cuál es el valor de *DF* en el origen?
En el origen,

$$DF(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos decir de los valores propios?

- $-b$ es un valor propio con espacio propio el generado por $(0,0,1)$.
- Los otros dos valores propios corresponden a raíces de

$$\begin{aligned} \lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) &= 0 \\ \lambda &= \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r}}{2} \end{aligned}$$

Descripción de los puntos fijos

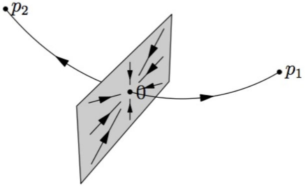
$$\lambda = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r}}{2}$$

Para $0 < r < 1$, las dos soluciones son negativas $\Rightarrow$ el origen es un punto atractivo.

Descripción de los puntos fijos

$$\lambda = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r}}{2}$$

Para $0 < r < 1$, las dos soluciones son negativas $\Rightarrow$ el origen es un punto atractivo.
Para $r > 1$, uno de las soluciones es positiva $\Rightarrow$ el origen es un punto hiperbólico.

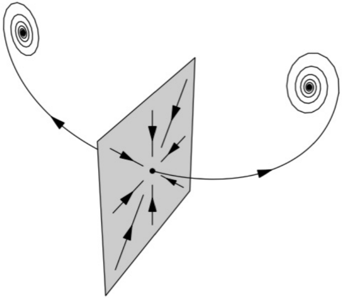


Para $r > 1$ pequeña, todos los valores propios de $DF(p_i)$ son reales y negativos.

Descripción de los puntos fijos

$$\lambda = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r}}{2}$$

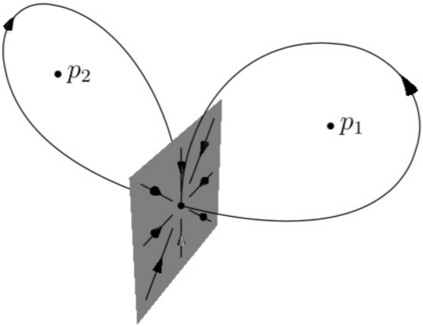
Cuando r crece, dos de los valores propios $DF(p_i)$ se vuelven complejos y ambox puntos siguen siendo atractores.



Descripción de los puntos fijos

$$\lambda = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r}}{2}$$

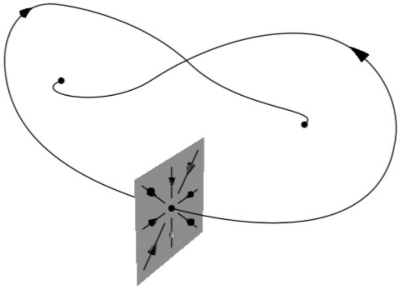
Cuando r llega al punto de transición $r_0 \sim 13{,}926$,



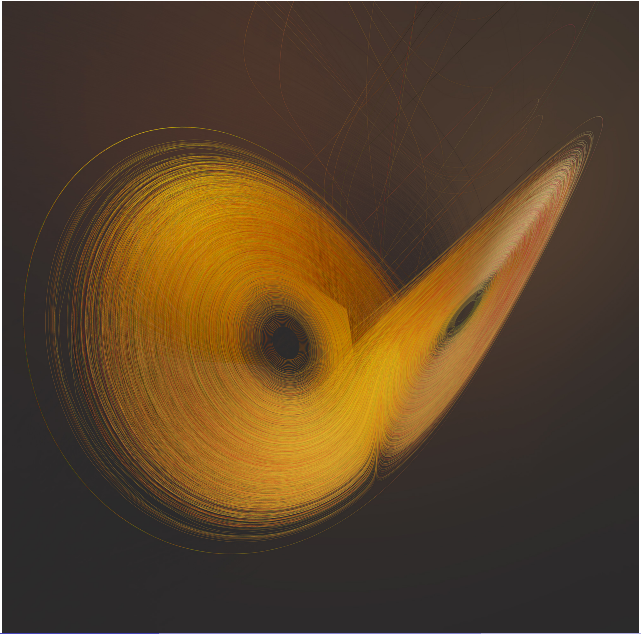
Descripción de los puntos fijos

$$\lambda = \frac{-\sigma - 1 \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r}}{2}$$

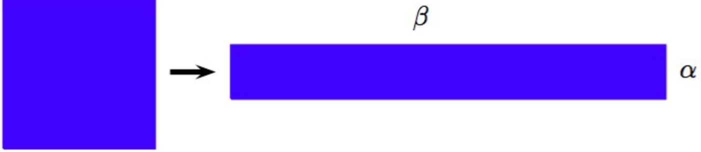
Finalmente para $r > r_0$



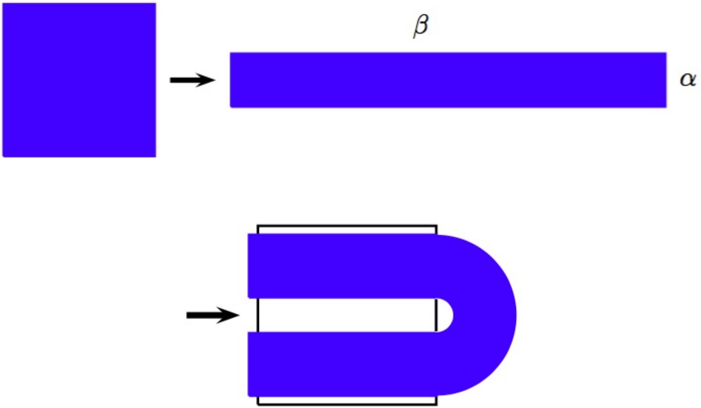
Atractor de Lorenz



La herradura de Smale



La herradura de Smale

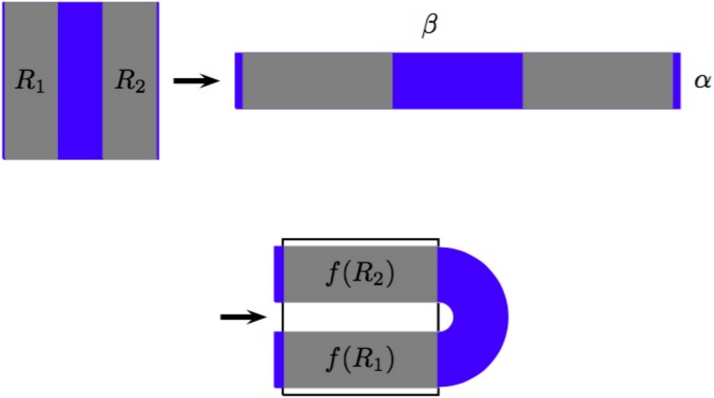


La herradura de Smale

Describir la región D_2 del cuadrado C tal que $f(D_2) \subset C$

La herradura de Smale

Describir la región D_2 del cuadrado C tal que $f(D_2) \subset C$



$$D_2 = R_1 \cup R_2$$

es el dominio de f^2.