Erratum
Calendrier Mathématique 2020

7 décembre 2020

Merci à tous ceux qui nous font remarquer les erreurs dans le calendrier.

— La solution du défi du 31 mars est incorrecte, voici une possible solution. La réponse est 18.
Défi. D'un côté d'une rue se trouvent les maisons 1, 3, 5, 7 en face desquelles se trouvent respectivement les maisons 2, 4, 6, 8. Le facteur visite toutes les maisons en commençant par la 1, en traversant la rue entre chaque maison et sans aller à la maison située directement en face. De combien de manières différentes peut-il réaliser son parcours ?
Solution. Regardons d'abord l'ordre dans lequel les maisons impaires sont visitées. Il y a $3! = 6$ possibilités. Dans chaque cas il y a 3 façons de visiter les maisons paires, il y a donc 18 parcours possibles. Nous analysons chacun des cas dans les tableaux.

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td colspan="2">8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>X</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">6</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>X</td><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>

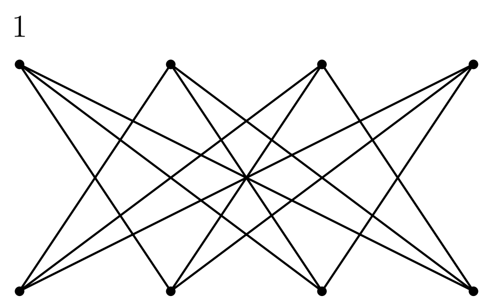
<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td colspan="2">8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>X</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td colspan="3">8</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>X</td><td>6</td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td colspan="2">6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>X</td><td>8</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td colspan="3">6</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>8</td><td>8</td><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>X</td><td>8</td><td>2</td></tr>
</table>

Le problème est equivalent au suivant. Soit G un graphe avec 8 sommets, 4 en haut et 4 en bas, comme dans la figure. Il faut trouver le nombre de chemins qui partent du sommet marqué avec 1, qui passent une fois par chaque sommet.



Pour ceci nous pouvons d'abord compter le nombre de façons de choisir 4 arêtes disjointes (avec extrémités disjointes), ce qui nous donne les passage entre les maisons impaires et les maisons paires. Puis multiplier par le nombre de façons de choisir 4 arêtes disjointes dans le complément, soit un graphe où chaque sommet a deux voisins.
Pour compter le nombre de façons de choisir 4 arêtes disjointes, nous

choisissons une arête issue de 1. Il y a 3 choix possibles. Parmi les 4 sommets de haut, il y en a un qui n'a un qui a trois arêtes disjointes de celle qu'on vient de choisir. Nous choisissons donc une arête pour ce sommet, il y a 3 choix possibles. Ceci détermine les autres 2 arêtes. Donc il y a $3 \times 3 = 9$ façons de choisir les passages entres les maisons impaires et paires.
La graphe dans le complément a deux arêtes dans chaque sommet, car nous enlévons une arête par sommet. Nous comptons alors le nombre de façons de choisir 4 arêtes disjointes dans ce nouveau graphe. On commence par le sommet 1, il y a 2 choix possibles, mais ce choix détermine tout.
Donc au total il y a $9 \times 2 = 18$ parcours pour le facteur.

— La solution du défi du 3 avril est incomplète. La réponse est $x + y$ égal à 10 ou 15.
Défi. Les angles intérieurs d'un triangle mesurent $(5x+3y)^\circ$, $(3x+20)^\circ$ et $(10y + 30)^\circ$, où x et y sont des nombres entiers positifs. Quelle est la valeur de $x + y$?
Solution. Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, nous avons

$$(5x + 3y)^\circ + (3x + 20)^\circ + (10y + 30)^\circ = 180^\circ,$$

d'où $8x + 13y = 130^\circ$. Voyons maintenant comment résoudre cette équation. D'une part nous avons $0 \leq 8x \leq 130$, ainsi $0 \leq x \leq 16$. D'autre part, $13y$ et 130 sont divisibles par 13 donc 13 est un diviseur de $8x$. Comme 13 est un nombre premier et qu'il ne divise pas 8, 13 doit être un diviseur de x. Les valeurs possibles pour x sont 0 et 13, d'où $y = 10$ dans le premier cas et $13y = 130 - 8 \times 13 = 26$, c'est-à-dire que $y = 2$ dans le deuxième cas. Ainsi $x + y = 0 + 10 = 10$ ou $x + y = 13 + 2 = 15$.

— La solution du défi du 5 mai est incorrecte, voici une possible solution. La réponse est 108.

Défi. Les diviseurs de 39 sont 1, 3, 13 et 39 dont l'ensemble des chiffres des unités est $\{1, 3, 9\}$. Quel est le plus petit nombre dont l'ensemble des diviseurs a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pour ensemble des chiffres des unités ?

Solution. Les nombres 1, 9, 27, 36, 54 y 108 sont des diviseurs de 108 et donc il satisfait les conditions du problème, nous allons voir que c'est le plus petit.

Soit $C(n)$ l'ensemble des chiffres des diviseurs de n. Si n est plus petit que 100, comme 0 appartient à $C(n)$, le nombre n doit être divisible par 10. Pour $n = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ le chiffre 9 n'est pas dans $C(n)$. Il reste donc $n = 90$, mais 7 n'est pas dans $C(90)$. Donc le nombre recherche doit avoir au moins 3 chiffres.

Finalement, $C(n)$ ne contient pas de 9 pour $n = 100$, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, car aucun de ses nombres est divisible par 9, 19, 29, 39, 49 et donc par aucun nombre qui contient le 9 comme chiffre. Donc, 108 est le plus petit nombre qui satisfait la propriété.

— La solution du défi du 11 mai est incomplète, mais la réponse est correcte. Dans la solution il manque vérifier que la réponse est correcte. Voici un possibilité.

Défi. Trouver le chiffre situé en position 2020 dans l'expression décimale de la fraction $\frac{469}{1998}$.

Solution. En posant la division, on obtient :

$$\frac{469}{1998} = 0.2347347347\ldots.$$

Vérifions que le développement décimal est périodique.

$$\begin{aligned}
0{,}2\underline{347} &= \frac{2}{10} + \frac{347}{10^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1000}\right)^i \\
&= \frac{2}{10} + \frac{347}{10^4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}\right) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{347}{9990} \\
&= \frac{2345}{9990} = \frac{469}{1998}.
\end{aligned}$$

Le développement est effectivement périodique de période 3.
Comme $2020 = 673 \times 3 + 1$, le chiffre situé en position 2020 est le chiffre 7.