Geometría hiperbólica (en dimensión 2)

Ana Rechtman

Recordatorio

$$\begin{array}{rcl} PSL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Transf. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cz+d}. \end{array}$$

es un isomorfismo.

Recordatorio

$$\begin{array}{ccc} PSL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Transf. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cz+d}. \end{array}$$

es un isomorfismo.

Teorema

$PSL(2,\mathbb{C})$ actua de forma libre y transitiva en las tripletas ordenadas de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Recordatorio

$$\begin{array}{ccc} PSL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Transf. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{ax+b}{cz+d}. \end{array}$$

es un isomorfismo.

Teorema

$PSL(2,\mathbb{C})$ actua de forma libre y transitiva en las tripletas ordenadas de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Eso implica que podemos identificar cada tripleta de puntos con un único elemento de $PSL(2,\mathbb{C})$.

Razón cruzada

Definición (Razón cruzada)

Dados cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

- $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{C}$;

Razón cruzada

Definición (Razón cruzada)

Dados cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

- $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{C}$;
- $f_{(z_2, z_3, z_2)}(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$;

Razón cruzada

Definición (Razón cruzada)

Dados cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 de $\widehat{\mathbb{C}}$,

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}.$$

- $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{C}$;
- $f_{(z_2, z_3, z_2)}(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$;
- La razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius (hacer el cálculo).

Razón cruzada

Lema

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ son cocíclicos si y sólo si $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Razón cruzada

Lema

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ *son cocíclicos si y sólo si* $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Rectas

Razón cruzada

Lema

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ son cocíclicos si y sólo si $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Rectas

*D*emostración.

$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{C}$ es real si y sólo si el argumento de este número es 0 o π.

Razón cruzada

Lema

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ son cocíclicos si y sólo si $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.

Rectas

*D*emostración.

$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{C}$ es real si y sólo si el argumento de este número es 0 o π.

Supongamos que son cocíclicos están ordendados de alguna de las siguientes formas

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \quad z_1, z_2, z_4, z_3 \quad z_1, z_3, z_4, z_2$$
$$z_1, z_3, z_2, z_4 \quad z_1, z_4, z_2, z_2 \quad z_1, z_4, z_2, z_3.$$

Razón cruzada

Proposición

Una transformación de Möbius manda círculos en círculos.

Recordatorio

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Recordatorio

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Ejercicio

Las transformaciones de Möbius son conformes.

Recordatorio

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Ejercicio

Las transformaciones de Möbius son conformes.

Teorema

Las transformaciones conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ son las transformaciones de Möbius.

El disco de Poincaré

El disco de Poincaré

Automorfismos conformes de $\mathbb{D}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{T \text{ trans. de Möbius} \mid T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}.$$

El disco de Poincaré

Automorfismos conformes de $\mathbb{D}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{T \text{ trans. de Möbius} \mid T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}\}.$$

Teorema

$Aut(\mathbb{D})$ es el subgrupo de las transformaciones de Möbius de la forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

con $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y $a \in mD$, o equivalentemente

$$f(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

con $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

El disco de Poincaré

Teorema

Aut($\mathbb{D}$) es el subgrupo de las transformaciones de Möbius de la forma

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

con $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ y $a \in mD$, o equivalentemente

$$f(z) = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

con $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Observación

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C}), |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$
es el grupo $SU(1,1)$, así que Aut($\mathbb{D}$) es $PSU(1,1)$.

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$C(\infty) \quad =$$

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} C(\infty) &= 1 \\ C(1) &= \end{aligned}$$

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} C(\infty) &= 1 \\ C(1) &= i \\ C(0) &= \end{aligned}$$

Transformación de Cayley

$$
\begin{aligned}
C : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\
z &\mapsto \frac{z-i}{z+i}
\end{aligned}
$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
C(\infty) &= 1 \\
C(1) &= i \\
C(0) &= -1 \\
C(a) &=
\end{aligned}
$$

Transformación de Cayley

$$
\begin{aligned}
C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\
z &\mapsto \frac{z-i}{z+i}
\end{aligned}
$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
C(\infty) &= 1 \\
C(1) &= i \\
C(0) &= -1 \\
C(a) &= 1 - \frac{2(1-ai)}{a^2+1}
\end{aligned}
$$

Transformación de Cayley

$$\begin{array}{rcl} C : \mathbb{H} & \to & \mathbb{D} \\ z & \mapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$\begin{array}{rcl} C(\infty) & = & 1 \\ C(1) & = & i \\ C(0) & = & -1 \\ C(a) & = & 1 - \dfrac{2(1-ai)}{a^2+1} \\ C(i) & = & \end{array}$$

Transformación de Cayley

$$\begin{aligned} C : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Lema

C es una transformación conforme de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{D}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} C(\infty) &= 1 \\ C(1) &= i \\ C(0) &= -1 \\ C(a) &= 1 - \frac{2(1-ai)}{a^2+1} \\ C(i) &= 0. \end{aligned}$$

El plano hiperbólico

El plano hiperbólico

Automorfismos conformes de $\mathbb{H}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\, T \text{ trans. de Möbius} \mid T(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \}.$$

El plano hiperbólico

Automorfismos conformes de $\mathbb{H}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{T \text{ trans. de Möbius} \mid T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}.$$

Teorema

Aut$(\mathbb{H})$ *es el subgrupo de las transformaciones de Möbius de la forma*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *con* $ab - cd > 0$.

El plano hiperbólico

Automorfismos conformes de $\mathbb{H}$:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{T \text{ trans. de Möbius} \mid T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}.$$

Teorema

$Aut(\mathbb{H})$ es el subgrupo de las transformaciones de Möbius de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ab - cd > 0$.Entonces,

$$Aut(\mathbb{H}) \simeq SL(2,\mathbb{R})/\pm Id = PSL(2,\mathbb{R}).$$

Geodésicas e isometrías

En $\mathbb{H}$ con la métrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Geodésicas e isometrías

En $\mathbb{H}$ con la métrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [t_0, t_1] & \rightarrow & \mathbb{H} \\ t & \mapsto & x(t) + iy(t) \end{array}$$

Geodésicas e isometrías

En $\mathbb{H}$ con la métrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

$$\begin{aligned}
\gamma : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbb{H} \\
t &\mapsto x(t) + iy(t) \\
\ell(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt.
\end{aligned}$$

Geodésicas e isometrías

En $\mathbb{H}$ con la métrica $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

$$\begin{aligned} \gamma : [t_0, t_1] &\rightarrow \mathbb{H} \\ t &\mapsto x(t) + iy(t) \\ \ell(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{y(t)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt. \end{aligned}$$

Definición (Geodésica)

Una curva γ de z_0 a z_1 es una geodésica si localmente minimiza distancias.

Geodésicas e isometrías

Definición (Geodésica)

Una curva γ de z_0 a z_1 es una geodésica si localmente minimiza distancias.

Proposición

- *Las líneas rectas verticales en $\mathbb{H}$ son geodésicas. Si $b > a$, $d(ai, bi) = \log \frac{b}{a}$.*

Definición (Geodésica)

Una curva γ de z_0 a z_1 es una geodésica si localmente minimiza distancias.

Proposición

- *Las líneas rectas verticales en $\mathbb{H}$ son geodésicas. Si $b > a$, $d(ai, bi) = \log \frac{b}{a}$.*
- *Los radios son geodésicas en $\mathbb{D}$.*

Geodésicas e isometrías

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *es una isometría que preserva la orientación si:*

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una isometría que preserva la orientación si:

- *es diferenciable como transformación de $\mathbb{R}^2$;*

Geodésicas e isometrías

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una isometría que preserva la orientación si:

- *es diferenciable como transformación de $\mathbb{R}^2$;*
- *$det(Df(z)) > 0$ para toda $z \in mH$;*

Geodésicas e isometrías

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una isometría que preserva la orientación si:

- *es diferenciable como transformación de $\mathbb{R}^2$;*
- *$det(Df(z)) > 0$ para toda $z \in mH$;*
- *$d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$ para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.*

Geodésicas e isometrías

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una isometría que preserva la orientación si:

- *es diferenciable como transformación de $\mathbb{R}^2$;*
- *$det(Df(z)) > 0$ para toda $z \in mH$;*
- *$d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$ para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.*

Proposición

$PSL(2, \mathbb{R})$ actua por isometrías en $\mathbb{H}$.

Geodésicas e isometrías

Definición

$f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una isometría que preserva la orientación si:

- *es diferenciable como transformación de $\mathbb{R}^2$;*
- *$det(Df(z)) > 0$ para toda $z \in mH$;*
- *$d(f(z_1), f(z_2)) = d(z_1, z_2)$ para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.*

Proposición

$PSL(2, \mathbb{R})$ actua por isometrías en $\mathbb{H}$.

Proposición

$C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es una isometría.

Geodésicas e isometrías

Proposición

Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$.

- *Si Real(z_0) $=$Real(z_1) la geodésica que pasa por z_0 y z_1 es la línea recta vertical.*

Proposición

Sean $z_0, z_1 \in \mathbb{H}$.

- *Si Real*$(z_0) =$*Real*(z_1) *la geodésica que pasa por* z_0 *y* z_1 *es la línea recta vertical.*
- *Si no, es el arco de círculo con centro en* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *que pasa por* z_0 *y* z_1.