Geometría hiperbólica (en dimensión 2)

Ana Rechtman

Importancia de la geometría hiperbólica

1. Espacios de curvatura K constante en dimensión 2.

Importancia de la geometría hiperbólica

1. Espacios de curvatura K constante en dimensión 2. Si son simplemente conexos entonces:
    1. $K = 0$, el espacio es el plano euclidiano;
    2. $K > 0$, el espacio es la esfera;
    3. $K < 0$, el espacio es el plano hiperbólico.
2. Superficies.

Importancia de la geometría hiperbólica

1. Espacios de curvatura K constante en dimensión 2. Si son simplemente conexos entonces:
   1. $K = 0$, el espacio es el plano euclidiano;
   2. $K > 0$, el espacio es la esfera;
   3. $K < 0$, el espacio es el plano hiperbólico.
2. Superficies. Si una superficie tiene característica de Euler negativa (género ≥ 2) admite muchas métricas hiperbólicas.

Dos modelos

1. $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$;

Dos modelos

1. $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$;
2. $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x, y)| < 1\}$ con la métrica $\frac{dx^2+dy^2}{1-(x^2+y^2)}$.

Importancia histórica

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.
2. Toda linea recta puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.
2. Toda linea recta puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.
2. Toda linea recta puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.
2. Toda linea recta puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una *única* paralela a la recta que pasa por el punto.

Importancia histórica

Los axiomas de Euclides (300 A.C.):

1. Todo par de puntos definen una linea recta.
2. Toda linea recta puede ser continuada infinitamente en ambas direcciones.
3. Dado un punto y una longitud, se puede dibujar un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una *única* paralela a la recta que pasa por el punto. Discutir algunas equivalencias.

Tentativas para demostrar el quinto postulado

300 Euclides, la suma de los ángulos es 180°.

Tentativas para demostrar el quinto postulado

300 Euclides, la suma de los ángulos es 180°.

1000 ibn al-Haytham. El lugar geométrico de los puntos que equidistan a una recta es una recta.

Tentativas para demostrar el quinto postulado

300 Euclides, la suma de los ángulos es 180°.

1000 ibn al-Haytham. El lugar geométrico de los puntos que equidistan a una recta es una recta.

1663 Wallis, hay triángulos semejantes con tamaños distintos.

1750 Saccheri y Lambert exploran que pasaría si el postulado es falso, tratando de hacer una demostración de reducción al absurdo.

Tentativas para demostrar el quinto postulado

300 Euclides, la suma de los ángulos es 180°.

1000 ibn al-Haytham. El lugar geométrico de los puntos que equidistan a una recta es una recta.

1663 Wallis, hay triángulos semejantes con tamaños distintos.

1750 Saccheri y Lambert exploran que pasaría si el postulado es falso, tratando de hacer una demostración de reducción al absurdo.

XVIII Últimos intentos de demostrar el postulado.

Tentativas para demostrar el quinto postulado

300 Euclides, la suma de los ángulos es 180°.

1000 ibn al-Haytham. El lugar geométrico de los puntos que equidistan a una recta es una recta.

1663 Wallis, hay triángulos semejantes con tamaños distintos.

1750 Saccheri y Lambert exploran que pasaría si el postulado es falso, tratando de hacer una demostración de reducción al absurdo.

XVIII Últimos intentos de demostrar el postulado.

XIX Independientemente, Gauss, Bolyai y Lobachevsky desarrollaron geometrías consistentes cambiando el quinto postulado.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

1872 Klein, remplazó el estudio de la geometrías en un sentido clásico, por el estudio de los grupos de isometrías de dichos espacios.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

1872 Klein, remplazó el estudio de la geometrías en un sentido clásico, por el estudio de los grupos de isometrías de dichos espacios.

1881 Poincaré, generó el modelo del disco que permitió estudiar las isometrías como transformaciones de Möbius.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

1872 Klein, remplazó el estudio de la geometrías en un sentido clásico, por el estudio de los grupos de isometrías de dichos espacios.

1881 Poincaré, generó el modelo del disco que permitió estudiar las isometrías como transformaciones de Möbius. Relacionó la geometría hiperbólica con los espacios cubrientes de superficies.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

1872 Klein, remplazó el estudio de la geometrías en un sentido clásico, por el estudio de los grupos de isometrías de dichos espacios.

1881 Poincaré, generó el modelo del disco que permitió estudiar las isometrías como transformaciones de Möbius. Relacionó la geometría hiperbólica con los espacios cubrientes de superficies. Generalizó a dimensiones más grandes.

Florecimiento

1868 Beltrami, generó modelos para las geometrías no-euclidianas.

1872 Klein, remplazó el estudio de la geometrías en un sentido clásico, por el estudio de los grupos de isometrías de dichos espacios.

1881 Poincaré, generó el modelo del disco que permitió estudiar las isometrías como transformaciones de Möbius. Relacionó la geometría hiperbólica con los espacios cubrientes de superficies. Generalizó a dimensiones más grandes.

XX La geometría hiperbólica juega un papel muy importante en la solución de la conjetura de Poincaré y el teorema de geometrización.

Plan del curso

- Introducción a la geometría hiperbólica en el model $\mathbb{H}$, de dimensión 2.

Plan del curso

- Introducción a la geometría hiperbólica en el model $\mathbb{H}$, de dimensión 2.
- Discutir el espacio tangente a $\mathbb{H}$ y el espacio tangente unitario.

Plan del curso

- Introducción a la geometría hiperbólica en el model $\mathbb{H}$, de dimensión 2.
- Discutir el espacio tangente a $\mathbb{H}$ y el espacio tangente unitario.
- Entender los flujos geodésicos y horocíclicos.

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty.$

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}} \quad & \to \quad \widehat{\mathbb{C}} \\ z \quad & \mapsto \tfrac{az+b}{cz+d}, \end{aligned}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ab - cd \neq 0.$

Observaciones

$$f(\infty) =$$

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ab - cd \neq 0$.

Observaciones

$$f(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} =$$

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ab - cd \neq 0$.

Observaciones

$$f(\infty) = \lim_{|z| \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty.$

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ab - cd \neq 0$.

Observaciones

$$f(\infty) = \lim_{|z| \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

$$cz + d = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad z = -\frac{d}{c}$$

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$.

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ab - cd \neq 0$.

Observaciones

$$f(\infty) = \lim_{|z| \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

$$cz + d = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad z = -\frac{d}{c}$$

en este caso $az + b = b - \frac{ad}{c} \neq 0$.

Transformaciones de Möbius

Definición

$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty.$

$$\begin{array}{rcl} f : \widehat{\mathbb{C}} & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \end{array}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *y* $ab - cd \neq 0.$

Observaciones

$$f(\infty) = \lim_{|z|\to\infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

$$cz + d = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad z = -\frac{d}{c}$$

en este caso $az + b = b - \frac{ad}{c} \neq 0$. Definimos $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Sobre las transformaciones de Möbius

f es invertible:

Sobre las transformaciones de Möbius

f es invertible:

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

$$\begin{array}{ccc} GL(2,\mathbb{C}) & & \text{Trans. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius,

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius, pero tienen determinantes distitnos.

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius, pero tienen determinantes distitnos.

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) & \rightarrow & \text{Trans. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius, pero tienen determinantes distitnos.

$$\begin{array}{ccc} SL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Trans. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Es un homomorfismo de grupos.

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius, pero tienen determinantes distitnos.

$$\begin{array}{rcl} SL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Trans. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Es un homomorfismo de grupos. ¿Cuál es su kernel?

Sobre las transformaciones de Möbius

Observación

Las matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

definen la misma transformación de Möbius, pero tienen determinantes distitnos.

$$\begin{array}{rcl} SL(2,\mathbb{C}) & \to & \text{Trans. de Möbius} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

Es un homomorfismo de grupos. ¿Cuál es su kernel?

$$PSL(2,\mathbb{C}) \quad \to \quad \text{Trans. de Möbius}$$

es un isomorfismo de grupos.

Transformaciones conformes

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Transformaciones conformes

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Ejercicio

Las transformaciones de Möbius son conformes.

Transformaciones conformes

Definición

Una transformación es conforme si preserva ángulos.

Ejercicio

Las transformaciones de Möbius son conformes.

Teorema

Las transformaciones conformes de $\widehat{\mathbb{C}}$ son las transformaciones de Möbius.

Acciones de grupos

Definición

Un grupo G actua de forma transitiva en un espacio X si para todo par de puntos x_0, x_1 existe $g \in G$ tal que $g(x_0) = x_1$.

Acciones de grupos

Definición

Un grupo G actua de forma transitiva en un espacio X si para todo par de puntos x_0, x_1 existe $g \in G$ tal que $g(x_0) = x_1$.
La acción es libre si $g(x_0) = x_0$ implica que $g = id$ para cualquier x_0.

Acciones de grupos

Definición

Un grupo G actua de forma transitiva en un espacio X si para todo par de puntos x_0, x_1 existe $g \in G$ tal que $g(x_0) = x_1$.
La acción es libre si $g(x_0) = x_0$ implica que $g = id$ para cualquier x_0.

Ejercicio

$PSL(2, \mathbb{C})$ actua de forma transitiva pero no libre en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Acciones de grupos

Definición

Un grupo G actua de forma transitiva en un espacio X si para todo par de puntos x_0, x_1 *existe* $g \in G$ *tal que* $g(x_0) = x_1$*.*
La acción es libre si $g(x_0) = x_0$ *implica que* $g = id$ *para cualquier* x_0*.*

Ejercicio

$PSL(2, \mathbb{C})$ *actua de forma transitiva pero no libre en* $\widehat{\mathbb{C}}$*. ¿Qué pasa si lo hacemos actuar en el espacio de parejas ordenadas de puntos distintos?*

Una acción libre y transitiva

Teorema

$PSL(2,\mathbb{C})$ actua de forma libre y transitiva en las tripletas ordenadas de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Una acción libre y transitiva

Teorema

$PSL(2, \mathbb{C})$ actua de forma libre y transitiva en las tripletas ordenadas de puntos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Eso implica que podemos identificar cada tripleta de puntos con un único elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$.