

# LE THÉORÈME DE TORELLI POUR LES SURFACES K3

SAMUEL BOISSIÈRE

*Notes pour un mini-cours de 5h.  
Master class “Around Torelli’s theorem for K3 surfaces,  
Arithmetic, Geometric and Dynamical aspects”.  
October 28 - November 1st, 2013,  
Institut de Recherche de Mathématique Avancée, Strasbourg*

## TABLE DES MATIÈRES

1. Quelques propriétés des surfaces K3	1
1.1. Structure de Hodge	1
1.2. Périodes	3
2. Construction de l’application des périodes	4
2.1. Déformations	4
2.2. Construction locale de l’application des périodes	4
2.3. Application globale des périodes	8
3. Quelques propriétés de l’espace de modules $\mathfrak{M}$ et du domaine des périodes $\mathcal{D}$	10
3.1. Une autre description du domaine des périodes $\mathcal{D}$	12
3.2. Quartiques dans $\mathbb{P}^3$	14
3.3. Surfaces de Kummer	14
4. Énoncé du théorème de Torelli global, versions forte et faible	17
5. Esquisse de la démonstration classique du théorème de Torelli global	18
5.1. Version forte	18
5.2. Version faible	23
6. Esquisse de l’approche de Verbitsky	27
Annexe A. Systèmes locaux	31
Annexe B. Domaine des périodes d’un réseau non dégénéré	32
Références	33

*Ces notes sont essentiellement issues de la lecture de [1, 2, 17, 19]. J’ai choisi de détailler certains points au détriment d’autres qui auraient certainement mérité la même attention. Toute erreur éventuelle est de uniquement de mon fait. Les commentaires sont les bienvenus.*

## 1. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SURFACES K3

### 1.1. Structure de Hodge.

Une *surface K3* est une surface analytique complexe compacte et connexe  $S$  dont l’irrégularité  $q := h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$  est nulle<sup>1</sup> et dont le faisceau canonique  $\omega_S := \wedge^2 \Omega_S$  est trivial. Cette définition appelle quelques commentaires :

- on ne se contentera pas des surfaces algébriques, les surfaces K3 non algébriques seront importantes dans la suite.

---

1. Ce qui implique, par la suite exacte exponentielle, que les fibrés inversibles sur  $S$  sont caractérisés par leur première classe de Chern

- on ne suppose pas que  $S$  est kählerienne pour le moment. Cette hypothèse sera cruciale plus tard et nous l'ajouterons au moment venu. A posteriori, nous verrons que les surfaces K3 sont toutes kähleriennes, ce qui lèvera finalement l'hypothèse superflue.
- on ne suppose pas que  $S$  est simplement connexe. Nous verrons que ce résultat n'est pas immédiat et résulte joliment de la théorie des périodes que nous allons étudier.

Résumons quelques-uns des résultats apportés par la théorie des surfaces complexes<sup>2</sup>, dont nous allons avoir besoin :

- (1) *Nombres de Hodge.*<sup>3</sup> Notons  $h^{i,j} := h^j(S, \Omega_S^i)$ . Les surfaces K3 ont toutes les mêmes nombres de Hodge, leur diamant de Hodge est :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & & 1 & & 20 & & 1 \\ & & & & 0 & & 0 \\ & & & & 1 \end{array}$$

- (2) *Polarisation.* La forme d'intersection  $H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  s'étend sur  $H^2(S, \mathbb{R})$  en une forme bilinéaire non dégénérée (c'est la dualité de Poincaré), sa signature est (3, 19). L'extension de cette forme bilinéaire à la cohomologie à coefficients complexes a comme propriété que dans la décomposition de Hodge  $H^2(S, \mathbb{C}) = H^{2,0}(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^{0,2}(S)$ , l'espace  $H^{1,1}(S)$  est orthogonal à  $H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S)$  puisque  $S$  est une surface complexe.
- (3) *Réseau.* L'espace de cohomologie à coefficients entiers  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est sans torsion. La forme d'intersection y définit donc une structure de réseau unimodulaire (c'est encore la dualité de Poincaré). Puisque  $S$  est une surface K3, ce réseau est pair, c'est-à-dire que pour tout  $x \in H^2(S, \mathbb{Z})$ ,  $x^2 := \langle x, x \rangle$  est un entier pair<sup>4</sup>. Le réseau  $H^2(S, \mathbb{Z})$  est donc unimodulaire, pair, de rang 22 et de signature (3, 19). D'après le théorème de Milnor, il existe à isométrie près un unique tel réseau. On trouve facilement un modèle pour cette classe d'isométrie :

$$\Lambda := U^{\oplus 3} \oplus E_8(-1)^{\oplus 2}$$

où  $U$  est le réseau hyperbolique de rang 2, dont la forme quadratique a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E_8(-1)$  est le réseau associé au graphe de Dynkin  $E_8$  mais avec la forme quadratique opposée (les auto-intersections valent  $-2$ ).

Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces K3. Si  $u: S \rightarrow S'$  est un isomorphisme (biholomorphe), son action sur la cohomologie est entièrement déterminée par  $u^*: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ . Ce morphisme a de plus la propriété d'être une isométrie pour la forme d'intersection et d'être compatible à la décomposition de Hodge. Nous dirons brièvement que  $u^*$  est une *isométrie de Hodge*. Le problème de Torelli pour les surfaces K3 consiste à comprendre en quelle mesure le morphisme  $u^*$  détermine le biholomorphisme  $u$ . On peut formuler la question de différentes manières, plus ou moins précises :

- (1) Si  $S$  et  $S'$  sont des surfaces K3 telles qu'il existe une isométrie de Hodge

$$\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}),$$

2. Je renvoie à [12, 22] ou [3] pour les démonstrations.

3. Les surfaces algébriques admettent une structure de Hodge sans hypothèse kählerienne, voir [2, 13].

4. C'est facile à vérifier lorsque  $x$  est la classe d'une courbe lisse  $C$  : la formule du genre  $K_S \cdot C + C^2 = 2g_C - 2$  se réduit ici à  $C^2 = 2g_C - 2$  pair. Le cas général résulte de la formule de Wu, pour laquelle je renvoie à [2, VIII.3.2] et aux références indiquées.

les surfaces  $S$  et  $S'$  sont-elles isomorphes (comme variétés complexes<sup>5</sup>) ?

(2) Dans la situation précédente, toute isométrie de Hodge  $\psi$  provient-elle d'un isomorphisme  $u$  tel que  $u^* = \psi$  ?

(3) Dans ce cas, l'isomorphisme  $u$  est-il unique ?

Nous verrons que la réponse aux questions 1 et 3 est affirmative, mais que la réponse à la question 2 est plus subtile.

## 1.2. Périodes.

Pour étudier les isométries de Hodge, remarquons que dans la décomposition

$$H^2(S, \mathbb{C}) = H^{2,0}(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^{0,2}(S)$$

on a  $H^{2,0}(S) = \mathbb{C}\omega_S$  et  $H^{0,2}(S) = \mathbb{C}\overline{\omega_S}$ , donc la structure de Hodge est entièrement déterminée par la droite  $\mathbb{C}\omega_S \subset H^2(S, \mathbb{C})$ , et donc une isométrie de Hodge est déterminée par sa valeur sur cette droite. Notre premier objectif va donc être de donner un sens à l'“application”  $S \rightsquigarrow \mathbb{C}\omega_S$ . Nous allons considérer ces droites dans  $H^2(S, \mathbb{C}) \cong \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ . Cependant, vu que l'isométrie entre  $H^2(S, \mathbb{Z})$  et  $\Lambda$  n'est pas unique, et étant donné que nous voulons faire varier  $S$ , il est nécessaire de fixer, pour chaque surface  $S$ , une isométrie  $\phi: H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda$  que nous appellerons un *marquage*. Nous introduisons donc l'ensemble des classes d'isomorphisme de paires de surfaces K3 marquées :

$$\mathfrak{M} := \{(S, \phi)\} / \sim$$

où deux paires  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  sont identifiées s'il existe un biholomorphisme  $u: S \rightarrow S'$  tel que  $\phi = \phi' \circ u^*$  :

$$\begin{array}{ccc} H^2(S', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{u^*} & H^2(S, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \phi & \swarrow \phi' \\ & \Lambda & \end{array}$$

Observons que, dans cet ensemble, la même surface  $S$  pourra apparaître plusieurs fois, avec des marquages inéquivalents que nous préciserons plus tard (voir Remarque 15).

Pour étudier l'association  $S \rightsquigarrow \mathbb{C}\omega_S$  nous considérons l'application suivante, appelée *application des périodes* (pour une raison que j'expliquerai un peu après)

$$\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), \quad (S, \phi) \mapsto [\phi(\mathbb{C}\omega_S)].$$

Faisons quelques remarques basiques sur l'ensemble d'arrivée de cette application. Puisque le fibré  $\Omega_S^2$  est trivial, sa section holomorphe globale  $\omega_S$ , bien définie à multiplication scalaire près, s'écrit dans chaque carte locale  $(z_1, z_2)$  sous la forme  $\omega_S = f(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2$ , avec  $f(z_1, z_2)$  holomorphe ne s'annulant pas<sup>6</sup>. Il en résulte immédiatement la première relation fondamentale<sup>7</sup> :

$$\omega_S^2 = \langle \omega_S, \omega_S \rangle = \int_S \omega_S \wedge \omega_S = 0.$$

De plus,  $\overline{\omega_S} = \overline{f(z_1, z_2)}d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2}$  donc, toujours dans une carte locale :

$$\omega_S \wedge \overline{\omega_S} = |f(z_1, z_2)|^2 dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2}.$$

En notant  $z_i = (x_i, y_i)$  les coordonnées réelles sous-jacentes, l'orientation canonique de  $\mathbb{C}^n$  est donnée par la forme volume réelle  $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$  (voir [15, p.18]) et on calcule facilement que

$$dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\overline{z_1} \wedge d\overline{z_2} = 2dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2.$$

5. Nous verrons que toutes les surfaces K3 sont difféomorphes (au sens réel).

6. Voir [27, III.6.4] pour les rappels utiles sur les formes canoniques.

7. Pour le calcul de  $\int_S$  sur  $S$  entier, on utilisera une partition de l'unité relative à des cartes locales de  $S$  pour ramener le calcul aux cartes locales.

On en déduit la seconde relation fondamentale :

$$\omega_S \cdot \overline{\omega_S} = \langle \omega_S, \overline{\omega_S} \rangle = \int_S \omega_S \wedge \overline{\omega_S} > 0.$$

L'application  $\mathcal{P}$  est donc à valeurs dans le sous-ensemble appelé *domaine des périodes*

$$\mathcal{D} := \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \mid \omega^2 = 0, \omega \cdot \overline{\omega} > 0\}.$$

Puisque la forme bilinéaire sur  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  a pour signature  $(3, 19)$ , si l'on fixe une base orthonormée (réelle)  $e_1, \dots, e_{22}$  de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  et que l'on note par  $(x_1, \dots, x_{22})$  les coordonnées induites dans  $\Lambda_{\mathbb{C}}$  dans cette base, le domaine  $\mathcal{D}$  est défini par les conditions :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - \dots - x_{22}^2 &= 0 \\ |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 - |x_4|^2 - \dots - |x_{22}|^2 &> 0 \end{aligned}$$

Le domaine  $\mathcal{D}$  est donc un ouvert pour la topologie usuelle dans une quadrique de  $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ . Nous verrons d'autres descriptions intéressantes de cet ensemble plus loin. Nous allons d'abord construire l'application  $\mathcal{P}$  localement afin d'étudier ses propriétés et de donner une structure analytique à  $\mathfrak{M}$ .

## 2. CONSTRUCTION DE L'APPLICATION DES PÉRIODES

### 2.1. Déformations.

Si  $S$  est une surface K3, puisque la 2-forme holomorphe  $\omega_S$  ne s'annule pas, elle induit un couplage non-dégénéré sur le fibré tangent :  $T_S \times T_S \rightarrow \mathcal{O}_S$ , qui induit un isomorphisme de faisceaux  $T_S \cong \Omega_S^1$ . Il résulte alors de la connaissance des nombres de Hodge de  $S$  que :

$$h^0(S, T_S) = 0, \quad h^2(S, T_S) = 0, \quad h^1(S, T_S) = 20 \text{ (indépendant de } S)$$

Résumons les résultats apportés alors par la théorie des déformations (voir par exemple [2] ou le cours donné par Christian Lehn dans cette école) concernant les déformations de surfaces K3 :

- La surface  $S$  admet une déformation universelle lisse  $f: \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  où  $\mathcal{X}$  est un espace analytique lisse,  $f$  est un morphisme propre et lisse<sup>8</sup> ;
- $(\text{Def}(S), 0)$  est un germe d'espace analytique lisse dont l'espace tangent à l'origine est  $H^1(S, T_S)$ , de dimension 20, que l'on peut supposer être une boule aussi petite que nécessaire, et que nous choisirons simplement connexe ;
- On a  $\mathcal{X}_0 \cong S$  (l'isomorphisme fait partie de la donnée) et pour tout  $t \in \text{Def}(S)$ ,  $\mathcal{X}_t$  est une surface K3 (voir la démonstration de [17, Proposition 5.2.1] ou après [17, Remark 6.2.6]) dont l'espace  $\text{Def}(S)$  est encore l'espace de déformation universelle.

### 2.2. Construction locale de l'application des périodes.

Partons maintenant d'une surface K3 marquée  $(S, \phi)$  et de son espace de déformation  $f: \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$ . Notons  $\underline{\mathbb{Z}}$  le faisceau constant sur  $\mathcal{X}$ . Le faisceau  $R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}}$ , dont la fibre en  $t \in \text{Def}(S)$  est  $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$ , est un faisceau localement constant. En effet, d'après le théorème des voisinages tubulaires ( $f$  est une submersion propre, voir la démonstration de [31, Proposition 9.3]), en tout point  $t \in \text{Def}(S)$  on peut trouver un voisinage  $U$ , que nous prendrons simplement connexe, tel que  $f^{-1}(U) \cong \mathcal{X}_t \times U$ . Alors :

$$\Gamma(U, R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}}) = H^2(f^{-1}(U), \underline{\mathbb{Z}}) \cong H^2(\mathcal{X}_t \times U, \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \text{ (par rétraction)}$$

donc  $R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}}|_U \cong \underline{H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})}|_U$ . Mais puisque  $\text{Def}(S)$  est choisi contractile<sup>9</sup> ce faisceau est en fait constant. Les morphismes naturels d'évaluation aux germes en 0 et  $t$  sont donc

8. Il nous sera surtout utile de noter que  $f$  est une submersion. La propriété sert à bien définir les images directes supérieures, et la platitude sert à contrôler les fibres voisines.

9. Voir Appendice A.

des isomorphismes, ce qui donne des isomorphismes naturels<sup>10</sup>  $\phi_t: H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ . Autrement dit, le marquage isométrique  $\phi: H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \Lambda$  s'étend canoniquement en un marquage isométrique  $\underline{\phi}: R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}} \cong \underline{\Lambda}$  de systèmes locaux sur  $\text{Def}(S)$ .

**Remarque 1.** On pourrait aussi supposer simplement que l'ouvert  $\text{Def}(S)$  a été pris suffisamment petit pour que le faisceau soit constant, mais cela manquerait de classe. Une autre variante<sup>11</sup> serait d'invoquer le théorème d'Ehresmann [31, Proposition 9.3] : puisque que  $\text{Def}(S)$  est simplement connexe, il existe un difféomorphisme  $T: \mathcal{X} \rightarrow S \times \text{Def}(S)$  au-dessus de  $\text{Def}(S)$ . Il en résulte immédiatement que le faisceau  $R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}}$  est constant.

Pour tout  $t \in \text{Def}(S)$  on a donc une identification naturelle  $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{can.}}{\cong} H^2(S, \mathbb{Z})$ . L'application des périodes est alors définie par :

$$\mathcal{P}: \text{Def}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}), \quad t \mapsto [\underline{\phi}_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))]$$

**Remarque 2.** Nous pouvons maintenant expliquer le terme de *périodes*. Fixons une base  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{22}$  de  $H_2(S, \mathbb{Z})$  et notons  $\gamma_1, \dots, \gamma_{22}$  la base duale de  $H^2(S, \mathbb{Z})$  pour la dualité de Poincaré : on a  $\int_{\Gamma_i} \gamma_j = \delta_{i,j}$ . Dans la base  $(\phi(\gamma_i))_i$  de  $\Lambda$  induite par le marquage  $\phi$ , considérée aussi comme base de  $\Lambda_{\mathbb{C}}$ , les coordonnées de  $\phi(\omega_S)$  sont bien sûr<sup>12</sup>  $\left(\int_{\Gamma_i} \omega_S\right)_i$  donc l'application  $\mathcal{P}$  s'écrit en coordonnées, en utilisant l'identification canonique  $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{can.}}{\cong} H^2(S, \mathbb{Z})$  :

$$\mathcal{P}(t) = \left( \int_{\Gamma_1} \omega_{\mathcal{X}_t} : \dots : \int_{\Gamma_{22}} \omega_{\mathcal{X}_t} \right).$$

Ces intégrales sont classiquement appelées les *périodes* de  $\omega_{\mathcal{X}_t}$ . Cette écriture a bien un sens car  $\omega_{\mathcal{X}_t}$  est uniquement déterminée à multiplication scalaire près. Nous utiliserons à nouveau cette écriture en coordonnées dans la démonstration de la Proposition 3 relative à la densité des périodes de surfaces K3 algébriques.

**Proposition 1.** *L'application  $\mathcal{P}$  est holomorphe.*

*Démonstration.* Il y a essentiellement deux manières de démontrer cette propriété. La première consiste à faire un calcul local en montrant que l'image de toute courbe holomorphe est encore holomorphe : c'est joli mais tout de même assez long, je renvoie à [14, §5]. Je vais préférer la seconde, plus conceptuelle, qui est plus dans l'esprit de la géométrie algébrique : il s'agit de se souvenir quel foncteur l'espace projectif représente. Considérons la suite exacte tautologique sur  $\mathbb{P}^n$  :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$  est le fibré en droites sur  $\mathbb{P}^n$  dont la fibre en un point  $x \in \mathbb{P}^n$  est la droite vectorielle  $\ell_x$  engendrée par  $x$  dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Si  $X$  est un schéma, la donnée d'un morphisme  $f: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  fournit un sous-fibré en droites  $E := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$  du fibré trivial  $\mathcal{O}_X^{\oplus n+1}$  dont la fibre  $E_x$  en  $x \in X$  est la droite  $\ell_{f(x)}$ . Inversement, la donnée d'un sous-fibré de rang 1

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus n+1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

10. Ils sont donnés par des pullbacks vu que ce sont des restrictions aux fibres, donc ce sont des isomorphismes d'anneaux compatibles à l'intégration de cycles. Ce sont donc bien finalement des isomorphismes isométriques. Par contre ils ne sont pas compatibles aux structures de Hodges : d'une part ils n'auraient aucune raison de l'être, mais nous verrons avec les surfaces de Kummer (voir la démonstration de la Proposition 6) que si  $S$  est une surface de Kummer et  $\phi_t: H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est une isométrie de Hodge, alors  $\mathcal{X}_t$  est aussi une surface de Kummer.

11. mais qui rendrait la construction un peu opaque.

12. Dans  $H^2(S, \mathbb{C})$  on écrit  $\omega_S = \sum_i x_i \gamma_i$  avec  $x_i = \int_{\Gamma_i} \gamma_i$ .

produit un morphisme<sup>13</sup>  $X \rightarrow \mathbb{P}^n$  défini par  $x \mapsto [E_x]$  vu que  $E_x$  est une droite de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On sait que l'espace  $\mathbb{P}^n$  représente les classes d'isomorphismes de telles suites exactes de sous-fibrés de rang 1 (voir [16, §II.7] pour le point de vue dual de fibrés engendrés par leurs sections globales, ou de systèmes linéaires). Dans le cas qui nous intéresse, pour montrer que  $\mathcal{P}$  est holomorphe, nous devons construire un sous-fibré de rang 1 du fibré trivial de rang  $\dim \Lambda_{\mathbb{C}} = 22$  sur  $\text{Def}(S)$  dont les fibres sont les droites  $H^{2,0}(\mathcal{X}_t)$ . Puisque le faisceau  $R^2 f_* \mathbb{C}$  est constant, le fibré trivial en question est simplement  $R^2 f_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{\text{Def}(S)}$ , et le fibré en droites cherché est juste<sup>14</sup>  $f_* \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2$ . Il reste donc à construire un plongement

$$f_* \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2 \hookrightarrow R^2 f_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{\text{Def}(S)}.$$

Pour expliquer cette construction, je commencer par la faire sur une fibre avant de la faire en famille. On part du complexe de De Rham holomorphe

$$\Omega_X^\bullet := (\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^2)$$

qui est quasi-isomorphe au faisceau constant  $\underline{\mathbb{C}}_X$  d'après le théorème de De Rham formel (noter qu'il s'agit d'un complexe  $\mathbb{C}$ -linéaire vu que la différentielle n'est pas  $\mathcal{O}_X$ -linéaire). En considérant le faisceau  $\Omega_X^2$  comme complexe en degré deux  $\Omega_X^2[-2]$  on a un morphisme de complexes naturel

$$\Omega_X^2[-2] \hookrightarrow \Omega_X^\bullet$$

que l'on visualise ainsi :

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_X^2[-2]: & & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \Omega_X^2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \Omega_X^\bullet: & & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & \Omega_X^2 \end{array}$$

en prenant la cohomologie en degré deux de ces complexes on obtient<sup>15</sup>

$$H^0(X, \Omega_X^2) = H^2(X, \Omega_X^2[-2]) \hookrightarrow H^2(X, \Omega_X^\bullet) \cong H^2(X, \mathbb{C}).$$

Il reste à faire cette construction en famille, je le laisse en exercice.

**Exercice 1.** Généraliser la construction précédente en famille.

**Solution 1.** Partons du complexe de De Rham relatif<sup>16</sup>

$$\Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^\bullet := (\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^1 \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2)$$

qui est un complexe  $f^{-1}\mathcal{O}_{\text{Def}(S)}$ -linéaire (et non  $f^*\mathcal{O}_{\text{Def}(S)}$ -linéaire) quasi-isomorphe au faisceau  $f^{-1}\mathcal{O}_{\text{Def}(S)}$ . On obtient similairement l'inclusion de complexes

$$\Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2[-2] \hookrightarrow \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^\bullet$$

à laquelle on applique le foncteur<sup>17</sup>  $R^2 f_*$ , ce qui donne le plongement attendu<sup>18</sup> :

$$f_* \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2 \cong R^2 f_*(\Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2[-2]) \hookrightarrow R^2 f_* \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^\bullet \cong R^2 f_*(f^{-1}\mathcal{O}_{\text{Def}(S)}) \cong R^2 f_* \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{\text{Def}(S)}.$$

(Voir Huybrechts [17] et les références indiquées pour plus de détails).

□

La proposition suivante est le résultat le plus profond et difficile :

13. On vérifie sur les cartes locales que c'est bien un morphisme.

14. par pullback sur un point  $t \in \text{Def}(S)$ , la fibre de  $f_* \Omega_{\mathcal{X}/\text{Def}(S)}^2$  est l'ensemble des sections globales  $H^0(\Omega_{\mathcal{X}_t}^2)$  car on fait l'image directe sur un point

15. Il faudrait s'assurer qu'il s'agit bien de l'inclusion donnée par la décomposition de Hodge.

16. notre famille est propre et lisse par hypothèse

17. se souvenir que  $R^2 f_* \mathcal{I}^\bullet = H^2(f_* \mathcal{I}^\bullet)$  où  $H^2$  signifie ici simplement le deuxième espace de cohomologie du complexe (noyau sur image).

18. L'isomorphisme de droite est la formule de projection, mais ce n'est peut-être pas limpide.

**Proposition 2.** *La différentielle de  $\mathcal{P}$  à l'origine est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On peut ici faire un calcul local, que je vais expliquer brièvement<sup>19</sup>. Partons de l'application des périodes

$$\mathcal{P}: \text{Def}(S) \longrightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$$

dont la différentielle à l'origine est

$$d_0\mathcal{P}: T_0\text{Def}(S) \longrightarrow T_{\mathcal{P}(0)}\mathcal{D}.$$

Commençons par décrire utilement  $T_{\mathcal{P}(0)}\mathcal{D}$ . Notons  $x = \mathcal{P}(0) \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$  et  $\ell_x$  la droite de  $\Lambda_{\mathbb{C}}$  qui lui correspond. On sait que

$$T_x\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \cong \text{Hom}(\ell_x, \Lambda_{\mathbb{C}}/\ell_x).$$

Cet isomorphisme se voit concrètement comme suit. Un vecteur tangent en  $x$  à  $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$  s'obtient comme la dérivée à l'origine d'un petit chemin  $\eta: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$  tel que  $\eta(0) = x$ , c'est-à-dire  $\frac{d\eta}{dt}(0) \in T_x\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ . Nous lui associons un morphisme  $\ell_x \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}/\ell_x$  ainsi. Prenons un point  $v \in \ell_x$  et choisissons un relèvement  $\tilde{\eta}: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}$  de  $\eta$  tel que  $\tilde{\eta}(0) = v$ . On lui fait correspondre le morphisme

$$\ell_x \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}/\ell_x, \quad v \mapsto \frac{d\tilde{\eta}}{dt}(0)$$

Il faut vérifier scolairement plusieurs points, je les laisse en exercice.

**Exercice 2.** *Vérifier que cela ne dépend pas du relèvement choisi.*

**Solution 2.** *Un petit exemple pour comprendre. Prenons  $\mathbb{P}^1$ ,  $x = [1, 0]$  et  $\eta(t) = [1 : t]$ . Au point  $v = (1, 0)$  prenons les relèvements  $\tilde{\eta}(t) = (1, t)$  et  $\tilde{\eta}'(t) = (1 + t, t + t^2)$ . On a  $\frac{d\tilde{\eta}}{dt}(t) = (0, 1)$  et  $\frac{d\tilde{\eta}'}{dt}(t) = (1, 1 + 2t)$ , la différence en  $t = 0$  est  $(-1, 0)$  qui est bien sur la droite  $\ell_x$ .*

*Traitons l'exercice. Si  $\tilde{\eta}'$  est un autre relèvement, les points  $\tilde{\eta}(t)$  et  $\tilde{\eta}'(t)$  sont tous deux sur la droite  $\ell_{\eta(t)}$  puisque ces chemins relèvent  $\eta$ . Il existe donc  $\alpha(t) \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{\eta}'(t) = \alpha(t)\tilde{\eta}(t)$  pour tout  $t$ . Alors*

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\eta}' - \tilde{\eta})(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t)\tilde{\eta}(t) + (\alpha(t) - 1)\frac{d\tilde{\eta}}{dt}(t).$$

On a  $\alpha(0) = 1$  puisque  $\tilde{\eta}(0) = v = \tilde{\eta}'(0)$ , donc

$$\frac{d\tilde{\eta}'}{dt}(0) - \frac{d\tilde{\eta}}{dt}(0) \in \ell_x.$$

**Exercice 3.** *Vérifier que cela ne dépend que de la classe d'équivalence du chemin  $\eta$ .*

**Solution 3.** *Pour rappel, l'espace tangent en un point  $x$  d'une variété est ici défini comme l'ensemble des classes d'équivalences de courbes différentiables  $\eta: ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  telles que  $\eta(0) = x$ , où deux courbes  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont considérées comme équivalentes s'il existe une carte locale  $(U, \phi)$  au voisinage de  $x$  telle que<sup>20</sup>  $(\phi\eta_1)'(0) = (\phi\eta_2)'(0)$ . Dans le cas de l'espace projectif cette vérification est donc triviale vu que le relèvement fait en gros office de carte (en fixant une coordonnée pour déshomogénéiser).*

**Exercice 4.** *Montrer que le morphisme ainsi construit est linéaire.*

**Solution 4.** *Si  $w$  est un autre point sur la droite  $\ell_x$ , on a  $w = \alpha v$  et  $\alpha\tilde{\eta}(t)$  est un relèvement de  $\eta$  passant par  $w$ , donc l'application est bien linéaire.*

**Exercice 5.** *Montrer que le morphisme ainsi construit est un isomorphisme.*

<sup>19</sup>. les détails des calculs prennent trop de temps

<sup>20</sup>. c'est alors vrai pour toute carte.

**Solution 5.** Partant d'un morphisme  $\ell_x \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}/\ell_x$ , une fois fixé un vecteur non nul  $v \in \ell_x$ , il lui correspond un vecteur  $\xi \in \Lambda_{\mathbb{C}}$  bien défini modulo  $\ell_x$ . Alors la courbe  $\tilde{\eta}(t) = v + \xi t$  descend en une courbe  $\eta$  de  $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$  telle que  $\eta(0) = x$  qui donne la construction inverse. On peut aussi noter par ailleurs que les deux espaces en cause sont bien de même dimension.

Rappelons que  $\Lambda_{\mathbb{C}}$  est muni d'une forme quadratique non dégénérée. En notant  $\ell_x^{\perp}$  l'orthogonal de  $\ell_x$  pour cette forme, on voit facilement que

$$T_x \mathcal{D} \cong \text{Hom}(\ell_x, \ell_x^{\perp}/\ell_x).$$

En effet,  $\mathcal{D}$  est un ouvert dans la quadrique  $\omega^2 = 0$  donc une petite courbe locale  $\tilde{\eta}(t)$  sera tangente au point  $v$  (avec les mêmes notations qu'au-dessus) si et seulement si

$$\tilde{\eta}(0) \cdot \frac{d\tilde{\eta}}{dt}(0) = v \cdot \frac{d\tilde{\eta}}{dt}(0) = 0,$$

ce qui signifie que  $\frac{d\tilde{\eta}}{dt}(0) \in \ell_x^{\perp}$ . Puisque  $\ell_x = H^{2,0}(S)$ , on a un isomorphisme naturel

$$\text{Hom}(\ell_x, \ell_x^{\perp}/\ell_x) = \text{Hom}(H^{2,0}(S), H^{2,0}(S)^{\perp}/H^{2,0}(S)) \cong \text{Hom}(H^{2,0}(S), H^{1,1}(S)).$$

Si l'on fixe un générateur  $H^{2,0}(S) = \mathbb{C}\omega_S$ , la donnée d'un tel morphisme revient donc à la donnée d'un élément de  $H^{1,1}(S)$ . Ainsi, nous avons une identification (qui dépend du choix de  $\omega_S$ ) :

$$T_x \mathcal{D} \cong H^1(S, \Omega_S^1).$$

Par ailleurs, l'application de Kodaira-Spencer  $\rho: T_0 \text{Def}(S) \rightarrow H^1(S, T_S)$  est un isomorphisme puisque  $\text{Def}(S)$  est l'espace de déformation universelle. Nous avons donc un triangle :

$$\begin{array}{ccc} T_0 \text{Def}(S) & \xrightarrow{d_0 \mathcal{P}} & H^1(S, \Omega_S^1) \\ & \searrow \sim \rho & \nearrow \\ & & H^1(S, T_S) \end{array}$$

Un calcul local en coordonnées (je renvoie à [14, §5] pour ce calcul pas difficile mais un peu long) montre que le morphisme en pointillé est induit par la contraction par  $\omega_S$ . puisque  $\omega_S$  est non-dégénérée, cette contraction est un isomorphisme. Par conséquent,  $d_0 \mathcal{P}$  est un isomorphisme.  $\square$

### 2.3. Application globale des périodes.

Il résulte de ce théorème que, quitte à prendre  $\text{Def}(S)$  encore plus petit, l'application des périodes (locale) est un *plongement*

$$\mathcal{P}: \text{Def}(S) \hookrightarrow \mathcal{D}.$$

La famille de déformations  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  produit une famille  $\{(\mathcal{X}_t, \phi_t)\}$  de surfaces K3 marquées (les marquages  $\phi_t$  sont canoniquement déduits du marquage  $\phi$  de  $S$ , ainsi qu'on l'a expliqué plus haut). Observons que deux surfaces marquées dans cette famille ne sont jamais isomorphes<sup>21</sup>. En effet, si  $\{(\mathcal{X}_s, \phi_s)\}$  et  $\{(\mathcal{X}_t, \phi_t)\}$  sont deux telles surfaces marquées, un isomorphisme entre elles serait un isomorphisme  $f: \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{X}_t$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \phi_t & \swarrow \phi_s \\ & & \Lambda \end{array}$$

<sup>21</sup>. comme surfaces marquées

Mais alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= [\phi_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t))] \\ &= [\phi_s(f^*(H^{2,0}(\mathcal{X}_t)))] \\ &= [\phi_s(H^{2,0}(\mathcal{X}_s))] \text{ puisque } f \text{ est une isométrie de Hodge} \\ &= \mathcal{P}(s) \end{aligned}$$

ce qui contredirait l'injectivité de  $\mathcal{P}$ . Par conséquent, avec un choix convenable de l'ouvert  $\text{Def}(S)$  on obtient pour chaque surface K3 marquée  $(S, \phi)$  un plongement de  $\text{Def}(S)$  dans l'ensemble  $\mathfrak{M}$  des classes d'isomorphismes de surfaces K3 marquées :

$$\text{Def}(S) \hookrightarrow \mathfrak{M}, \quad t \mapsto (\mathcal{X}_t, \phi_t).$$

Considérons alors la somme disjointe de tous ces ouverts  $\text{Def}(S)$ , la somme étant indexée par<sup>22</sup> les classes d'isomorphismes de surfaces K3 marquées  $(S, \phi)$  :

$$\coprod_{\{(S, \phi)\}} \text{Def}(S)$$

On introduit une relation d'équivalence sur cet ensemble. Pour deux paires différentes<sup>23</sup>  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  je note  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  et  $\mathcal{X}' \rightarrow \text{Def}(S')$  les familles de déformations. Alors un point  $s \in \text{Def}(S)$  est identifié avec un point  $t \in \text{Def}(S')$  si les surfaces marquées  $(\mathcal{X}_s, \phi_s)$  et  $(\mathcal{X}'_t, \phi'_t)$  sont isomorphes. Le quotient de la somme disjointe par cette relation d'équivalence se plonge donc dans  $\mathfrak{M}$ , et l'application est clairement surjective. On obtient donc une bijection

$$\mathfrak{M} \cong \coprod_{\{(S, \phi)\}} \text{Def}(S) / \sim$$

qui donne à  $\mathfrak{M}$  une structure d'espace analytique.

**Remarque 3.** Cet espace n'est pas séparé. En effet, on peut construire des familles  $f: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ ,  $f': \mathcal{X}' \rightarrow \Delta$ , où  $\Delta$  est le disque unité, ces familles étant non isomorphes bien qu'isomorphes sur  $\Delta \setminus \{0\}$ . En choisissant un marquage de  $\mathcal{X}$ , ainsi qu'un marquage de  $\mathcal{X}'$  isomorphe à celui de  $\mathcal{X}$  sur  $\Delta \setminus \{0\}$  on construit des applications  $p: \Delta \rightarrow \mathfrak{M}$  et  $p': \Delta \rightarrow \mathfrak{M}$  qui sont égales sur  $\Delta \setminus \{0\}$ . Si  $\mathfrak{M}$  était séparé, ces applications seraient égales sur  $\Delta$  par continuité, donc les familles  $f$  et  $f'$  seraient isomorphes sur  $\Delta$ , ce n'est pas le cas. Donc  $\mathfrak{M}$  n'est pas séparé en ces points. Citons en particulier le contre-exemple d'Atiyah [2, Remark VIII.12.2]. Voir Section 6 pour plus de détails sur les points non séparés dans une fibre de l'application des périodes.

Nous pouvons alors définir l'application des périodes  $\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$  globalement en recollant les applications des périodes locales, l'application  $\mathcal{P}$  est ainsi holomorphe. En corollaire de tout le travail ci-dessus nous obtenons le théorème suivant qui constitue le *Théorème de Torelli local*, attribué souvent à Andreotti et Weil.

**Théorème 1.** *L'application (globale) des périodes  $\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$  est un isomorphisme local.*

**Remarque 4.** On peut aussi voir ce théorème (en particulier en ce qui concerne la démonstration du fait que  $\mathcal{P}$  est un isomorphisme local) comme un cas très particulier du théorème de transversalité de Griffiths relatif aux variations de structure de Hodge (voir [31, Chapitre 10]).

<sup>22.</sup> C'est certainement un peu trop gros pour être honnête! On obtient des espaces de modules plus raisonnables en fixant par exemple une polarisation, voir [17, Chapitre 5].

<sup>23.</sup> ce qui signifie que les paires ne sont pas isomorphes; le cas  $S = S'$  avec deux marquages non équivalents est possible.

*Démonstration.* Puisque  $\text{Def}(S)$  est aussi l'espace de déformation des fibres voisines de l'origine, il suffisait bien de calculer la différentielle à l'origine.  $\square$

**Remarque 5.** Le théorème de Torelli global répondra à la question du défaut d'injectivité de  $\mathcal{P}$ , voir Remarque 15.

**Remarque 6.** Maintenant que nous sommes en possession d'un espace de modules  $\mathfrak{M}$  de surfaces K3 marquées, nous voudrions avoir une famille universelle au-dessus. Pour ceci, si nous notons  $\mathcal{X}_S \rightarrow \text{Def}(S)$  la famille de déformation pour chaque surface K3 marquée, nous voudrions recoller les espaces  $\mathcal{X}_S$ . Avec les notations précédentes, partant de deux familles  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  et  $\mathcal{X}' \rightarrow \text{Def}(S')$  et deux points  $s \in \text{Def}(S)$ ,  $t \in \text{Def}(S')$  tels que  $(\mathcal{X}_s, \phi_s)$  et  $(\mathcal{X}'_t, \phi_t)$  sont des surfaces K3 marquées isomorphes, dans l'espace  $\mathfrak{M}$  on a  $s = t$ . Nous devons donc donner un isomorphisme entre  $\mathcal{X}_s$  et  $\mathcal{X}'_t$  de manière à recoller les familles  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{X}'$ , et bien sûr cet isomorphisme doit être canonique (uniquement déterminé) pour que le recollement soit bien défini partout. Nous avons la situation suivante : nous cherchons un isomorphisme  $f: \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{X}'_t$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{X}'_t, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f^*} & H^2(\mathcal{X}_s, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \phi_t & \swarrow \phi_s \\ & \Lambda & \end{array}$$

donc  $f$  est telle que  $f^* = \phi_s^{-1} \circ \phi_t$ . Le théorème de Torelli global, dans sa version forte, montrera<sup>24</sup> qu'alors  $f$  est uniquement déterminée (nous savons déjà qu'un tel isomorphisme doit exister ici), donc le recollement est possible. La propriété en jeu ici est la suivante : supposons que par exemple  $\mathcal{X}_s$  admette un automorphisme  $g$  agissant trivialement sur la cohomologie :  $g^* = \text{id}$ . Alors  $f \circ g$  serait un autre choix d'isomorphisme entre  $\mathcal{X}_s$  et  $\mathcal{X}'_t$  induisant la même application en cohomologie, donc le recollement des familles de déformation ne serait pas canonique. Réciproquement, si  $f'$  est un autre choix d'isomorphisme, alors  $f'^{-1} \circ f$  est un automorphisme de  $\mathcal{X}_s$  dont l'action en cohomologie est l'identité. Ainsi, la question de l'existence d'une famille universelle est équivalente à la question suivante :

*L'application naturelle  $\text{Aut}(S) \rightarrow O(H^2(S, \mathbb{Z}))$ ,  $f \mapsto (f^{-1})^*$   
est-elle injective pour toute surface K3 ?*

Nous verrons que la réponse est affirmative, et donc nous aurons bien une famille universelle  $\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$  au-dessus de l'espace de modules de surfaces K3 marquées. Les marquages isométriques locaux  $R^2 f_{S*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \underline{\Delta}_{\text{Def}(S)}$  des familles universelles  $f_S: \mathcal{X}_S \rightarrow \text{Def}(S)$  se recollent alors en un marquage isométrique  $R^2 f_* \mathbb{Z} \cong \underline{\Delta}_{\mathfrak{M}}$  de la famille universelle  $f: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M}$ . Je précise que cette famille universelle ne représente pas un foncteur : la présence d'automorphismes non triviaux sur les surfaces K3 a pour conséquence que l'espace de module n'est pas fin.

### 3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ESPACE DE MODULES $\mathfrak{M}$ ET DU DOMAINE DES PÉRIODES $\mathcal{D}$

D'abord une remarque générale : puisque  $\dim \text{Def}(S) = 20$  pour toute surface K3, l'espace  $\mathfrak{M}$  est lisse de dimension 20. Cependant, chaque surface K3 y apparaît plusieurs fois avec des marquages différents. Cette deuxième donnée est discrète, elle a donc pour conséquence que  $\mathfrak{M}$  pourrait éventuellement avoir plusieurs composantes connexes :

*L'espace  $\mathfrak{M}$  est-il connexe ?*

---

<sup>24</sup>. En fait ici nous avons uniquement besoin de l'unicité, dont la démonstration est complètement indépendante du reste de la démonstration du théorème de Torelli ainsi on le verra.

Nous verrons, avec le théorème de Torelli global, qu'il a deux composantes connexes (voir Remarque 15).

Notons  $\Gamma := \text{Aut}(\Lambda)$  le groupe des isométries du réseau  $\Lambda$ . Il agit sur  $\mathfrak{M}$  ainsi : pour  $\gamma \in \Gamma$  et  $(S, \phi) \in \mathfrak{M}$ ,  $\gamma \cdot (S, \phi) = (S, \gamma \circ \phi)$ . Le quotient  $\mathfrak{M}/\Gamma$  est donc un espace de modules pour les classes d'isomorphismes de surfaces K3 (non marquées), et puisque l'application de périodes  $\mathcal{P}$  est équivariante, on obtient une application au quotient<sup>25</sup>

$$\overline{\mathcal{P}}: \mathfrak{M}/\Gamma \longrightarrow \mathcal{D}/\Gamma$$

dont on montrera, avec le théorème de Torelli global, qu'elle est injective (voir Remarque 15).

**Proposition 3.** *Les surfaces K3 algébriques sont denses dans l'espace  $\mathfrak{M}$ .*

*Démonstration.* Il suffit bien sûr de travailler localement sur une famille de déformations  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  où  $(S, \phi)$  est une surface K3 marquée. Nous allons montrer que la surface  $S$  peut être approchée par des surfaces K3 algébriques en donnant une suite  $(t_i)$  de points de  $\text{Def}(S)$  tendant vers 0 et telle que les surfaces  $\mathcal{X}_{t_i}$  sont algébriques (on a  $\mathcal{X}_0 \cong S$ ). D'après la Remarque 2, l'application locale des périodes s'écrit, dans une base  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{22}$  de la cohomologie entière  $H^2(S, \mathbb{Z})$  :

$$\mathcal{P}(t) = \left( \int_{\Gamma_1} \omega_{\mathcal{X}_t} : \dots : \int_{\Gamma_{22}} \omega_{\mathcal{X}_t} \right).$$

Il s'agit d'un point à coordonnées (homogènes) complexes, donc on peut l'approcher aussi près qu'on veut par des points de  $\mathcal{D}$  à coordonnées rationnelles (rappelons que  $\mathcal{P}$  est ouverte). Puisque  $\mathcal{P}$  est un isomorphisme (par les hypothèses faites sur  $\text{Def}(S)$ ), cela signifie qu'il existe une suite  $(t_i)$  dans  $\text{Def}(S)$ , tendant vers 0, telle que  $\mathcal{P}(t_i) \in \mathcal{D}$ . Il reste à démontrer que les surfaces K3 correspondantes  $\mathcal{X}_{t_i}$  sont algébriques (si les périodes sont rationnelles, la surface K3 est algébrique). Pour cet argument on peut supposer que  $t_i = 0$  et que c'est  $S$  dont les périodes sont rationnelles. Vu que  $\omega_S$  n'est définie qu'à multiplication près par un nombre complexe, et vu que les coordonnées sont homogènes, la question est plus précisément la suivante : supposons qu'il existe un élément non nul  $\omega \in H^{2,0}(S)$  tel que  $(\int_{\Gamma_1} \omega, \dots, \int_{\Gamma_{22}} \omega) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{22}$ , cela entraîne-t-il que  $S$  est algébrique ? Écrivons  $\omega = \alpha + i\beta$  avec  $\alpha, \beta \in H^2(S, \mathbb{R})$ . Les relations  $\omega^2 = 0$ ,  $\omega \cdot \bar{\omega} > 0$  fournissent  $\alpha^2 = \beta^2$ ,  $\alpha\beta = 0$  et  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , dont il résulte immédiatement<sup>26</sup> que  $\alpha$  et  $\beta$  sont linéairement indépendantes dans  $H^2(S, \mathbb{R})$ . Notons  $P$  le plan qu'elles engendrent dans  $H^2(S, \mathbb{R})$ . En fait ce plan est déjà défini sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . En effet, le couplage de Poincaré

$$H_2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

est parfait donc les conditions  $\int_{\Gamma_i} \alpha \in \mathbb{Q}$  pour tout  $i$  impliquent que  $\alpha \in H^2(S, \mathbb{Q})$ , et de même  $\beta \in \mathbb{Q}$ . Quitte à multiplier  $\omega$  par un entier, on peut donc supposer que  $\alpha, \beta \in H^2(S, \mathbb{Z})$ . Les relations donnent  $\alpha^2 > 0$  et  $\beta^2 > 0$  donc  $P$  est un 2-plan positif : la forme quadratique, de signature  $(3, 19)$  sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$ , a signature  $(2, 0)$  sur  $P$ . Alors l'orthogonal  $Q := P^\perp \cap H^2(S, \mathbb{Z})$  a signature  $(1, 19)$  et  $Q_{\mathbb{C}}$  est contenu dans  $H^{1,1}(S)$  car les éléments de  $Q$  sont orthogonaux à  $\alpha$  et  $\beta$ , donc à  $\omega$  et  $\bar{\omega}$ . Ainsi, il existe un élément  $x \in Q$  tel que  $x^2 > 0$ ,  $x \in H^2(S, \mathbb{Z})$  est une classe entière, et  $x \in H^{1,1}(S)$  donc par le théorème de Lefschetz  $x$  est une classe algébrique. Pour résumer, nous avons trouvé dans la cohomologie de  $S$  une classe entière de type  $(1, 1)$  et de carré strictement positif<sup>27</sup>, ce

25. voir [17, Theorem 6.1.13] pour une étude du quotient  $\mathcal{D}/\Gamma$ .

26. Si  $\beta = k\alpha$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , on a facilement une contradiction.

27. Autrement dit, d'après le théorème de Lefschetz sur les classes hyperplanes (voir [22, Théorème 2.3]), nous avons trouvé un fibré en droites  $L$  sur  $S$  tel que  $c_1(L)^2 > 0$ .

qui montre que  $S$  est algébrique (c'est le théorème de Kodaira, voir [12, Théorème 2] ou [2, Theorem IV.5.2]<sup>28</sup>).  $\square$

**Remarque 7.** Même si les périodes de surfaces K3 algébriques sont denses, il est aussi vrai qu'une surface K3 *générique* est non algébrique. Une surface K3 algébrique est munie d'une polarisation donnée par une classe ample, ce qui permet de voir que sa période vit dans une réunion dénombrables d'hypersurfaces de  $\mathcal{D}$  (voir [4, §3] ou Section 6), qui est bien dense, mais son complémentaire aussi (bien que non ouvert) d'après le lemme de Baire (voir Section 6 pour plus de détails).

### 3.1. Une autre description du domaine des périodes $\mathcal{D}$ .

Nous pouvons reformuler la Proposition 3 en termes du domaine des périodes  $\mathcal{D}$  : ce que nous venons de montrer, c'est que les périodes des surfaces K3 algébriques forment un sous-ensemble dense dans  $\mathcal{D}$ . Nous allons plus généralement tâcher de caractériser certaines familles de surfaces K3 par leurs périodes. Pour ceci, nous allons utiliser une description assez particulière du domaine  $\mathcal{D}$ .

Soit  $x \in \mathcal{D}$ . Notons ses parties réelles et imaginaires  $x = u + iv$ . Les relations  $x^2 = 0$  et  $x \cdot \bar{x} > 0$  fournissent :

$$u^2 - v^2 = 0, \quad u \cdot v = 0, \quad u^2 + v^2 > 0.$$

Il en résulte facilement que  $u$  et  $v$  sont non nuls, non colinéaires, et que  $u^2 > 0$  et  $v^2 > 0$  (et d'ailleurs  $u^2 = v^2$ , donc quitte à remplacer  $x$  par un multiple, vu qu'on travaille dans l'espace projectif : on peut supposer que  $u^2 = v^2 = 1$ , c'est utile à noter pour la suite). Ils engendrent donc un 2-plan  $P = \langle u, v \rangle$  de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  sur lequel la forme quadratique est définie positive<sup>29</sup>. Ce plan est d'ailleurs muni d'une orientation naturelle par le choix de l'ordre  $(u, v)$  de la base. Réciproquement, à tout 2-plan orienté  $P$  de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  sur lequel la forme quadratique est définie positive on peut associer un point de  $\mathcal{D}$  de la manière suivante : prenons une base orientée  $(u, v)$  de  $P$ , orthonormée pour la forme quadratique : on a donc  $u^2 = 1$ ,  $v^2 = 1$  et  $u \cdot v = 0$ . Le point  $x := u + iv$  vit alors dans  $\mathcal{D}$ . Il faut vérifier que ceci ne dépend pas du choix, je le laisse en exercice.

**Exercice 6.** *Montrer que le point  $x := u + iv \in \mathcal{D}$  ne dépend pas du choix d'une base orthonormée orientée de  $P$ .*

**Solution 6.** *Si  $(u', v')$  est un autre choix, il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tels que  $u' = \alpha u + \beta v$  et  $v' = \gamma u + \delta v$  et la matrice  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  est dans  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ . On a donc  $\alpha = \delta = \cos(\theta)$  et  $\gamma = -\beta = \sin(\theta)$  pour un certain  $\theta \in \mathbb{R}$ . Alors*

$$x' := u' + iv' = (\alpha u + \beta v) + i(-\beta u + \alpha v) = (\alpha - i\beta)(u + iv) = (\alpha - i\beta)x$$

*donc  $x$  et  $x'$  définissent le même point de  $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ .*

En conclusion, en notant  $G = \text{Grass}(2, \Lambda_{\mathbb{R}})$  la grassmannienne des 2-plans dans  $\Lambda$  et  $G^{\text{po}} \subset G$  le sous-espace des 2-plans **positifs orientés** on a une bijection :

$$\mathcal{D} \cong G^{\text{po}}$$

et il est facile de se convaincre que cette bijection est un difféomorphisme<sup>30</sup>. Puisque  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  est de signature  $(3, 19)$ ,  $G^{\text{po}}$  est connexe (on voit avec les mains comment faire un chemin

28. On notera qu'il n'y a pas besoin d'hypothèse kählerienne dans cet argument.

29. On voit ici l'importance du fait que la signature est  $(3, 19)$ , plus généralement il faut que le nombre de signes positifs soit au moins 2, sinon ceci ne fonctionnerait pas tout simplement car  $\mathcal{D}$  serait vide, voir Appendice B.

30. L'application  $\mathcal{D} \rightarrow G^{\text{po}}$ ,  $x \mapsto (\Re(x), \Im(x))$  est clairement de classe  $C^\infty$  et bijective. Pour voir que la réciproque est aussi différentiable, partons d'un 2-plan (positif orienté)  $P$  et choisissons un complémentaire  $\Lambda_{\mathbb{R}} = P \oplus Q$ . Si l'on bouge un peu  $P$  cela reste en somme directe, autrement dit la carte locale de  $G$  au voisinage de  $P$  est  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P, Q)$ , à  $f: P \rightarrow Q$  on associe  $P' = \text{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \in P \oplus Q\}$ . Une fois choisie une base  $u, v$  de  $P$ , l'application  $G^{\text{po}} \rightarrow \mathcal{D}$  s'écrit dans la carte locale  $f \mapsto f(u) + if(v)$  vu

continu entre deux 2-plans positifs orientés si on est en dimension trois (voir [7, Lemme 2] pour un argument plus précis)<sup>31</sup>. Je résume pour un usage ultérieur ce que nous avons démontré :

**Proposition 4.** *Le domaine des périodes  $\mathcal{D}$  est connexe, difféomorphe à la grassmannienne  $G^{p_0}$  des 2-plans positifs orientés de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$ .*

Géométriquement, si l'on part d'une surface K3 marquée  $(S, \phi)$  dont la période est  $[\phi(H^{2,0}(S))] = [\phi(C\omega_S)] \in \mathcal{D}$ , le 2-plan réel positif orienté qui lui correspond dans  $G^{p_0}$  est<sup>32</sup>  $\phi(P_S)$  avec

$$P_S = H^2(S, \mathbb{R}) \cap (H^{2,0}(S) \oplus H^{0,2}(S))$$

et en notant  $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(S) := H^2(S, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(S)$  on a une décomposition en somme directe orthogonale

$$H^2(S, \mathbb{R}) = P_S \oplus H_{\mathbb{R}}^{1,1}(S).$$

Rappelons que la suite exacte exponentielle fournit pour les surfaces K3 une injection

$$H^1(X, \mathcal{O}_S^*) \hookrightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$$

dont l'image est appelée le *groupe de Néron-Severi*  $\text{NS}(S)$  de la surface  $S$ . D'après le théorème de Lefschetz sur les classes hyperplanes, on a  $\text{NS}(S)_{\mathbb{C}} \subset H^{1,1}(S)$ . Le rang  $\rho(S)$  du groupe  $\text{NS}(S)$  est appelé le *nombre de Picard* de  $S$ , et on a donc  $\rho(S) \leq h^{1,1}(S) = 20$ . Si  $\rho(S) = 20$ , la surface  $S$  est dite *exceptionnelle* (certains auteurs disent *singulière*). Notons que  $\text{NS}(S) = H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ . La décomposition  $H^2(S, \mathbb{R}) = P_S \oplus H_{\mathbb{R}}^{1,1}(S)$ , restreinte aux classes entières, fournit un sous-réseau

$$(P_S \cap H^2(S, \mathbb{Z})) \oplus \text{NS}(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$$

qui n'est en général pas de rang maximal. Notons  $P_{S, \mathbb{Z}} := P_S \cap H^2(S, \mathbb{Z})$  : la trace entière du 2-plan  $P_S$  n'est de rang deux que si  $P_S$  est défini sur  $\mathbb{Q}$  (ce qui signifie que l'on peut en trouver une base rationnelle). On peut donc caractériser les surfaces K3 exceptionnelles ainsi :

**Lemme 1.** *Soit  $S$  une surface K3. La surface  $S$  est exceptionnelle si et seulement si  $P_{S, \mathbb{Z}}$  est de rang 2.*

*Démonstration.* Notons  $T_S := \text{NS}(S)^{\perp} \cap H^2(S, \mathbb{Z})$  le *réseau transcendant* de  $S$ . L'inclusion  $T_S \oplus \text{NS}(S) \subset H^2(S, \mathbb{Z})$  est un sous-réseau de rang maximal. Rappelons que la forme d'intersection sur  $H^2(S, \mathbb{Z})$  a pour signature  $(3, 19)$ . Si  $S$  est exceptionnelle alors  $\text{NS}(S)$  est de rang 20. Alors  $S$  est nécessairement algébrique et la signature de la forme quadratique restreinte à  $\text{NS}(S)$  a pour signature  $(1, 19)$  (si  $S$  n'était pas algébrique, la signature serait  $(0, \rho(S)) = (0, 20)$ , impossible dans ce cas) donc sur  $T_S$  la signature est  $(2, 0)$ . Ainsi  $T_S$  est un 2-plan défini positif. Puisque  $T_{S, \mathbb{R}} \oplus \text{NS}(S)_{\mathbb{R}} = H^2(S, \mathbb{R}) = P_S \oplus \text{NS}(S)_{\mathbb{R}}$ , il en résulte que  $P_S = T_{S, \mathbb{R}}$  est défini sur  $\mathbb{Q}$ , autrement dit  $P_{S, \mathbb{Z}}$  est de rang deux. Remarquons que  $P_{S, \mathbb{Z}} = T_S$ , vu que ces deux réseaux sont primitifs dans  $H^2(S, \mathbb{Z})$ . Réciproquement, supposons que  $P_S$  est défini sur  $\mathbb{Q}$ . Remarquons que

$$\text{NS}(S) = \{x \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid x \cdot \omega_S = 0\}$$

---

que  $(f(u), f(v))$  est une base de  $P'$ . Pour obtenir la carte locale de  $G^{p_0}$  il faut bien sûr ne pas considérer tous  $\text{Hom}(P, Q)$  mais seulement les  $f$  tels que  $f(u), f(v)$  est un 2-plan positif). Bref, on voit que dans la carte, l'application  $f \mapsto (f(u), f(v))$  est  $C^{\infty}$  en  $f$ .

31. On peut donner une belle expression en terme d'espace homogène, comme  $\mathcal{D} \cong \frac{\text{O}(22)}{\text{SO}(2) \times \text{O}(1, 19)}$ , mais je n'en ai pas besoin dans la suite.

32. cela se voit en utilisant  $\overline{\omega_S}$

donc<sup>33</sup> si  $P_S$  est défini sur  $\mathbb{Q}$  (on note  $P_{S,\mathbb{Q}}$  ce 2-plan rationnel, engendré par les parties réelles et imaginaires de  $\omega_S$  qui sont rationnelles) :

$$\begin{aligned} \text{NS}(S)_{\mathbb{Q}} &= \{x \in H^2(S, \mathbb{Q}) \mid x \cdot \omega_S = 0\} \\ &= P_{S,\mathbb{Q}}^{\perp} \cap H^2(S, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\rho(S) = 20$  donc  $S$  est exceptionnelle.  $\square$

**Remarque 8.** Un résultat de Shioda–Inose (voir [26] et les références indiquées) montre que tout 2-plan positif pair (autrement dit, toute forme quadratique entière définie positive de rang 2) est le réseau transcendant d’une surface K3 exceptionnelle.

### 3.2. Quartiques dans $\mathbb{P}^3$ .

Toute surface lisse de degré 4 plongée dans  $\mathbb{P}^3$  est une surface K3 (voir [22] ou le cours donné par Gianluca Pacienza dans cette école). D’après le théorème de Lefschetz en homotopie, ces surfaces sont de plus simplement connexes (voir [20, §2]). L’équation d’une telle surface dépend de  $\binom{3}{7} = 35$  paramètres, donc ces surfaces dépendent de 34 paramètres projectifs. Modulo l’action du groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$  des projectivité de  $\mathbb{P}_3$ , qui est de dimension 15, il reste  $34 - 15 = 19$  paramètres<sup>34</sup>.

### 3.3. Surfaces de Kummer.

Soit  $A = \mathbb{C}^2/\Gamma$  un tore complexe de dimension 2. L’involution  $\sigma: A \rightarrow A, x \mapsto -x$  fixe 16 points. Soit  $\epsilon: \tilde{A} \rightarrow A$  l’éclatement de ces 16 points. Un calcul local montre<sup>35</sup> que l’involution  $\sigma$  remonte en une involution  $\tilde{\sigma}$  sur  $\tilde{A}$  qui fixe les droites exceptionnelles de l’éclatement. L’involution  $\tilde{\sigma}$  est donc une quasi-réflexion, donc d’après de théorème de Chevalley le quotient  $\text{Km}(A) := \tilde{A}/\tilde{\sigma}$  est lisse. On montre assez facilement que  $\text{Km}(A)$  est une surface K3 (voir [22, §5.3] ou le cours donné par Gianluca Pacienza dans cette école). On notera que l’on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\epsilon} & A \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ \text{Km}(A) = \tilde{A}/\tilde{\sigma} & \xrightarrow{\rho} & A/\sigma \end{array}$$

où  $\pi$  et  $p$  sont les applications quotients et  $\rho$  l’éclatement des 16 points doubles ordinaires de  $A/\sigma$ .

Si  $\text{Km}(A)$  est exceptionnelle, alors  $P_{\text{Km}(A),\mathbb{Z}} = T_{\text{Km}(A)}$  et on peut montrer que le réseau transcendant  $T_{\text{Km}(A)}$  est isométrique au réseau  $T_A(2)$  (le réseau transcendant du tore  $A$ , avec forme quadratique multipliée par deux). Cela vient de la structure de Shioda–Inose existant sur les surfaces K3 exceptionnelles (voir [23, Proposition 4.3]), mais on peut aussi le déduire facilement des exercices 7,8,9. Puisque  $H^2(A, \mathbb{Z}) \cong U^{\oplus 3}$  est un réseau pair, il en résulte que pour tout  $x \in P_{\text{Km}(A),\mathbb{Z}}$  on a  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ . En fait la réciproque est vraie :

**Proposition 5.** *Soit  $P \in G^{\text{po}}$  tel que  $P_{\mathbb{Z}} := P \cap \Lambda$  est de rang deux et  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $x \in P_{\mathbb{Z}}$ . Alors il existe une surface de Kummer exceptionnelle marquée  $(S, \phi)$  telle que  $\phi(P_S) = P$  (en particulier  $P$  est la période d’une surface de Kummer marquée).*

33. Il n’y a pas de différence de dimension entre le réseau et son extension rationnelle, ou dans l’autre sens entre un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel et le sous-réseau entier qu’il contient.

34. Mais il serait faux de dire que l’espace des quartiques de  $\mathbb{P}_3$  est de dimension 19 dans  $\mathfrak{M}$  : on peut montrer (voir [20]) que leurs périodes sont denses dans le domaine des périodes, et que toute surface K3 marquée ayant la période d’une quartique de  $\mathbb{P}_3$  en est une. Donc leur lieu est un *ensemble* dense, pas une variété. Pour récupérer une notion de dimension, autrement dit des sous-variétés analytiques de  $\mathfrak{M}$ , il faut fixer un peu plus que le marquage, à savoir une *polarisation* (voir [4]).

35. Prenons des coordonnées locales  $x, y$  centrées en un point fixe. Alors  $\sigma(x) = -x$  et  $\sigma(y) = -y$ . L’éclatement a pour coordonnées  $u, v$  avec  $u = x$  et  $v = y/x$ , donc l’action remonte en une action  $\tilde{\sigma}(u) = -u, \tilde{\sigma}(v) = v$ . La fibre exceptionnelle a pour équation  $u = 0$ , donc  $\tilde{\sigma}$  y agit trivialement.

*Démonstration.* On construit explicitement une surface de Kummer exceptionnelle ayant  $P$  comme période, voir [6, Proposition 2].  $\square$

Les deux propositions suivantes seront essentielles dans la démonstration de la version forte du théorème de Torelli.

**Proposition 6.** *Toute surface K3 marquée ayant la même période d'une surface de Kummer est elle-même une surface de Kummer.*

*Démonstration.* Soit  $(S, \phi)$  une surface K3 marquée et  $(\text{Km}(A), \phi')$  une surface de Kummer marquée telles que  $\phi(H^{2,0}(S)) = \mathcal{P}((S, \phi)) = \mathcal{P}((\text{Km}(A), \phi')) = \phi'(H^{2,0}(\text{Km}(A)))$ . Alors la composée  $\psi: \phi^{-1} \circ \phi': H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est une isométrie de Hodge. Les classes  $[C_i]$  des 16 courbes rationnelles exceptionnelles  $C_i$  de  $\text{Km}(A)$  fournissent, puisque  $\psi$  est une isométrie de Hodge, 16 classes  $d'_i = \psi([C_i])$  de diviseurs sur  $S$  de carré  $-2$ . De plus,  $\sum_i [C_i]$  est divisible par 2 dans  $\text{Pic}(\text{Km}(A))$  car le quotient  $\tilde{A} \rightarrow \text{Km}(A)$  est ramifié sur  $\sum_i C_i$ . D'après le théorème de Riemann–Roch,  $d'_i$  ou  $-d'_i$  est effectif<sup>36</sup>. Notons  $C'_i$  les courbes associées, avec  $[C'_i] = \epsilon_i d'_i$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$ . Les courbes  $C'_i$  sont nécessairement irréductibles, sinon les courbes  $C_i$  seraient elles aussi linéairement équivalentes à des diviseurs réductibles<sup>37</sup>. D'après la formule du genre sur les surfaces K3, on en déduit que les courbes  $C'_i$  sont rationnelles et lisses. De plus, la somme  $\sum_i d'_i \in \text{Pic}(S)$  est divisible par 2 puisque  $\sum_i d'_i = \psi(\sum_i [C_i])$  et que  $\psi$  induit un isomorphisme<sup>38</sup>  $\text{Pic}(\text{Km}(A)) \cong \text{Pic}(S)$ . En effet, puisque  $\pi: \tilde{A} \rightarrow \text{Km}(A)$  est un revêtement double ramifié sur l'union des courbes  $C_i$ , la somme  $\sum_i [C_i]$  est divisible par 2 dans  $\text{Pic}(\text{Km}(A))$ . Donc la somme  $\sum [C'_i] = \sum \epsilon_i d'_i$  est aussi divisible par deux. Il est bien connu que ces deux propriétés caractérisent les surfaces de Kummer (voir [5, Lemme 2]).  $\square$

**Remarque 9.** Il résulte de la Proposition 6 que la réciproque de la Proposition 5 est vraie : une surface de Kummer  $S$  est exceptionnelle si et seulement si le réseau  $P_{\mathbb{Z}} := P_S \cap \Lambda$  est de rang 2 et si pour tout  $x \in P_{\mathbb{Z}}$  on a  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ .

**Proposition 7.** *Les périodes des surfaces de Kummer marquées sont denses dans  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les périodes des surfaces de Kummer marquées exceptionnelles sont denses dans  $\mathcal{D}$ . D'après la proposition précédente, il suffit pour cela de montrer que les 2-plans positifs orientés  $P$  de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  tels que  $P_{\mathbb{Z}} = P \cap \Lambda$  est de rang 2 et vérifiant que pour tout  $x \in P_{\mathbb{Z}}$  on a  $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$  sont denses dans  $G^{\text{po}}$ . Je renvoie à [6, Proposition 3] pour cet argument.  $\square$

Ces propriétés des surfaces de Kummer ont une conséquence importante pour toutes les surfaces K3 :

**Corollaire 1.** *Toutes les surfaces K3 sont difféomorphes, en particulier les surfaces K3 sont simplement connexes.*

*Démonstration.* Soit  $(S, \phi)$  une surface K3 marquée et  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  sa famille universelle de déformation. Puisque l'application locale des périodes  $\text{Def}(S) \rightarrow \mathcal{D}$  est un isomorphisme local, d'après la Proposition 7 il existe  $t \in \text{Def}(S)$  tel que la période de  $\mathcal{X}_t$  (via le marquage) est celle d'une surface de Kummer exceptionnelle. D'après la Proposition 6,  $\mathcal{X}_t$  est une surface de Kummer. Ainsi  $S$  est difféomorphe à une surface de Kummer<sup>39</sup>. Or, toutes les surfaces de Kummer sont difféomorphes entre elles (car les tores complexes le sont), donc toutes les surfaces K3 sont difféomorphes. En particulier,  $S$  est difféomorphe

36. J'ai détaillé l'argument un peu plus loin

37. impossible puisque les courbes  $C_i$  sont les diviseurs exceptionnels d'un éclatement.

38. car  $\psi_t$  est une isométrie de Hodge :  $\text{Pic}(S) = \text{NS}(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S)$  lorsque  $S$  est une surface K3.

39. Dans une même famille de déformation sur une base simplement connexe, toutes les fibres sont difféomorphes, par exemple d'après le théorème d'Ehresmann.

à une quartique de  $\mathbb{P}^3$  et nous savons que les quartiques de  $\mathbb{P}^3$  sont simplement connexes (d'après le théorème de Lefschetz en homotopie, ou le cours donné par Gianluca Papienza dans cette école, voir sinon [20, §2]<sup>40</sup>).  $\square$

Considérons à nouveau le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\epsilon} & A \\ \pi \downarrow & & \\ \mathrm{Km}(A) = \tilde{A}/\tilde{\sigma} & & \end{array}$$

On en déduit une application

$$i: H^2(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathrm{Km}(A), \mathbb{Z})$$

définie par  $i(x) = \pi_* \epsilon^*(x)$ . Je laisse les vérifications suivantes en exercice :

**Exercice 7.** Montrer que  $i(x) \cdot i(y) = 2x \cdot y$  pour tous  $x, y \in H^2(A, \mathbb{Z})$ .

**Solution 7.** En utilisant la formule de projection on calcule :

$$\begin{aligned} i(x) \cdot i(y) &= \pi_*(\epsilon^*x) \cdot \pi_*(\epsilon^*y) \\ &= \pi_*(\pi^* \pi_* \epsilon^*x \cdot \epsilon^*y). \end{aligned}$$

Puisque  $\pi$  est un morphisme fini de degré deux on a  $\pi^* \pi_* = 2 \mathrm{id}$  donc (vu que nous calculons en fait des nombres) :

$$i(x) \cdot i(y) = \pi_*(2\epsilon^*(x \cdot y)) = 2x \cdot y.$$

**Exercice 8.** Le morphisme  $i$  est injectif.

**Solution 8.** Si  $i(x) = 0$ , alors  $c \cdot y = 0$  pour tout  $y \in H^2(A, \mathbb{Z})$  d'après l'exercice précédent, donc  $x = 0$ .

**Exercice 9.** Notons  $L(A)$  le sous-groupe de  $H^2(\mathrm{Km}(A), \mathbb{Z})$  engendré par les classes des courbes exceptionnelles (on n'ajoute pas la classe divisible). Montrer que  $i(H^2(A, \mathbb{Q}))$  est l'orthogonal de  $L(A)$  dans  $H^2(\mathrm{Km}(A), \mathbb{Q})$ , de sorte que :

$$H^2(\mathrm{Km}(A), \mathbb{Q}) = L(A) \oplus^\perp i(H^2(A, \mathbb{Q})).$$

**Solution 9.** Notons  $E_i$  les diviseurs exceptionnels de l'éclatement  $\epsilon$  et  $[C_i] = \pi_*[E_i]$  les classes des  $-2$ -courbes de  $\mathrm{Km}(A)$ . Pour tout  $x \in H^2(A, \mathbb{Q})$  on a avec la formule de projection :

$$[C_i] \cdot i(x) = \pi_*(\epsilon^*x \cdot \pi^* \pi_*[E_i]) = 2\pi_*(\epsilon^*x \cdot [E_i]) = 0$$

donc  $i(H^2(A, \mathbb{Z})) \subset L(A)^\perp$ . Inversement, si  $x \in L(A)^\perp$ , alors  $\pi^*(x)$  est orthogonal aux classes  $[E_i]$ . Etant donné que

$$H^2(\tilde{A}, \mathbb{Z}) = \epsilon^*(H^2(A, \mathbb{Z})) \oplus_i^\perp [E_i]$$

il existe  $a \in H^2(A, \mathbb{Z})$  tel que  $\pi^*x = \epsilon^*a$ , donc  $x = \frac{1}{2}\pi_*\pi^*x = \frac{1}{2}i(a)$ , ce qui montre que  $L(A)^\perp \subset i(H^2(A, \mathbb{Q}))$ . On a dû diviser par deux donc l'argument ne fonctionne qu'avec la cohomologie rationnelle. En fait on peut montrer que la classe  $a$  obtenue est divisible par deux dans  $H^2(A, \mathbb{Z})$ , voir la remarque ci-dessous.

40. Dans cet exposé, Le Potier obtient la difféomorphie et la simple connexité des surfaces K3 en utilisant plutôt la densité des périodes des quartiques. Vu que ce résultat n'est pas utile dans la démonstration que je donne du théorème de Torelli, j'ai préféré l'argument par les surfaces de Kummer.

**Remarque 10.** Les propriétés énoncées dans l'exercice précédent restent vraies dans la cohomologie entière mais leur démonstration est plus délicate (voir [5, §2, Lemme 3]). On montre que  $i(H^2(A, \mathbb{Z}))$  est l'orthogonal de  $L(A)$  dans  $H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z})$ , cependant :

$$H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z}) \neq L(A) \oplus i(H^2(A, \mathbb{Z}))$$

car le réseau de gauche est unimodulaire, tandis que celui de droite est isométrique au réseau  $\langle -2 \rangle^{\oplus 16} \oplus U^{\oplus 2}$ .

**Remarque 11.** Une fois fixée une polarisation par le sous-réseau  $L(A)$  on obtiendra une sous-variété de dimension 4 (ou 3 dans le cas algébrique).

#### 4. ÉNONCÉ DU THÉORÈME DE TORELLI GLOBAL, VERSIONS FORTE ET FAIBLE

**Théorème 2** (Théorème de Torelli global, version faible). *Deux surfaces K3 kähleriennes  $S$  et  $S'$ , sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de structure de Hodge  $H^2(S', \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$  respectant la forme d'intersection (autrement dit une isométrie de Hodge).*

Bien que l'énoncé ne fasse pas usage explicite de l'hypothèse kählerienne, nous devons l'ajouter puisque nous la démontrons que nous allons en donner repose sur la version forte dont l'énoncé fera, elle, référence explicite à l'hypothèse kählerienne.

La version forte est un peu plus précise, pour l'énoncé je vais introduire une notion supplémentaire. Si  $S$  est une surface K3, la forme d'intersection restreinte à l'espace vectoriel réel<sup>41</sup>  $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R})$  a signature (1, 19). Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{S}_S := \{x \in H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R}) \mid x^2 > 0\}.$$

C'est un cône qui a deux composantes connexes<sup>42</sup>. Chacune de ces composantes connexes est un ensemble convexe. Si nous supposons que  $S$  est kählerienne, cela nous donne un choix naturel de l'une de ces deux composantes. Notons :

$$\mathcal{K}_S := \{\sigma \in H^2(X, \mathbb{R}) \mid \sigma \text{ est une classe de Kähler}\}.$$

**Remarque 12.** C'est le moment de faire quelques rappels très basiques de géométrie kählerienne (issus de [30]).  $S$  est une surface complexe, notons  $J$  l'opérateur de structure pseudo-complexe sur l'espace tangent réel  $T_S^{\mathbb{R}}$ , tel que  $J^2 = -1$ . On se donne une métrique hermitienne (sesquilineaire)  $h$  sur  $T_S^{\mathbb{R}}$ , où la propriété hermitienne considérée sur l'espace complexe  $T_S^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = T_S^{\mathbb{C}}$  correspond à la structure complexe donnée par  $J$ . La forme  $h$  vérifie donc les relations :

$$h(Ju, v) = ih(u, v), \quad h(u, Jv) = -ih(u, v), \quad h(v, u) = \overline{h(u, v)}.$$

En particulier,  $h$  est invariante sous  $J$  :  $h(Ju, Jv) = h(u, v)$  pour  $u, v \in T_S^{\mathbb{C}}$ . Décomposons la forme  $h$  en partie réelle et imaginaire sous la forme :

$$h = g - i\sigma.$$

Les relations précédentes induisent pour  $g$  et  $\sigma$  les relations suivantes :

$$\begin{aligned} g(v, u) &= g(u, v), & \sigma(v, u) &= -\sigma(u, v), \\ g(u, v) &= \sigma(u, Jv), & \sigma(u, v) &= g(u, Jv), \\ g(Ju, Jv) &= g(u, v), & \sigma(Ju, Jv) &= \sigma(u, v). \end{aligned}$$

41. Dans la décomposition de Hodge de  $H^2(S, \mathbb{C})$ , on sait que  $\overline{H^{1,1}(S)} = H^{1,1}(S)$  donc cet espace a une structure réelle.

42. dans une base adaptée, l'équation est  $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{20}^2 > 0$ , donc  $x_2^2 + \dots + x_{20}^2 < x_1^2$ , on voit les ellipsoïdes le long de l'axe  $x_1$ .

Il en résulte que  $g$  est une métrique riemannienne sur  $S$  et que  $\sigma$  est une 2-forme alternée  $J$ -invariante. Rappelons que l'espace  $\Omega^{1,0} \subset \Omega_S^{\mathbb{C}}$  est l'espace propre associé à la valeur propre  $i$  pour  $J$ , et  $\Omega^{0,1}$  est celui de la valeur propre  $-i$ . Sur la décomposition

$$\wedge^2 \Omega_S^{\mathbb{C}} = \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2}$$

avec  $\Omega^{2,0} = \wedge^2 \Omega^{1,0}$  et  $\Omega^{0,2} = \wedge^2 \Omega^{0,1}$ , l'opérateur  $J$  agit donc par multiplication par  $-1$  sur  $\Omega^{2,0}$  et  $\Omega^{0,2}$ , et est l'identité sur  $\Omega^{1,1}$ . On en déduit que  $\sigma$  est une classe de type  $(1, 1)$ . Cette forme est appelée *forme de Kähler* si elle est fermée, auquel cas, puisqu'elle est réelle, sa classe de cohomologie vit dans  $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R})$ . Par extension, une *classe de Kähler* est par définition une classe de  $H^2(S, \mathbb{R})$  qui contient une forme de Kähler.

Il est facile de voir que  $\mathcal{K}_S$  est un cône convexe : si  $\sigma_0, \sigma_1$  sont deux formes de Kähler, alors toute forme  $\sigma_t = t\sigma_0 + (1-t)\sigma_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , est clairement encore une forme de Kähler. De plus  $\mathcal{K}_S \subset \mathcal{S}_S$  car si  $\sigma$  est une forme de Kähler, sa puissance maximale est une forme volume<sup>43</sup> sur  $S$  :

$$\sigma^2 = \int_S \sigma \wedge \sigma > 0.$$

Donc  $\mathcal{K}_S$  est inclus dans l'une des deux composantes connexes de  $\mathcal{S}_S$ , que nous notons  $\mathcal{C}_S$  et appelons le *cône positif*. Notons aussi  $\text{Eff}(S) \subset \text{NS}(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S)$  l'ensemble des classes de diviseurs effectifs : c'est bien sûr un cône, que nous appelons le *cône effectif*.

**Définition 1.** Soient  $S, S'$  deux surfaces K3 kähleriennes. Nous dirons qu'une isométrie de Hodge  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est *effective* si  $\psi(\text{Eff}(S')) = \text{Eff}(S)$  et si  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \mathcal{C}_S$ .

Nous noterons plus loin qu'il serait suffisant de demander des inclusions, lorsque nous verrons d'autres caractérisations importantes de cette condition d'effectivité (voir Proposition 8).

**Théorème 3** (Théorème de Torelli global, version forte). *Soient  $S, S'$  deux surfaces K3 kähleriennes et  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge effective. Il existe un unique isomorphisme  $u: S \rightarrow S'$  tel que  $u^* = \psi$ .*

Énoncé sous cette forme, ce théorème de Torelli (sous ses deux formes forte et faible) est en fait la réunion de deux théorèmes :

- (1) Théorème de Pjateckiĭ-Šapiro et Šafarevič [24] lorsque les surfaces K3 sont algébriques (leur démonstration contenait quelques erreurs corrigées ensuite par Looijenga-Peters [21]) ;
- (2) Théorème de Burns-Rapoport [11], qui généralise (1) au cas où les surfaces K3 sont kähleriennes.

## 5. ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION CLASSIQUE DU THÉORÈME DE TORELLI GLOBAL

La démonstration du théorème de Torelli est longue et certaines parties techniques sont délicates, mais sa structure est assez simple.

### 5.1. Version forte.

*Première étape.* Il s'agit d'une réduction du problème, c'est une étape technique facile. Notons  $f: \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S)$  et  $f': \mathcal{X} \rightarrow \text{Def}(S')$  les familles universelles de ces deux surfaces et choisissons un marquage  $(S, \phi)$ . Notons  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(S, \mathbb{Z})$  l'isométrie de Hodge effective. Nous l'utilisons pour marquer la surface  $S'$  comme suit :

$$\phi' := \phi \circ \psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} \Lambda.$$

<sup>43</sup>. Vu que  $\sigma$  est obtenue à partir de métriques, elle est définie positive. Voir [10, p.20-21] pour l'écriture en coordonnées.

Les marquages  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  s'étendent en des isomorphismes

$$\begin{aligned}\underline{\phi}: R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}} &\rightarrow \underline{\Lambda}_{\text{Def}(S)} \\ \underline{\phi}': R^2 f'_* \underline{\mathbb{Z}} &\rightarrow \underline{\Lambda}_{\text{Def}(S')}\end{aligned}$$

qui correspondent à deux applications des périodes (locales)

$$\begin{array}{ccc}\text{Def}(S) & & \\ & \searrow \mathcal{P} & \\ & & \mathcal{D} \\ & \nearrow \mathcal{P}' & \\ \text{Def}(S') & & \end{array}$$

telles que  $\mathcal{P}'(0) = [\phi'(H^{2,0}(S'))] = [\phi\psi(H^{2,0}(S'))] = [\phi(H^{2,0}(S))] = \mathcal{P}(0)$ . Par des choix assez petits de  $\text{Def}(S)$  et  $\text{Def}(S')$ , ces applications des périodes sont des plongements, donc la composée  $q: \text{Def}(S) \rightarrow \text{Def}(S')$  est un isomorphisme tel que  $q(0) = 0$  :

$$\begin{array}{ccc}\text{Def}(S) & & \\ \downarrow \sim q & \searrow \mathcal{P} & \\ \text{Def}(S') & & \mathcal{D} \\ & \nearrow \mathcal{P}' & \end{array}$$

Utilisons cet isomorphisme pour voir la famille  $\mathcal{X}'$  sur  $\text{Def}(S)$  :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{X}'' & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ f'' \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Def}(S) & \xrightarrow{q} & \text{Def}(S')\end{array}$$

Notons  $\Delta := \text{Def}(S)$ . Nous nous sommes ramenés à voir les surfaces  $S$  et  $S'$  dans deux familles de déformations paramétrées par la même base :

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \Delta, \quad f'': \mathcal{X}'' \rightarrow \Delta, \quad f^{-1}(0) \cong S, \quad f''^{-1}(0) \cong S'$$

Par composition, l'isomorphisme  $\psi$  s'étend sur toute la famille :

$$\begin{array}{ccc}R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\underline{\phi}} & \underline{\Lambda}_{\Delta} \\ \sim \uparrow \underline{\psi} & \nearrow \sim & \\ R^2 f''_* \underline{\mathbb{Z}} & & \underline{\Lambda}_{\Delta}\end{array}$$

et induit en chaque point un isomorphisme  $\psi_t: H^2(\mathcal{X}''_t, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$  compatible avec les produits d'intersection. Il reste à voir que c'est aussi une isométrie de Hodge. Par construction de la famille  $\mathcal{X}''$ , obtenue depuis  $\mathcal{X}'$  par pullback avec  $q$ , et d'après le diagramme commutatif définissant  $q$ , les deux applications des périodes  $\Delta \rightarrow \mathcal{D}$  associées à ces familles sont égales. Cela signifie que pour tout  $t \in \Delta$ ,

$$\begin{aligned}\phi_t(H^{2,0}(\mathcal{X}_t)) &= \phi'_t(H^{2,0}(\mathcal{X}''_t)) \quad (= \phi'_{q(t)}(H^{2,0}(\mathcal{X}'_{q(t)}))) \text{ mais ce n'est pas utile} \\ &= \phi_t \psi_t(H^{2,0}(\mathcal{X}''_t))\end{aligned}$$

donc  $\psi_t(H^{2,0}(\mathcal{X}''_t)) = H^{2,0}(\mathcal{X}_t)$ . Cela signifie que  $\psi_t$  est bien une isométrie de Hodge.

*Deuxième étape.* Nos deux surfaces K3,  $S$  et  $S'$ , sont donc maintenant les fibres à l'origine deux familles  $f: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  et  $f': \mathcal{X}' \rightarrow \Delta$  sur une même base et l'isométrie de Hodge  $\psi$  a été étendue sur les familles en des isométries de Hodge

$$\psi_t: H^2(\mathcal{X}'_t, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$$

pour tout  $t$ , provenant d'un isomorphisme  $\underline{\psi}: R^2 f'_* \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} R^2 f_* \mathbb{Z}$  (les marquages ne sont maintenant plus utiles, ni les applications des périodes). Nous savons de plus que  $\psi_0$  est une isométrie de Hodge effective. On montre alors que l'ensemble des points  $t \in \Delta$  tels que  $\psi_t$  est effective<sup>44</sup> est un ouvert dans  $\Delta$ . Je renvoie à [6, Proposition 5] pour la démonstration. Quitte à restreindre l'ouvert  $\Delta$ , on peut donc supposer que  $\psi_t$  est effective pour tout  $t \in \Delta$ .

*Troisième étape.* D'après les Propositions 6 et 7, il existe une partie dense  $\Omega$  de  $\Delta$  telle que pour tout  $t \in \Omega$ ,  $\mathcal{X}'_t = \text{Km}(A')$  est une surface de Kummer, que l'on peut même supposer exceptionnelle. On a donc pour tout  $t \in \Omega$  une isométrie de Hodge effective

$$\psi_t: H^2(\text{Km}(A'), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}).$$

On arrive à la partie la plus longue de la démonstration, j'en esquisse seulement les arguments. Il s'agit de montrer qu'il existe un isomorphisme  $u_t: \mathcal{X}_t \rightarrow \mathcal{X}'_t$  tel que  $u_t^* = \psi_t$ .

- (1) On montre que  $\mathcal{X}_t$  est aussi une surface de Kummer. L'argument a déjà été utilisé dans la démonstration de la Proposition 6, je le reproduis par commodité<sup>45</sup>. Les classes  $[C'_i]$  des 16 courbes rationnelles exceptionnelles  $C'_i$  de  $\text{Km}(A')$  sont telles que la classe de leur somme est divisible par deux dans le groupe de Picard et fournissent, puisque  $\psi_t$  est effective, 16 classes  $[C_i] = \psi_t([C'_i])$  de diviseurs effectifs sur  $\mathcal{X}_t$  de carré  $-2$ . Ils sont nécessairement irréductibles, sinon les courbes  $C'_i$  seraient elles aussi linéairement équivalentes à des diviseurs réductibles<sup>46</sup>. D'après la formule du genre sur les surfaces K3, on en déduit que les courbes  $C_i$  sont rationnelles et lisses. De plus, leur somme  $\sum_i [C_i] \in \text{Pic}(\mathcal{X}_t)$  est divisible par 2 puisque  $\sum_i [C_i] = \psi_t(\sum_i [C'_i])$  et que  $\psi_t$  induit un isomorphisme<sup>47</sup> de  $\text{Pic}(\text{Km}(A'))$  sur  $\text{Pic}(\mathcal{X}_t)$ . Il est bien connu que ces deux propriétés caractérisent les surfaces de Kummer (voir [5, Lemme 2]).
- (2) Notons  $\mathcal{X}_t = \text{Km}(A)$ . Je reprends les notations de la section 3.3. On a noté  $L(A) \subset H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z})$  le sous-groupe engendré par les 16 courbes exceptionnelles. On sait (voir Exercice 9 et Remarque 10) que  $i(H^2(A, \mathbb{Z}))$  est l'orthogonal de  $L(A)$  dans  $H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z})$ . Vu que  $\psi_t$  envoie  $L(A')$  sur  $L(A)$ , elle induit une isométrie<sup>48</sup> de Hodge  $\varphi$  faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^2(A', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & H^2(A, \mathbb{Z}) \\ i' \downarrow & & \downarrow i \\ H^2(\text{Km}(A'), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi_t} & H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z}) \end{array}$$

- (3) Rappelons que  $H^2(A, \mathbb{Z}) \cong \wedge^1 H^1(A, \mathbb{Z})$ , l'isomorphisme étant donné par le cup-produit. L'isométrie de Hodge  $\varphi: \wedge^1 H^1(A', \mathbb{Z}) \rightarrow \wedge^1 H^1(A, \mathbb{Z})$  n'est pas nécessairement induite par une isométrie de Hodge  $H^1(A', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(A, \mathbb{Z})$ . Notons ces groupes  $H = H^1(A, \mathbb{Z})$  et  $H' = H^1(A', \mathbb{Z})$ . On montre ([5, §3, Lemme 4]) qu'il existe un isomorphisme  $\lambda: H' \rightarrow H$  tel que  $\varphi = \pm \lambda \wedge \lambda$  si et seulement si  $\varphi$  est

44. les surfaces K3 dans ces familles sont encore kähleriennes, car cette propriété est stable par déformation suffisamment petite.

45. Cette fois, nous avons l'hypothèse supplémentaire que l'isométrie est effective.

46. impossible puisque les courbes  $C_i$  sont les diviseurs exceptionnels d'un éclatement.

47. car  $\psi_t$  est une isométrie de Hodge, utiliser les identifications  $\text{Pic}(S) = \text{NS}(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S)$  lorsque  $S$  est une surface K3.

48. C'est une isométrie à cause des propriétés de  $i$  faites en exercice.

compatible avec une certaine *orientation canonique*<sup>49</sup> de  $H^2(A', \mathbb{Z})$  et  $H^2(A, \mathbb{Z})$ , pour laquelle je renvoie à la même référence.

- (4) On montre que l'isométrie  $\varphi$  provenant de  $\psi_t$  vérifie bien cette compatibilité avec l'orientation : c'est un point délicat (voir [5, §4]), qui manquait d'ailleurs dans la première démonstration du théorème de Torelli par Pjateckiĭ-Šapiro et Šafarevič.
- (5) On sait (par exemple après le cours donné par Pierre Py dans cette école) que le foncteur  $A \mapsto H^1(A, \mathbb{Z})$  est une équivalence de la catégorie des tores complexes vers celle des structure de Hodge de poids 1. On vérifie que l'isomorphisme  $\lambda$  tel que  $\varphi = \pm\lambda \wedge \lambda$  est une isométrie de Hodge (voir [5, §3, Proposition 2]), elle provient donc d'un isomorphisme  $v: A \rightarrow A'$ . On a donc  $\varphi = \pm v^*: H^2(A', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Z})$ .
- (6) On montre qu'en fait on a  $\varphi = v^*$ , c'est un autre point technique (voir [5, §5]).
- (7) Par construction, l'isomorphisme  $v: A \rightarrow A'$  est un morphisme de groupes<sup>50</sup> donc commute avec les involutions  $x \mapsto -x$ . Il remonte donc en un isomorphisme  $\tilde{v}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}'$  respectant les courbes exceptionnelles (si  $x \in A$  est fixe par  $\sigma$ , et  $C_x$  est la courbe exceptionnelle correspondante, alors  $v: C_x \rightarrow C'_{v(x)}$ ) et commutant avec les involutions  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}'$ , donc descend en un isomorphisme  $\text{Km}(v): \text{Km}(A) \rightarrow \text{Km}(A')$ . Notons  $L(A) \subset H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z})$  le sous-groupe engendré par les 16 courbes exceptionnelles. On sait (voir Exercice 9 et Remarque 10) que  $i(H^2(A, \mathbb{Z}))$  est l'orthogonal de  $L(A)$  dans  $H^2(\text{Km}(A), \mathbb{Z})$  et de même pour  $A'$ . La restriction de  $\text{Km}(v)^*$  à  $i(H^2(A', \mathbb{Z}))$  est donc entièrement déterminée par  $v^* = \varphi$ , donc par  $\psi_t$  ( $\varphi$  a justement été défini de cette manière), tandis que sa restriction à  $L(A')$  ne dépend a priori que de la construction de  $v$ , toutefois même si géométriquement l'action dépend effectivement de  $v$ , l'action induite au niveau des groupes  $L(A')$  et  $L(A)$  n'en dépend plus, et coïncide donc avec celle de<sup>51</sup>  $\psi_t$ .

*Quatrième étape.* Résumons ce que nous avons obtenu pour le moment. Les deux surfaces  $S$  et  $S'$  vivent dans des familles lisses au-dessus d'un même espace :

$$f: \mathcal{X} \rightarrow \Delta, \quad f': \mathcal{X}' \rightarrow \Delta \text{ avec } \mathcal{X}_0 \cong S \text{ et } \mathcal{X}'_0 \cong S'.$$

Nous avons un isomorphisme  $\psi: R^2 f'_* \mathbb{Z} \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Z}$  et nous avons trouvé une partie dense  $\Omega$  de  $\Delta$  telle que pour tout  $t \in \Omega$ , il existe un isomorphisme  $u_t: \mathcal{X}_t \rightarrow \mathcal{X}'_t$  tel que  $u_t^* = \psi_t$ . De plus, nous savons que  $\psi_0$  est effective. Le *Lemme principal* de Burns–Rapoport permet de faire converger ces isomorphismes à l'origine de  $\Delta$  : il existe un isomorphisme  $u_0: \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}'_0$  tel que  $u_0^* = \psi_0$ . Voir [6, §2, Proposition 4] pour la démonstration de ce lemme.

*Cinquième étape.* On montre l'unicité de l'isomorphisme trouvé. Cele revient à montrer que si un automorphisme  $u: S \rightarrow S$  a une action triviale  $u^* = \text{id}$  sur la cohomologie, alors  $u$  est l'identité. On procède comme suit.

- (1) On montre que  $u$  est d'ordre fini dans  $\text{Aut}(S)$ . Une fois choisie une forme de Kähler,  $u^*$  fixe la classe de Kähler associée. D'après le théorème de Yau, cette classe contient une unique métrique de Kähler–Einstein à courbure de Ricci nulle. Donc  $u$  laisse cette métrique invariante. Ainsi,  $u$  est une isométrie. Le groupe de Lie  $\text{Aut}(S)$  étant discret (sa dimension est  $h^0(S, T_S) = 0$ ), son groupe d'isométries pour cette métrique, qui est compact, est donc fini. Donc  $u$  est d'ordre fini.
- (2) Supposons que  $u \neq \text{id}$ . Si  $x \in S$  est un point fixe de  $u$ , l'action locale de la différentielle  $d_x u$  de  $u$  sur l'espace tangent  $T_x S$  est diagonalisable puisque  $u$  est

49. relative à un choix de la manière d'ordonner la base de  $\wedge^2 H^1(A, \mathbb{Z})$  en fonction de celle de  $H^1(A, \mathbb{Z})$ .

50. on peut de toute façon s'y ramener vu que les translations agissent trivialement sur la cohomologie.

51. C'est une permutation des courbes, quitte à renuméroter les courbes exceptionnelles l'action est la même (l'identité).

d'ordre fini. Puisque  $u$  agit trivialement sur la cohomologie, en particulier la forme symplectique est invariante, donc l'action de  $u$  sur  $T_x S$  a déterminant 1. Dans une base adaptée, l'action est donc de la forme  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $|\lambda| = 1$ , on note  $\lambda = e^{i\theta_x}$ . Par ailleurs, puisque  $u \neq \text{id}$ , le lieu fixe est de codimension au moins 1, donc  $\lambda \neq 1$  et  $\theta_x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Il en résulte que les points fixes de  $u$  sont isolés. Notons  $F \subset S$  l'ensemble de ces points fixes.

(3) Appliquons la formule de Lefschetz topologique à  $u$  :

$$|F| = \sum_i (-1)^i \text{tr } u^* |_{H^i(S, \mathbb{Z})} = \sum_i (-1)^i h^i(S, \mathbb{Z}) = 24.$$

Appliquons la formule de Lefschetz holomorphe à  $u$  pour le faisceau  $\mathcal{O}_S$  :

$$\sum_i (-1)^i \text{tr } u^* |_{H^i(S, \mathcal{O}_S)} = \sum_{x \in F} \frac{1}{\det(\text{id} - d_x u)}$$

ce qui donne

$$2 = \sum_{x \in F} \frac{1}{2 - 2 \cos(\theta_x)}.$$

Puisque  $2 - 2 \cos(\theta_x) \leq 4$ , on obtient une contradiction :

$$2 \geq \sum_{x \in F} \frac{1}{4} = 6$$

donc  $u = \text{id}$ .

**Remarque 13.** Voici un argument alternatif proposé dans [6, §4, Proposition 6] pour éviter le recours au théorème de Yau dans l'argument (1) de la quatrième étape. Puisque  $u$  agit trivialement sur la cohomologie, d'après le théorème d'Horikawa  $u$  s'étend (de manière unique, on en a besoin) sur toute la déformation universelle (quitte à restreindre  $\text{Def}(S)$ ) en un isomorphisme  $U: \mathcal{X}_S \rightarrow \mathcal{X}_S$  au-dessus de  $\text{Def}(S)$ . On peut donc supposer que  $S$  est projective. Il reste à voir que les automorphismes d'une surface K3 projective qui agissent trivialement sur la cohomologie forment un groupe algébrique. On sait déjà que puisque  $S$  est projective, le groupe  $\text{Aut}(S)$  est un schéma en groupes localement de type fini (le foncteur que l'on pense est représentable sous l'hypothèse projective). Fixons un plongement projectif  $S \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  et notons  $\mathcal{O}_S(1)$  la classe hyperplane. Si  $u: S \rightarrow S$  agit trivialement sur la cohomologie, en particulier la classe hyperplane  $\mathcal{O}_S(1)$  est invariante (dans le groupe de Picard, qui est plongé dans la cohomologie puisque  $S$  est une surface K3). Le plongement  $S \hookrightarrow \mathbb{P}^n$  s'écrit  $x \mapsto (s_0(x) : \dots : s_n(x))$  où les  $s_i$  sont des sections globales de  $\mathcal{O}_S(1)$ . Puisque  $u^* \mathcal{O}_S(S) = \mathcal{O}_S(1)$ , l'action de  $u^*$  sur l'ensemble des sections globales  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S(1))$  est donné par une matrice inversible  $A$  dans la base des sections  $s_i$ . Cette matrice induit un isomorphisme de  $\mathbb{P}^n$  qui prolonge  $u$  par construction :

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ u \downarrow & & \downarrow A \\ S & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Ainsi, le groupe  $G_0$  des automorphismes de  $S$  agissant trivialement sur la cohomologie se plonge dans le groupe  $\text{PGL}(n)$ . Mais  $\text{PGL}(n)$  est un groupe algébrique et  $G_0$  est discret, donc  $G_0$  est fini.

### 5.2. Version faible.

C'est une conséquence de la version forte, pour laquelle nous avons seulement besoin de quelques informations importantes sur le cône positif des surfaces K3. Partons d'une classe  $\delta \in H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) = \text{NS}(S)$ . Elle s'écrit aussi  $\delta = c_1(L)$  pour un certain fibré inversible  $L \in \text{Pic}(S)$  (uniquement déterminé). La formule de Riemann–Roch dit ici (voir [3]) :

$$\chi(L) = h^0(L) - h^1(L) + h^2(L) = \frac{1}{2}\delta^2 + \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}\delta^2 + 2$$

donc en particulier (en utilisant la dualité de Serre au passage) :

$$h^0(L) + h^0(L^{-1}) \geq \frac{1}{2}\delta^2 + 2.$$

Si  $\delta^2 = -2$ , on en déduit que  $L$  ou  $L^{-1}$  a des sections globales non nulles, donc que soit  $\delta$  soit  $-\delta$  est effectif. Notons alors :

$$\Delta := \{\delta \in \text{NS}(S) \mid \delta^2 = -2 \text{ et } \delta \text{ effectif}\}.$$

**Exercice 10.** *Montrer que<sup>52</sup> si  $\delta \in \Delta$  est la classe d'une courbe irréductible  $C$  (appelée  $(-2)$ -courbe), alors :*

- (1)  $C$  est une courbe rationnelle lisse.
- (2)  $h^1(\mathcal{O}_S(C)) = 0$
- (3) Le système linéaire  $|C|$  est de dimension nulle (il n'existe pas d'autre diviseur effectif linéairement équivalent à  $C$ ,  $C$  est rigide<sup>53</sup>).

**Solution 10.** Voir Saint-Donat [25] pour d'autres résultats de ce type.

- (1) Le genre arithmétique  $p_a(C)$  de  $C$  vérifie  $C^2 = 2p_a(C) - 2$  donc  $p_a(C) = 0$ , donc  $C$  est une courbe rationnelle lisse (voir [22, §3] pour plus de détails).
- (2) La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

donne en cohomologie une suite exacte courte

$$H^0(S, \mathcal{O}_S(-C)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(-C)) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S(C)) \longrightarrow 0$$

On a  $H^0(\mathcal{O}_S(-C)) = 0$  puisque  $C$  est effective et  $H^0(C, \mathcal{O}_C) = 1$ , il en résulte que  $h^1(\mathcal{O}_S(C)) = 0$ .

- (3) De la formule de Riemann–Roch utilisée ci-dessus on déduit que  $h^0(\mathcal{O}_S(C)) = 1$  donc  $\dim |C| = 0$ .

Pour tout  $\delta \in \Delta$ , notons  $s_\delta: x \mapsto x + (x \cdot \delta)\delta$  la symétrie par rapport à l'hyperplan  $H_\delta := \delta^\perp$  dans  $H^2(S, \mathbb{R})$  et considérons le groupe de Weyl

$$W_S := \langle s_\delta \mid \delta \in \Delta \rangle.$$

Notons que les symétries  $s_\delta$  sont des isométries de Hodge. Le groupe d'isométries  $W_S$  laisse  $\mathcal{S}_S$  globalement invariant et on voit facilement que cela induit une action sur chacune des composantes connexes de ce cône, en particulier  $W_S$  opère sur le cône positif  $\mathcal{C}_S$ . En effet, deux points  $x, y \in \mathcal{S}_S$  vivent dans la même composante connexe de  $\mathcal{S}_S$  si et seulement si  $x \cdot y > 0$ , et on calcule pour  $x \in \mathcal{S}_S$  :

$$x \cdot s_\delta(x) = x \cdot (x + (x \cdot \delta)\delta) = x^2 + (x \cdot \delta)^2 > 0$$

<sup>52.</sup> Les  $(-2)$ -courbes rationnelles lisses sont des éléments de  $\Delta$ , mais ce ne sont pas les seuls. Par exemple une chaîne  $A_2$  de deux telles courbes  $D = C + C'$  avec  $C^2 = C'^2 = -2$  et  $C \cdot C' = 1$  est encore une classe de  $\Delta$ .

<sup>53.</sup> sa contraction donne une singularité nodale  $A_1$ , on appelle parfois ces  $(-2)$ -courbes des *classes nodales*.

**Exercice 11.** Vérifier cette assertion : deux points  $x, y \in \mathcal{S}_S$  vivent dans la même composante connexe de  $\mathcal{S}_S$  si et seulement si  $x \cdot y > 0$ .

**Solution 11.** Si  $x \in \mathcal{S}_S$ , son orthogonal  $H_x$  découpe l'espace en deux demi-espaces, l'un correspondant aux  $y$  tels que  $y \cdot x > 0$ , l'autre sur lequel  $y \cdot x < 0$ . Puisque  $x^2 > 0$ ,  $x$  appartient au demi-espace positif. Il reste à voir que  $H_x$  ne coupe pas  $\mathcal{S}_S$  (sauf au sommet du cône fermé) pour conclure que si  $y \in \mathcal{S}_S$  est dans la même composante connexe de  $\mathcal{S}_S$  que  $x$ , alors  $y \cdot x > 0$  : l'hyperplan  $H_x$  coupe le cône  $\mathcal{S}_S$  seulement en son origine donc l'une des composantes connexes est dans le demi-espace positif, l'autre dans le demi-espace négatif. Puisque  $x^2 > 0$ , la restriction de la forme quadratique à  $H_x$  a pour signature  $(0, 19)$ , donc  $H_x$  est défini négatif et ne coupe pas  $\mathcal{S}_S$ . On peut aussi le voir géométriquement par une belle interprétation. Dire que  $H_x$  ne coupe  $\mathcal{S}_S$  qu'en son sommet se traduit simplement en géométrie projective. Regardons donc l'espace projectif  $\mathbb{P}(H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R}))$ , dans lequel le bord du cône  $\mathcal{S}_S$  définit la quadrique  $Q: x^2 = 0$ . La transformation  $x \mapsto H_x$  n'est autre que la polarité par rapport à la quadrique  $Q$ , voir Figure (1). On voit ainsi que si  $x$  est dans l'intérieur de  $Q$  (donc dans le cône positif), l'hyperplan  $H_x$  est à l'extérieur et ne rencontre pas  $Q$ .

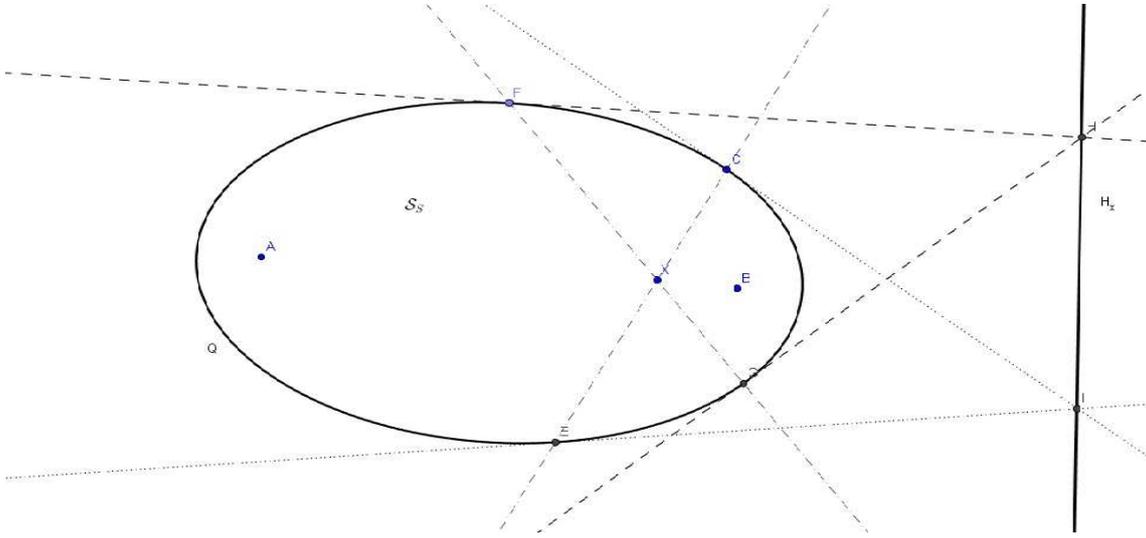


FIGURE 1. Polarité par rapport au cône positif

Puisque la forme quadratique sur  $H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{R})$  a pour signature  $(1, 19)$ , sa restriction à  $H_\delta$  a pour signature  $(1, 18)$  lorsque  $\delta^2 = -2$ , donc les hyperplans  $H_\delta$  découpent des *chambres* (convexes, donc connexes) sur le cône positif  $\mathcal{C}_S$  (si l'on préfère un argument géométrique, on dira que la polaire par rapport à un point  $\delta$  extérieur à la quadrique  $Q$  coupe cette quadrique en deux : on construit cette polaire en prenant les tangentes à la quadrique passant par  $\delta$ ) :

$$\mathcal{C}_S \setminus \bigcup_{\delta \in \Delta} H_\delta.$$

L'une de ces chambres est d'un intérêt particulier, nous l'appellerons la *chambre de Kähler* :

$$\widehat{K}_S := \{x \in \mathcal{C}_S \mid x \cdot \delta > 0 \quad \forall \delta \in \Delta\}.$$

Si  $\omega \in K_S$  est une classe de Kähler, alors pour tout diviseur effectif  $D$  on a la formule<sup>54</sup>  $\omega \cdot [D] = \int_D \omega > 0$ . Il en résulte que :

$$K_S \subset \widehat{K}_S.$$

54. car la restriction est une forme de Kähler sur  $D$ , donc une forme volume ici, voir [2, §1.13].

**Remarque 14.** Dans [2], le cône de Kähler  $K_S$  est défini (!) comme l'ensemble des classes  $\omega \in H^2(S, \mathbb{Z})$  telles que  $\omega \cdot d > 0$  pour tout diviseur effectif  $d$ . Il en résulte assez facilement (voir [2, Proposition VIII.3.7, Corollary VIII.3.8]), du fait des propriétés du cône  $\text{Eff}(S)$  lorsque  $S$  est une surface K3, l'égalité  $K_S = \widehat{K}_S$ . Mais rien ne dit alors que  $K_S$  ne soit bien constitué *que* de classes de Kähler. J'ai choisi ici de définir  $K_S$  comme le cône engendré par les classes de Kähler. On montre a posteriori l'égalité  $K_S = \widehat{K}_S$  comme une conséquence du théorème de Torelli global et de la surjectivité de l'application des périodes (voir [8, Théorème 2], ce n'est pas l'objet de ce cours).

Observons que toute isométrie  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ , telle que  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \psi(\mathcal{C}_S)$  stabilise l'ensemble des chambres (et évite les murs). En effet, toute chambre  $C$  est convexe et connexe, donc son image  $\psi(C)$  est aussi convexe et connexe : il existe donc une chambre  $C'$  telle que  $\psi(C) \subset C'$ . Si l'égalité n'a pas lieu, on trouve un élément  $x \in C'$  tel que  $\psi^{-1}(x) \notin C$ , donc  $\psi^{-1}(C')$  ne serait pas connexe, contradiction. Ainsi, les conditions  $\psi(C) \subset C'$ ,  $\psi(C) = \psi(C')$  et  $\psi(C) \cap C' \neq \emptyset$  sont équivalentes, et puisque  $\psi$  est inversible, dire que  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) \subset \mathcal{C}_S$  est aussi équivalent à dire que  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \mathcal{C}_S$  (il y a autant de composantes connexes des deux côtés).

**Proposition 8.** *Une isométrie de Hodge  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est effective si et seulement si  $\psi(\widehat{K}_{S'}) \cap \widehat{K}_S \neq \emptyset$ , auquel cas on a  $\psi(\widehat{K}_{S'}) = \widehat{K}_S$ .*

*Démonstration.* Si  $\psi$  est effective, on a  $\psi(\text{Eff}(S')) = \text{Eff}(S)$  et  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \mathcal{C}_S$ . Alors si  $\omega \in \widehat{K}_{S'}$ , pour tout  $d \in \Delta$ ,  $d' = \psi^{-1}(d) \in \text{Eff}(S')$  et  $d'^2 = -2$  donc<sup>55</sup>  $d' \in \Delta'$  et

$$\psi(\omega) \cdot d = \omega \cdot d' > 0$$

donc  $\psi(\widehat{K}_{S'}) \subset \widehat{K}_S$ , l'égalité en découle par connexité comme noté plus haut. Inversement, la condition  $\psi(\widehat{K}_{S'}) \cap \widehat{K}_S \neq \emptyset$  suffit, à nouveau par connexité, à assurer que  $\psi(\widehat{K}_{S'}) \subset \widehat{K}_S$  puis que  $\psi(\widehat{K}_{S'}) = \widehat{K}_S$ , et par conséquent que  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) \subset \mathcal{C}_S$  par définition, puis  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \mathcal{C}_S$ . On a aussi  $\psi^{-1}\mathcal{C}_S \subset \mathcal{C}_{S'}$  en utilisant que  $\psi^{-1}(\widehat{K}_S) = \widehat{K}_{S'}$ .

Si  $c \in \text{Eff}(S')$ , montrons que  $d = \psi(c) \in \text{Eff}(S)$ . Il suffit bien sûr de traiter le cas où  $c$  est un diviseur irréductible, auquel cas on a par la formule du genre

$$d^2 = \psi(c)^2 = c^2 \geq -2,$$

donc d'après le théorème de Riemann–Roch  $d$  ou  $-d$  est effectif. Si  $d^2 = c^2 = -2$ , on a donc  $c \in \Delta'$ . Alors pour tout  $\omega \in \widehat{K}_S$  on a puisque  $\psi(\widehat{K}_{S'}) = \widehat{K}_S$  :

$$d \cdot \omega = d \cdot \psi^{-1}(w) = c \cdot w' > 0 \quad (\text{avec } w' = \psi^{-1}(w) \in \widehat{K}_{S'})$$

donc par définition même de la chambre  $\widehat{K}_S$ ,  $-d$  ne peut pas être effectif, donc  $d$  est effectif. Le cas restant est  $d^2 = c^2 \geq 0$ . Dans ce cas,  $c$  est dans l'adhérence du cône  $\mathcal{S}_{S'}$ . Puisque  $c$  est effectif, pour toute classe de Kähler  $\omega' \in K_{S'}$  on a  $c \cdot \omega' > 0$ , donc on a aussi :

$$d \cdot \psi(\omega') = c \cdot \omega' > 0$$

ce qui indique que  $d$  et  $\psi(\omega')$  sont dans la même composante connexe du cône  $\mathcal{S}_S$  (voir Exercice 11), soit ici  $d$  est dans l'adhérence du cône positif  $\mathcal{C}_{S'}$  (on pourrait aussi conclure tout de suite que  $c \in \mathcal{C}_{S'}$  par le même argument et utiliser le fait déjà démontré que  $\psi(\mathcal{C}_{S'}) = \mathcal{C}_S$ ). Prenons maintenant une classe de Kähler  $\omega \in K_S$ . Alors  $\psi^{-1}(\omega) \in \widehat{K}_{S'}$  donc  $c \cdot \psi^{-1}(\omega) \geq 0$  puisque les deux éléments sont dans le cône positif. Ainsi

$$d \cdot \omega = c \cdot \psi^{-1}(\omega) \geq 0,$$

ce qui est impossible si  $-d$  est effectif (on aurait  $(-d) \cdot \omega > 0$  vu que  $\omega$  est une classe de Kähler), donc  $d$  est effectif. Ainsi  $\psi(\text{Eff}(S')) \subset \text{Eff}(S)$ . En refaisant le raisonnement avec  $\psi^{-1}$  on obtient l'inclusion inverse.  $\square$

55. avec des notations évidentes,  $\Delta'$  correspond à  $S'$ .

Nous avons besoin de plusieurs propriétés concernant ces chambres et l'action de  $W_S$  :

**Proposition 9.**

- (1) la réunion des murs  $\bigcup_{\delta \in \Delta} H_\delta$  est fermée dans  $\mathcal{C}_S$ , les chambres sont ouvertes.
- (2) Le groupe  $W_S$  opère simplement transitivement sur les chambres de  $\mathcal{C}_S$ .

*Démonstration.* Voir [7, §2]. □

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration proprement dite de la version faible du théorème de Torelli : soit donc  $S, S'$  deux surfaces K3 kähleriennes et  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  une isométrie de Hodge.

*Démonstration de la version faible du théorème de Torelli.* L'image  $\psi(K_{S'})$  est contenue dans une chambre<sup>56</sup> de  $\mathcal{S}_S$ , et quitte à considérer  $-\psi$ , on peut supposer que  $\psi(K_{S'})$  est contenu dans une chambre du cône positif  $\mathcal{C}_S$ . Puisque l'action de  $W_S$  est transitive sur les chambres de  $\mathcal{C}_S$ , il existe une isométrie  $\sigma \in W_S$  telle que  $\sigma\psi(K_{S'})$  rencontre  $K_S$ , donc  $\sigma\psi$  est effective d'après la Proposition 8. D'après la version forte du théorème de Torelli, on conclut que  $\sigma\psi$  provient d'un isomorphisme  $u: S \rightarrow S'$ . □

**Remarque 15.** Revenons aux questions posées plus haut concernant l'espace de modules  $\mathfrak{M}$  et l'application globale des périodes  $\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$ .

- (1) Si  $(S, \phi), (S', \phi') \in \mathfrak{M}$  sont deux surfaces K3 marquées ayant la même période, alors l'isométrie  $\psi := \phi^{-1} \circ \phi': H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est une isométrie de Hodge, puisque

$$\phi(H^{2,0}(S)) = \mathcal{P}((S, \phi)) = \mathcal{P}((S', \phi')) = \phi'(H^{2,0}(S'))$$

entraîne que  $\psi(H^{2,0}(S')) = H^{2,0}(S)$ , ce qui caractérise les isométries de Hodge ici<sup>57</sup>. D'après la version faible du théorème de Torelli, les surfaces  $S$  et  $S'$  sont donc isomorphes. Ainsi, l'application des périodes induite au quotient par le groupe  $\Gamma = \text{Aut}(\Lambda)$

$$\overline{\mathcal{P}}: \mathfrak{M}/\Gamma \rightarrow \mathcal{D}/\Gamma$$

est injective.

- (2) Le même argument (en utilisant la démonstration de la version faible du théorème de Torelli) nous dit un peu plus : si  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  ont la même période, alors il existe un unique<sup>58</sup>  $\sigma \in W_S$  tel que  $\pm\sigma\phi^{-1}\phi' = u^*$  pour un certain isomorphisme  $u: S \rightarrow S'$ . Ainsi, la fibre de  $\mathcal{P}$  au-dessus de la période de  $(S, \phi)$  est l'ensemble des surfaces marquées  $(S, \pm\sigma\phi)$  pour  $\sigma \in W_S$ .
- (3) La variété  $\mathfrak{M}$  a deux composantes connexes qui sont échangées par l'involution  $(S, \phi) \mapsto (S, -\phi)$  (voir [8, §1]). L'idée est que ces deux surfaces marquées ne peuvent jamais être identifiées, puisque  $-\text{id}: H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  n'est pas effective.
- (4) L'application des périodes  $\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$  est surjective pour les surfaces K3 kähleriennes (je veux dire ici que l'on considère le sous-espace de  $\mathfrak{M}$  paramétrant les surfaces K3 kähleriennes, voir [8, Théorème 1] : la démonstration utilise le théorème de Torelli global).
- (5) Le théorème de Siu–Todorov<sup>59</sup> [28, 29] montre que toute surface K3 est en fait automatiquement kählerienne. La démonstration utilise essentiellement les mêmes ingrédients que ceux déjà utilisés ou évoqués, mais il aurait été illogique d'énoncer

---

56. Si  $x \in \mathcal{C}_S$ , on a  $x \cdot \delta \neq 0$  pour tout  $\delta \in \Delta$ . Alors puisque  $\psi$  est une isométrie, on a  $\psi(x) \cdot \psi(\delta) \neq 0$ , mais aussi  $\psi(\delta)^2 = -2$ . On en déduit que  $\pm\psi(\delta)$  est effective, donc  $\psi(x)$  évite bien tous les murs de  $\mathcal{C}_S$ .

57. on sait déjà que  $\psi$  est une isométrie.

58. car l'action du groupe de Weyl est simplement transitive

59. première démonstration par Todorov, incomplète, autre démonstration ensuite par Siu.

ce résultat plus tôt en raison de la stratégie de sa démonstration, dont voici l'idée très générale (voir [9]). Si  $(X, \sigma)$  est une surface K3 marquée, d'après la surjectivité de l'application des périodes pour les surfaces K3 kähleriennes rappelées ci-dessus, il existe une surface K3 kählerienne marquée  $(S, \sigma')$  qui a la même période. Pour montrer que  $X$  est isomorphe à  $S$ , on « généralise et adapte » les arguments utilisés, en particulier le *Main Lemma* de convergence Burns–Rapoport : il s'agit de déformer  $(S, \sigma')$  sur  $(X, \sigma)$  de sorte à obtenir que  $X$  soit kählerienne.

## 6. ESQUISSE DE L'APPROCHE DE VERBITSKY

Tout part de la reformulation suivante des résultats obtenus jusqu'à maintenant, en incluant la Remarque 15 :

**Proposition 10.** *L'espace de modules  $\mathfrak{M}$  a deux composantes connexes échangées par  $(S, \phi) \mapsto (S, -\phi)$  et l'application des périodes  $\mathcal{P} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$  est génériquement injective sur chacune de ces deux composantes.*

*Démonstration.* Il reste seulement à expliquer le terme *générique*. On a vu que la fibre de  $\mathcal{P}$  au-dessus de la période de  $(S, \phi)$  est l'ensemble des surfaces marquées  $(S, \pm\sigma\phi)$  avec  $\sigma \in W_S$ . En particulier, si le groupe de Weyl est trivial, la fibre consiste exactement en les deux surfaces marquées  $(S, \phi)$  et  $(S, -\phi)$ , et le groupe de Weyl est trivial dès que l'ensemble  $\Delta$  des classes effectives de carré  $-2$  est vide, ce qui est bien le cas lorsque  $NS(S) = 0$ . Cette situation est générique au sens suivant. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\alpha \in \Lambda \setminus \{0\}} \alpha^\perp \cap \mathcal{D}.$$

C'est une réunion dénombrable d'hyperplans de  $\mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{P}((S, \phi)) \in \mathcal{H}$ , il existe  $\alpha \in \Lambda \setminus \{0\}$  tel que  $\phi(\omega_S) \cdot \alpha = 0$ , donc le point  $x := \phi^{-1}(\alpha) \in H^2(S, \mathbb{Z})$  est non nul et tel que  $\omega_S \cdot x = 0$ . Ainsi on a trouvé un élément non nul  $x \in H^{1,1}(S) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) = NS(S)$ . Réciproquement, si  $NS(S) \neq 0$ , un tel élément  $x$  fournit  $\alpha = \phi(x) \in \Lambda \setminus \{0\}$  tel que  $\phi(\omega_S) \in \alpha^\perp$ . Il reste à voir que  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$  est dense dans  $\mathcal{D}$ . Un argument rapide consiste à invoquer le lemme de Baire : l'espace  $\mathcal{D}$  est localement compact et chacun des ouverts  $\mathcal{D} \setminus (\alpha^\perp \cap \mathcal{D})$  est dense, donc leur union dénombrable  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$  est un sous-ensemble dense de  $\mathcal{D}$ . On peut aussi donner un argument à la main comme suit. Si l'on prend un point  $x \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$ , regardons un germe de courbe  $\eta$  passant par  $x$ , suffisamment générique. Alors  $\eta$  coupe  $\alpha^\perp$  en un nombre fini de points, et puisque  $\Lambda$  est dénombrable,  $\mathcal{H} \cap \eta$  est dénombrable, donc le complémentaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\eta$  est dense dans  $\eta$ . Ainsi,  $x$  peut être approché aussi près que l'on veut par des éléments de  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{H}$ , qui est donc dense. Nous en concluons que les périodes des surfaces K3 ayant  $NS(S) = 0$  sont denses dans  $\mathcal{D}$ . En particulier, une surfaces K3 *générale* est non-algébrique. Ici, le terme *général* signifie précisément « en-dehors d'une réunion dénombrable d'hyperplans », à ne pas confondre avec *générique*, même si nous faisons en fait cet abus ici.  $\square$

L'idée de la formulation de Verbitsky est de considérer cet énoncé comme équivalent au théorème de Torelli global, puisqu'il en implique la version suivante (que l'on appellera la *version forte générique*) :

**Proposition 11.** *Soient  $S, S'$  deux surfaces K3 génériques<sup>60</sup>. Si  $\psi : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$  est une isométrie de Hodge, alors il existe un biholomorphisme  $u : S \rightarrow S'$  tel que  $u^* = \pm\psi$ .*

*Démonstration.* Montrons pourquoi c'est un corollaire de la Proposition 10. Choisissons un marquage  $(S, \phi)$  et marquons  $S'$  par  $\phi' = \phi \circ \psi : H^2(S', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} \Lambda$ . On a donc par construction  $\mathcal{P}((S, \phi)) = \mathcal{P}((S', \phi'))$ . D'après la condition de généralité, d'après la Proposition 10 les paires  $(S, \phi)$  et  $(S', \pm\phi')$  sont isomorphes (le choix du signe vient

60. je devrais dire *générales*

du choix de la composante connexe : nous ne savons pas si  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  sont dans la même composante connexe de  $\mathfrak{M}$ ). Il existe donc  $u: S \rightarrow S'$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H^2(S', \mathbb{Z}) & \xrightarrow{u^*} & H^2(S, \mathbb{Z}) \\ & \searrow \pm\phi' & \swarrow \phi \\ & & \Lambda \end{array}$$

soit  $\pm\phi' = \phi \circ u^* = \pm\phi \circ \psi$ , donc  $u^* = \pm\psi$ .  $\square$

La condition de généralité est facile à éviter en travaillant un peu plus, et on va donc préférer s'intéresser à la version faible du théorème de Torelli :

**Proposition 12.** *Deux surfaces K3,  $S$  et  $S'$ , sont isomorphes si et seulement s'il existe une isométrie de Hodge  $\psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$ .*

*Démonstration.* Montrons pourquoi c'est un corollaire de la Proposition 10. Choisissons un marquage  $(S, \phi)$  et marquons  $S'$  par  $\phi' = \phi \circ \psi: H^2(S', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi} H^2(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\phi} \Lambda$ . On a donc par construction  $\mathcal{P}((S, \phi)) = \mathcal{P}((S', \phi'))$ . Quitte à prendre  $-\psi$ , et donc  $-\phi'$ , on peut supposer d'après la proposition 10 que  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  sont dans la même composante connexe  $\mathfrak{M}^0$  de  $\mathfrak{M}$ . Si  $(S, \phi) = (S', \phi')$ , alors  $S$  et  $S'$  sont bien isomorphes. Le point subtil est de voir que sinon  $(S, \phi)$  et  $(S', \phi')$  sont deux points inséparables de  $\mathfrak{M}^0$ . Pour ceci, il faut savoir que l'injectivité générique de  $\mathcal{P}$  est en fait une injectivité en-dehors d'une réunion dénombrable d'hyperplans, ce que nous avons vu dans la démonstration de la Proposition 10. L'énoncé d'injectivité générique doit être compris en ce sens. On obtient alors facilement la non séparabilité des points de non injectivité, voir l'exercice 12. D'après Huybrechts [18, Theorem 4.3], cela implique que  $S$  et  $S'$  sont birationnelles (l'argument n'est pas élémentaire), donc  $S$  et  $S'$  sont deux surfaces K3 isomorphes.  $\square$

### Exercice 12.

- (1) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue injective sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Montrer que  $f$  est injective sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Si l'on remplace  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  par  $\mathbb{Q}$ , montrer par un contre-exemple que l'assertion devient fausse.
- (3) Soit  $f: X \rightarrow Y$  une application continue entre variétés topologiques connexes. On ne suppose pas que  $X$  est séparé. On suppose qu'il existe un sous-ensemble  $\Omega \subset X$ , dont le complémentaire est une réunion dénombrable d'hypersurfaces, tel que  $f$  est injective sur  $\Omega$ . On suppose aussi que  $f$  est un isomorphisme local, et en conséquence  $Y$  n'est pas réunion dénombrable d'hypersurfaces. Montrer que si  $x, y \in X$  sont tels que  $f(x) = f(y)$ , alors  $x$  et  $y$  sont des points non séparés de  $X$ .

### Solution 12.

- (1) Supposons qu'il existe deux réels  $a < b$  tels que  $f(a) = f(b)$ . Par l'injectivité générique,  $f$  est non constante sur l'intervalle  $[a, b]$ , donc il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) \neq f(a) = f(b)$ . Par continuité (théorème des valeurs intermédiaires), tout  $y$  compris entre  $f(a) = f(b)$  et  $f(c)$  a un antécédent  $x \in ]a, c[$  et un autre  $x' \in ]c, b[$ . Puisque  $f$  est injective sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , l'un des deux est rationnel, notons-le  $q_y$ . Cela produit une application (ensembliste)  $g: ]a, c[ \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $y \mapsto q_y$ . On a  $f(g(y)) = y$  donc  $g$  est injective. C'est cependant impossible puisque  $]a, c[$  n'est pas dénombrable tandis que  $\mathbb{Q}$  l'est.
- (2) La fonction  $f(x) = \sin(x)$  convient : si  $\sin(x) = \sin(y)$ , alors  $x - y \equiv 0 \pmod{\pi}$ , donc puisque  $\pi$  est irrationnel,  $x$  ou  $y$  est irrationnel. Ainsi,  $f$  est injective sur  $\mathbb{Q}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}$ .

- (3) Si  $x$  et  $y$  sont séparés, il existe un voisinage  $U$  de  $x$ , un voisinage  $V$  de  $y$  et un voisinage  $W$  de  $f(x) = f(y)$  tels que  $U \cap V = \emptyset$  et  $f$  induit un isomorphisme de  $U$  sur  $W$  et de  $V$  sur  $W$ . Tout point  $z \in W$  a un antécédent  $a \in U$  et un antécédent  $b \in V$ . Puisque  $f$  est injective sur  $\Omega$ , l'un des points  $a$  ou  $b$  n'est pas dans  $\Omega$ . On en déduit une application ensembliste  $g: W \rightarrow X \setminus \Omega$  telle que  $f(g(z)) = z$ , donc  $g$  est injective. Mieux, puisque  $f$  est un isomorphisme local,  $g$  est continue. Mais c'est impossible car  $X \setminus \Omega$  est réunion dénombrable d'hypersurfaces tandis que  $W$  ne l'est pas.

Pour finir notre ré-interprétation du théorème de Torelli, il reste à exprimer autrement le fait que l'espace de modules  $\mathfrak{M}$  a deux composantes connexes. Nous le faisons en termes de groupes de monodromie, comme suit. Soit  $f: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  une famille de déformations d'une surface K3, avec  $O \in \Delta$  et un isomorphisme donné  $\mathcal{X}_0 \cong S$ . Le faisceau  $\mathcal{F} := R^2 f_* \underline{\mathbb{Z}}$  étant localement constant, il lui correspond une *représentation de monodromie*

$$\pi_1(\Delta, 0) \longrightarrow \mathrm{O}(H^2(S, \mathbb{Z}))$$

construite ainsi (voir Appendice A). Prenons un lacet  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Delta$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ . On peut subdiviser ce lacet en chemins  $\gamma([x_i, x_{i+1}])$  tels que les segments  $[x_i, x_{i+1}]$  sont contenus dans des ouverts contractiles  $U_i$  de  $\Delta$  sur lesquels le faisceau  $\mathcal{F}$  est constant. Les identifications canoniques d'évaluation induisent des isomorphismes

$$\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}_{x_1} \cong \dots \cong \mathcal{F}_{x_i} \cong \dots \cong \mathcal{F}_0$$

qui ne dépendent que de la classe d'homotopie du lacet. En utilisant l'isomorphisme  $\mathcal{X}_0 \cong S$  (qui fait partie de la donnée de la déformation) on en déduit une isométrie<sup>61</sup>

$$\gamma_* : H^2(S, \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathcal{X}_{x_1}, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H^2(\mathcal{X}_{x_i}, \mathbb{Z}) \cong \dots \cong H^2(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$$

Nous appellerons *monodromie* (certains auteurs disent *transport parallèle*) tout élément de  $\mathrm{O}(H^2(S, \mathbb{Z}))$  de la forme  $\gamma_*$ . Il ne suffit bien sûr pas ici de considérer l'espace universel de déformation de  $S$ , vu qu'il est simplement connexe. On note  $\mathrm{Mon}(S)$  le sous-groupe de  $\mathrm{O}(H^2(S, \mathbb{Z}))$  engendré par les monodromies, pour toutes les familles de déformations possibles. La structure de ce groupe engendré mérite qu'on s'y attarde.

Tout d'abord, dans la construction d'une monodromie, d'après le théorème d'Ehresmann il existe un difféomorphisme  $T^i: \mathcal{X}_{|U_i} \rightarrow S \times U_i$  au-dessus de chaque ouvert contractile  $U_i$ , de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{X}_{x_i}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{can.}} & H^2(\mathcal{X}_{x_{i+1}}, \mathbb{Z}) \\ \uparrow (T^i_{x_i})^* & & \uparrow (T^i_{x_{i+1}})^* \\ H^2(S, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & H^2(S, \mathbb{Z}) \end{array}$$

(le morphisme  $\mathrm{id}$  sur la ligne du bas vient du fait que pour la famille triviale  $S \times U_i \rightarrow U_i$ , l'action de la restriction  $\gamma_i$  de  $\gamma$  à l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  est canonique, donc c'est juste l'identité puisque le faisceau est constant). Il en résulte que tous les isomorphismes canoniques en jeu dans la construction de  $\gamma_*$  s'identifient l'action en cohomologie de composées de difféomorphismes de  $S$ . Donc  $\mathrm{Mon}(S)$  est contenu dans l'image du morphisme naturel  $\mathrm{Diff}(S) \rightarrow \mathrm{O}(H^2(S, \mathbb{Z}))$ .

Ensuite, il faut observer que la composée de monodromies n'est en général pas une monodromie. En effet, partons de deux familles de déformations  $\mathcal{X} \rightarrow (B, b)$  avec un isomorphisme  $\varphi: \mathcal{X}_b \rightarrow S$  et  $\mathcal{X}' \rightarrow (B', b')$  avec un isomorphisme  $\varphi': \mathcal{X}'_{b'} \rightarrow S$ . Il leur

61. pour la forme d'intersection, pas une isométrie de Hodge



qui envoie  $(S, \phi)$  sur  $(\mathcal{X}_t, \phi(\gamma_t)_*^{-1})$ . Lorsque  $t$  varie de 0 à 1, cela fournit un chemin continu dans  $\mathfrak{M}^0$  qui relie  $(S, \phi)$  à  $(S, \phi \circ \gamma_*^{-1})$ , ces points sont donc dans la même composante connexe. Par contre,  $-\text{id}$  envoie  $(S, \phi)$  sur  $(S, -\phi)$  qui vit dans l'autre composante connexe, donc  $-\text{id}$  est un élément non nul du quotient  $O(H^2(S, \mathbb{Z}))/\text{Mon}(S)$ . Puisque l'on sait que  $\mathfrak{M}$  n'a que deux composantes connexes, on n'attend pas d'autre élément dans ce quotient (mais ce n'est pas une preuve). En fait, on peut montrer par des arguments de théorie des réseaux, qui fournissent une description explicite du groupe de monodromies, que l'on a bien  $O(H^2(S, \mathbb{Z}))/\text{Mon}(S) = \{\pm \text{id}\}$  (voir [17, Proposition 10.5.5], on montre que les réflexions par les classes  $(-2)$  sont des monodromies, ce qui est cohérent avec la description des fibres de l'application des périodes discutée dans la Remarque 15).

Réciproquement, en partant du fait que  $O(H^2(S, \mathbb{Z}))/\text{Mon}(S) = \{\pm \text{id}\}$  (qui est une information indépendante du théorème de Torelli), le même raisonnement permet de conclure que  $\mathfrak{M}$  a *au plus* deux composantes connexes. Nous arrivons au bout de la reformulation modulaire du théorème de Torelli global, avec l'énoncé suivant qui est équivalent au théorème de Torelli global classique tel qu'énoncé dans la Proposition 12 :

#### Théorème 4.

- (1) *L'application des périodes  $\mathcal{P}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{D}$  est un isomorphisme local;*
- (2)  *$\mathcal{P}$  est génériquement injectif sur chaque composante connexe de  $\mathfrak{M}$ ;*
- (3) *si  $S$  est une surface K3, on a  $O(H^2(S, \mathbb{Z}))/\text{Mon}(S) = \{\pm \text{id}\}$ .*

La généricité est toujours ici à prendre au sens du complémentaire d'une réunion dénombrable d'hypersurfaces. On peut démontrer le théorème 4 par une méthode complètement différente due à Verbitsky, mais c'est ici que ce cours s'achève, je renvoie donc à [19, 17].

#### ANNEXE A. SYSTÈMES LOCAUX

Soit  $X$  un espace topologique aux propriétés suffisamment raisonnable (une variété topologique devrait faire l'affaire). Soit  $A$  un groupe abélien (par exemple), muni de la topologie discrète (c'est le point essentiel). Le *faisceau constant de fibre  $A$*  est le faisceau  $\underline{A}$  sur  $X$  défini ainsi : pour tout ouvert  $U$  de  $X$ , l'ensemble des sections  $\underline{A}(U)$  est l'ensemble des fonctions continues de  $U$  dans  $A$ . Lorsque  $U$  est connexe, ces fonctions sont nécessairement constantes. Un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  est dit *localement constant* (appelé aussi *système local*) si en tout point  $x \in X$  il existe un voisinage ouvert  $U_x$  tel que  $\mathcal{F}|_{U_x}$  est un faisceau constant : il existe donc un groupe abélien  $A_x$  (il dépend en général de  $x$ ) tel que  $\mathcal{F}|_{U_x} \cong \underline{A_x}$  sur  $U_x$ .

**Proposition 13.** *Si  $X$  est simplement connexe, tout faisceau localement constant est constant.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}$  ce faisceau, disons de groupes abéliens. Fixons un point de référence  $x_0 \in X$  et notons  $A := \mathcal{F}_{x_0}$  le germe en  $x_0$ . Nous allons construire un isomorphisme de faisceaux  $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \underline{A}$ . Si  $x \in X$  est un point quelconque, choisisons un chemin  $\gamma := [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = x$ . On peut subdiviser ce chemin en un nombre fini<sup>62</sup> chemins  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  tels que les segments  $[x_i, x_{i+1}] = [\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$  sont contenus dans des ouverts  $U_i$  de  $X$  sur lesquels le faisceau  $\mathcal{F}$  est constant. Les isomorphismes naturels d'évaluation induisent alors des isomorphismes  $\mathcal{F}_{x_i} \cong \mathcal{F}(U_i) \cong \mathcal{F}_{x_{i+1}}$  qui, composés, donnent un isomorphisme  $\rho_{x, \gamma}: A = \mathcal{F}_{x_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$ . Montrons que cet isomorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin  $\gamma$ . Si  $\gamma'$  est un chemin homotope à  $\gamma$ , soit  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une homotopie entre eux, avec  $H(0, t) = \gamma(t)$  et  $H(1, t) = \gamma'(t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Quitte à la décomposer en un nombre fini d'homotopies, on peut supposer qu'il existe un nombre

62. on aura supposé  $X$  localement compact

fini d'ouvert  $U_i$  sur lesquels  $\mathcal{F}$  est constant et une subdivision  $[t_i, t_{i+1}]$  de l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $H(u, t) \in U_i$  pour tout  $u \in [0, 1]$  et tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . En suivant les deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  on obtient des séries d'isomorphismes naturels et de diagrammes commutatifs par la constance locale du faisceau, que l'on peut visualiser ainsi :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{F}_{\gamma(t_1)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\gamma(t_2)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\gamma(t_n)} & & \\
 & \nearrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & \searrow \sim & \\
 \mathcal{F}_{x_0} & & & & & & & \mathcal{F}_x \\
 & \searrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & \nearrow \sim & \\
 & \mathcal{F}_{\gamma'(t_1)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\gamma'(t_2)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}_{\gamma'(t_n)} & & 
 \end{array}$$

La commutativité de ce diagramme montre que l'isomorphisme  $\rho_{x,\gamma} : A = \mathcal{F}_{x_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$  en dépend que de la classe d'homotopie de  $\gamma$ . Mais nous avons supposé que  $X$  est simplement connexe, donc en fait cet isomorphisme ne dépend pas de  $\gamma$  : en effet, si  $\gamma'$  est un autre chemin de  $x_0$  à  $x$ , non homotope à  $\gamma$ , la composée  $\gamma'^{-1} \circ \gamma$  est un lacet en  $x_0$ , qui fournit une suite d'isomorphismes :

$$\rho_{x_0, \gamma'^{-1} \circ \gamma} : \mathcal{F}_{x_0} \xrightarrow{\rho_{x,\gamma}} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\rho_{x,\gamma'}^{-1}} \mathcal{F}_{x_0}$$

Mais le lacet  $\gamma'^{-1} \circ \gamma$  est homotope au lacet constant, donc cette composée d'isomorphismes est l'identité d'après la discussion précédente. Donc  $\rho_{x,\gamma} = \rho_{x,\gamma'}$ . Nous avons donc pour tout  $x \in X$  un isomorphisme naturel  $\rho_x : A = \mathcal{F}_{x_0} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$  indépendant du chemin. Nous construisons alors un isomorphisme de faisceaux entre  $\mathcal{F}$  et le faisceau constant  $\underline{A}$ . Sur un ouvert  $U$ , on définit

$$\mathcal{F}(U) \rightarrow \underline{A}(U) = \{U \rightarrow A \text{ continue}\}, \quad s \mapsto (x \mapsto \rho_x^{-1}s(x))$$

où la section  $s$  est vue comme une application  $s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ .  $\square$

Lorsque  $X$  n'est plus simplement connexe, les mêmes constructions permettent d'associer à tout faisceau localement constant  $\mathcal{F}$  sur  $X$  sa *représentation de monodromie*

$$\pi_1(X, 0) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{F}_0)$$

Rappelons brièvement cette construction. Si l'on prend un lacet  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$ , on peut subdiviser ce lacet en chemins  $\gamma([x_i, x_{i+1}])$  tels que les segments  $[x_i, x_{i+1}]$  sont contenus dans des ouverts contractiles  $U_i$  de  $X$  sur lesquels le faisceau  $\mathcal{F}$  est constant, d'après la proposition précédente. Les identifications canoniques d'évaluation induisent des isomorphismes

$$\mathcal{F}_0 \cong \mathcal{F}_{x_1} \cong \dots \cong \mathcal{F}_{x_i} \cong \dots \cong \mathcal{F}_0$$

qui ne dépendent que de la classe d'homotopie du lacet.

## ANNEXE B. DOMAINE DES PÉRIODES D'UN RÉSEAU NON DÉGÉNÉRÉ

Soit  $\Lambda$  un réseau, de forme bilinéaire noée  $(-, -)$ . Sur l'espace vectoriel  $\Lambda_{\mathbb{R}}$ , la forme  $(-, -)_{\mathbb{R}}$  a pour signature  $(n_+, n_-)$  et  $\dim \Lambda_{\mathbb{R}} = n_+ + n_-$ . Dans une base  $\{e_i\}_i$  de  $\Lambda_{\mathbb{R}}$  bien choisie, si  $x = \sum x_i e_i$ , on a

$$\begin{aligned}
 (x, x) &= \sum_{i=1}^{n_+} x_i^2 - \sum_{i=n_++1}^{\dim \Lambda} x_i^2 \\
 (e_i, e_i) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq n_+ \\ -1 & \text{sinon} \end{cases} \\
 (e_i, e_j) &= 0 \text{ si } i \neq j
 \end{aligned}$$

Dans  $\Lambda_{\mathbb{C}}$ , l'équation  $(x, x) = 0$  définit une quadrique non-singulière que l'on regarde dans  $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$ . L'inéquation  $(x, \bar{x}) > 0$ ,  $x \in \Lambda_{\mathbb{C}}$ , est bien définie dans  $\mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}})$  car si  $y = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , alors  $(y, \bar{y}) = |\lambda|^2(x, \bar{x}) > 0$ . En coordonnées,

$$(x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n_+} |x_i|^2 - \sum_{i=n_++1}^{\dim \Lambda} |x_i|^2$$

Cela coupe un ouvert (pour la topologie usuelle, pas la topologie de Zariski) dans la quadrique, que l'on note :

$$\mathcal{D}_{\Lambda} := \{x \in \mathbb{P}(\Lambda_{\mathbb{C}}) \mid (x, x) = 0 \text{ et } (x, \bar{x}) > 0\}.$$

Faisons quelques exemples et remarques triviales :

- Le domaine  $\mathcal{D}_{\Lambda}$  n'a jamais de points réels. En effet, si  $x \in \Lambda_{\mathbb{R}}$ , alors  $(x, x) = (x, \bar{x})$  ne peut être simultanément nul et strictement positif.
- Si  $\Lambda$  est défini positif, alors  $(x, \bar{x}) = \sum |x_i|^2 > 0$  est toujours vrai si  $x \neq 0$  donc  $\mathcal{D}_{\Lambda}$  est la quadrique projective complète  $(x, x) = \sum x_i^2 = 0$ .
- Si  $\Lambda$  est défini négatif,  $(x, \bar{x}) = -\sum |x_i|^2 > 0$  est impossible donc  $\mathcal{D}_{\Lambda} = \emptyset$ .
- Si  $\Lambda$  a pour signature  $(1, n_-)$  (donc  $n_+ = 1$ , le réseau est hyperbolique), alors  $\mathcal{D}_{\Lambda} = \emptyset$  en raison de l'inégalité triangulaire. En effet, si  $x \in \mathcal{D}_{\Lambda}$  on a

$$x_1^2 = \sum_{i=2}^{\dim \Lambda} x_i^2$$

donc

$$|x_1|^2 \leq \sum_{i=2}^{\dim \Lambda} |x_i|^2$$

autrement dit

$$(x, \bar{x}) = |x_1|^2 - \sum_{i=2}^{\dim \Lambda} |x_i|^2 \leq 0$$

- Si  $\Lambda$  a pour signature  $(n_+, 1)$  avec  $n_+ \geq 2$ , faisons un exemple avec  $n_+ = 2$ . Les relations sont :

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \\ |x_1|^2 + |x_2|^2 - |x_3|^2 &> 0 \end{aligned}$$

De  $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$  on déduit  $|x_3|^2 \leq |x_1|^2 + |x_2|^2$  avec égalité si et seulement si  $x_2^2 = \lambda x_1^2$  pour un réel  $\lambda \geq 0$ , donc  $\mathcal{D}_{\Lambda}$  est la quadrique privée des points  $(x_1, x_2, x_3)$  tels que  $x_2^2 = \lambda x_1^2$  avec  $\lambda \geq 0$ .

Ce que signifient ces exemples, c'est que c'est intéressant (c'est-à-dire non trivial) seulement si  $n_+ \geq 2$ . On voit dans le texte principal une description en termes de 2-plans positifs orientés, qui justement n'a de sens que si  $n_+ \geq 2$  : si  $x \in \mathcal{D}$ , on écrit  $x = u + iv$  ses parties réelles et imaginaires, et  $(u, v)$  forme un 2-plan sur lequel la forme quadratique est définie positive. On vérifie de plus que  $u$  et  $v$  ne peuvent pas être colinéaires, sinon ils sont tous deux nuls (impossible vu que  $x$  est un point de l'espace projectif). On retrouve bien le fait que si  $n_+ \geq 1$ , alors  $\mathcal{D}$  est vide, car un tel 2-plan défini positif ne saurait alors exister.

## RÉFÉRENCES

- [1] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes. Séminaire Palaiseau, Octobre 1981 - Janvier 1982.* Astérisque, 126. Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique. Paris : Société Mathématique de France. 193 p., 1985.

- [2] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.
- [3] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Société Mathématique de France, Paris, 1978. Astérisque, No. 54.
- [4] Arnaud Beauville. Application aux espaces de modules. *Astérisque*, (126) :141–152, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [5] Arnaud Beauville. Le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer. *Astérisque*, (126) :99–110, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [6] Arnaud Beauville. Le théorème de Torelli pour les surfaces  $K3$  : fin de la démonstration. *Astérisque*, (126) :111–121, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [7] Arnaud Beauville. Préliminaires sur les périodes des surfaces  $K3$ . *Astérisque*, (126) :91–97, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [8] Arnaud Beauville. Surjectivité de l’application des périodes. *Astérisque*, (126) :123–128, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [9] Arnaud Beauville. Toute surface  $K3$  est kählérienne. *Astérisque*, (126) :137–140, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [10] Jean-Pierre Bourguignon. Introduction à l’usage de la solution des conjectures de Calabi. *Astérisque*, (126) :19–28, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [11] Dan Burns, Jr. and Michael Rapoport. On the Torelli problem for kählerian  $K - 3$  surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 8(2) :235–273, 1975.
- [12] Michel Demazure. La place des surfaces  $K3$  dans la classification des surfaces. *Astérisque*, (126) :29–38, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [13] Paul Gauduchon. Structure de Hodge d’une surface complexe. *Astérisque*, (126) :39–40, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [14] Paul Gauduchon. Théorème de Torelli local pour les surfaces  $K3$ . *Astérisque*, (126) :59–77, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [15] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [16] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [17] Daniel Huybrechts. Lectures on  $K3$  surfaces.
- [18] Daniel Huybrechts. Compact hyper-Kähler manifolds : basic results. *Invent. Math.*, 135(1) :63–113, 1999.
- [19] Daniel Huybrechts. A global Torelli theorem for hyperkähler manifolds [after M. Verbitsky]. *Astérisque*, (348) :Exp. No. 1040, x, 375–403, 2012. Séminaire Bourbaki : Vol. 2010/2011. Exposés 1027–1042.
- [20] Joseph Le Potier. Simple connexité des surfaces  $K3$ . *Astérisque*, (126) :79–89, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [21] Eduard Looijenga and Chris Peters. Torelli theorems for Kähler  $K3$  surfaces. *Compositio Math.*, 42(2) :145–186, 1980/81.
- [22] Jean-Yves Mérindol. Propriétés élémentaires des surfaces  $K3$ . *Astérisque*, (126) :45–57, 1985. Geometry of  $K3$  surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982).
- [23] D. R. Morrison. On  $K3$  surfaces with large Picard number. *Invent. Math.*, 75(1) :105–121, 1984.
- [24] I. I. Pjateckiĭ-Šapiro and I. R. Šafarevič. Torelli’s theorem for algebraic surfaces of type  $K3$ . *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35 :530–572, 1971.
- [25] B. Saint-Donat. Projective models of  $K - 3$  surfaces. *Amer. J. Math.*, 96 :602–639, 1974.
- [26] Alessandra Sarti. Transcendental lattices of some  $K3$ -surfaces. *Math. Nachr.*, 281(7) :1031–1046, 2008.
- [27] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1994. Varieties in projective space, Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid.
- [28] Yum Tong Siu. A simple proof of the surjectivity of the period map of  $K3$  surfaces. *Manuscripta Math.*, 35(3) :311–321, 1981.

- [29] Andrei N. Todorov. Applications of the Kähler-Einstein-Calabi-Yau metric to moduli of  $K3$  surfaces. *Invent. Math.*, 61(3) :251–265, 1980.
- [30] Claire Voisin. *Symétrie miroir*, volume 2 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 1996.
- [31] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.