J. reine angew. Math. **620** (2008), 185—193
DOI 10.1515/CRELLE.2008.053

Journal für die reine und
angewandte Mathematik


# Quelques plats pour la métrique de Hofer

Par *Pierre Py* à Lyon

**Abstract.** We show, by an elementary and explicit construction, that the group of Hamiltonian diffeomorphisms of certain symplectic manifolds, endowed with Hofer's metric, contains subgroups quasi-isometric to Euclidean spaces of arbitrary dimension.

## 1. Introduction

Le but de ce texte est de prouver que le groupe des *difféomorphismes hamiltoniens* de certaines variétés symplectiques, muni de la *distance de Hofer*, contient des sous-groupes quasi-isométriques à des espaces euclidiens de dimension arbitraire. Avant d'aller plus loin, rappelons quelques définitions.

Considérons une variété symplectique $(M,\omega)$ (connexe, éventuellement non compacte). Soit $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact. Nous noterons souvent $H_t(x) = H(x,t)$. Le champ de vecteurs dépendant du temps $X_{H_t}$ défini par la relation $\iota_{X_{H_t}}\omega = -dH_t$ s'intègre pour donner naissance à une isotopie $(f_t)$ issue de l'identité. Le difféomorphisme $f_1 : M \to M$ est le *difféomorphisme hamiltonien* engendré par la fonction $H$. L'ensemble des difféomorphismes ainsi obtenus forme un groupe, que l'on notera $\mathcal{G}$, qui est contenu dans le groupe des difféomorphismes symplectiques de $M$.

En 1990, Hofer [10] a découvert que l'on pouvait munir le groupe $\mathcal{G}$ d'une remarquable distance, notée $\rho$, qui est biinvariante, c'est-à-dire, invariante à la fois par les translations à droite et à gauche de $\mathcal{G}$. Rappelons-en la définition. L'oscillation d'une fonction à support compact $F : M \to \mathbb{R}$, notée $\mathrm{osc}(F)$, est la quantité

$$\max(F) - \min(F).$$

Si $(H_t)_{0 \leqq t \leqq 1}$ est un hamiltonien dépendant du temps, nous pouvons définir la longueur de l'isotopie hamiltonienne $\{f_t\}$ engendrée par $(H_t)$ par :

$$\ell(\{f_t\}) = \int_0^1 \mathrm{osc}(H_t)\, dt.$$

L'*énergie* d'un élément $f \in \mathcal{G}$ est la quantité

$$\|f\| := \inf \ell(\{f_t\})$$

où l'infimum porte sur toutes les isotopies hamiltoniennes dont le temps 1 est $f$. On définit alors $\rho(f,g) = \|fg^{-1}\|$. Notons que le point crucial pour s'assurer que $\rho$ est une distance est d'établir qu'un difféomorphisme $f \in \mathcal{G} \backslash \{\mathbb{1}\}$ a une énergie strictement positive. Cela a été prouvé par Hofer [10] dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$, par Polterovich [19] pour les variétés rationnelles et en toute généralité par Lalonde et McDuff [13] (voir aussi [4], [17], [22], [23] pour d'autres preuves, dans différents cas particuliers). Nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant. Nous renvoyons le lecteur aux livres [12], [21] pour une introduction plus détaillée à ce sujet.

Bialy et Polterovich [3] ont prouvé le résultat suivant. Lorsque $M = \mathbb{R}^{2n}$, muni de sa structure symplectique standard, il existe un voisinage $U$ de l'identité dans $\mathcal{G}$ (pour la topologie $C^1$) et un voisinage $V$ de l'origine dans l'espace vectoriel des fonctions $C^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^n$ (pour la topologie $C^2$) tels que $(U,\rho)$ et $(V,d_{\mathrm{osc}})$ soient isométriques (où $d_{\mathrm{osc}}(F,G) = \mathrm{osc}(F-G)$). On peut interpréter ce fait en disant que $\mathcal{G}$ est *localement plat*. Ce résultat a depuis été généralisé à d'autres variétés [14], [18].

Par ailleurs, on sait maintenant pour une large classe de variétés symplectiques que l'espace métrique $(\mathcal{G},\rho)$ est de diamètre infini (voir [21] pour quelques résultats et références). A l'opposé du résultat de Bialy et Polterovich précédemment cité, on peut donc s'intéresser, lorsque le diamètre de $\mathcal{G}$ est infini, à la géométrie *à grande échelle* de $(\mathcal{G},\rho)$. Dans cet esprit nous montrons le

**Théorème 1.** *Supposons qu'il existe une sous-variété lagrangienne fermée $L$ plongée dans $M$, vérifiant les deux conditions suivantes :*

- *L'application induite $\pi_1(L) \to \pi_1(M)$ entre les groupes fondamentaux de $L$ et $M$ est injective.*

- *Il existe sur $L$ une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.*

*Alors, pour tout entier naturel $N$, il existe un morphisme $\phi : \mathbb{Z}^N \to \mathcal{G}$ ayant la propriété suivante. Si $|\cdot|$ est une norme fixée sur $\mathbb{R}^N$, il existe une constante strictement positive $C_N$ telle que*

$$C_N^{-1}|x-y| \leqq \rho\big(\phi(x),\phi(y)\big) \leqq C_N|x-y|,$$

*pour tous $x$, $y$ de $\mathbb{Z}^N$.*

Signalons à l'attention du lecteur anglophone, que les expressions "négative ou nulle" ou encore "négative", se traduisent par "nonpositive". Citons quelques exemples de variétés symplectiques vérifiant les hypothèses du théorème :

- Le fibré cotangent $T^*L$ (muni de sa structure symplectique canonique : $\omega = d(p\,dq)$), d'une variété fermée $L$ possédant une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.

- Une surface compacte orientable de genre strictement positif, munie d'une forme d'aire ; un produit de surfaces de genres strictement positifs.

• Soit $V^3$ une variété fermée de dimension 3 qui fibre sur le cercle : $\pi : V^3 \to \mathbb{S}^1$. Supposons le genre de la fibre strictement positif. Notons $\theta_1$ la coordonnée sur le cercle. Soit $\Omega$ une 2-forme fermée sur $V^3$ qui soit non-dégénérée sur chaque fibre de $\pi$. Considérons la variété $M = V^3 \times \mathbb{S}^1$. Si $\theta_2$ désigne la coordonnée sur le second facteur de $M$, la forme

$$\omega = \Omega + \pi^*(d\theta_1) \wedge d\theta_2$$

est une forme symplectique sur $M$. Pour toute courbe fermée simple essentielle $\gamma$ contenue dans une fibre de $\pi$, nous obtenons un tore lagrangien incompressible $\gamma \times \mathbb{S}^1$ dans $M$.

**Remarques.** • Des plongements quasi-isométriques de groupes de type fini dans le groupe des difféomorphismes hamiltoniens du disque $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 < 1\}$, muni de sa métrique $L^2$ (voir [1] à ce sujet), qui est invariante à gauche seulement, ont été construits par Benaim et Gambaudo [2], puis Crisp et Wiest [5].

• Dans le cas où $M$ est une surface fermée de genre strictement positif, les résultats de [21] permettent de plonger quasi-isométriquement un espace de dimension infinie dans $\mathscr{G}$. Considérons par exemple le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, muni de la forme d'aire $dx \wedge dy$. Soit $E$ l'espace des fonctions de moyenne nulle sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, ne dépendant que de la coordonnée $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, muni de la norme $|H|_\infty = \sup_x |H(x)|$. Pour $H \in E$, notons $\psi(H)$ le temps 1 du flot hamiltonien de $H$. Le théorème 7.2.C de [21] assure que $\rho(\psi(H), \mathbb{1}) \geqq |H|_\infty$. Par ailleurs $\rho(\psi(H), \mathbb{1}) \leqq \operatorname{osc}(H) \leqq 2|H|_\infty$ ; l'application $\psi : E \to \mathscr{G}$ est donc un plongement quasi-isométrique.

• Pour construire le morphisme $\phi$, nous allons utiliser une idée de Lalonde et Polterovich [15]. D'après un théorème classique de Weinstein, un voisinage $U$ de $L$ dans $M$ est symplectomorphe à un voisinage de la section nulle dans le fibré cotangent $T^*L$. On peut supposer que $U$ est un fibré en boules au-dessus de $L$. Nous pouvons donc considérer des flots hamiltoniens sur $M$ qui, dans $U$ (ou une partie de $U$), coïncident avec le flot géodésique sur $L$ (pour une métrique à courbure négative fixée). Notons $\tilde{u}^t : T^*\tilde{L} \to T^*\tilde{L}$ le flot géodésique sur le revêtement universel $\tilde{L}$ de $L$. Nous allons tirer parti du fait suivant, dû à la courbure négative : si $K$ est un compact de $T^*\tilde{L}$ qui évite la section nulle, on a $\tilde{u}^t(K) \cap K = \emptyset$ pour $t$ suffisament grand.

• Nous verrons que, lorsque l'on choisit comme norme sur $\mathbb{R}^N$ la norme

$$|(x_1, \dots, x_N)| = \sum_{k=1}^{N} |x_k|$$

la constante $C_N$ que nous obtenons converge exponentiellement vite vers l'infini lorsque $N$ tend vers l'infini.

• Il serait intéressant de savoir si un résultat analogue est vrai lorsque $M$ est la sphère $\mathbb{S}^2$. Dans ce cas, et à notre connaissance, les seules manières d'obtenir des bornes inférieures arbitrairement grandes sur la distance de Hofer proviennent de [6], [20]. Leonid Polterovich m'a indiqué que, dans le cas où $M$ est le disque $\mathbb{D}^2$, les résultats de [6] permettent de prouver un résultat analogue au théorème 1.

Dans la seconde partie de ce texte, nous rappelons quelques faits classiques de topologie symplectique, puis nous prouvons le théorème dans la troisième partie.

## 2. Inégalité entre énergie et capacité

Si $A$ est une partie de $M$, rappelons que la *capacité de Gromov* de $A$, notée $c(A)$, est la quantité :

$$\sup\{\pi r^2, \text{ il existe un plongement symplectique } B^{2n}(r) \to \mathrm{Int}(A)\}.$$

Ici, $B^{2n}(r)$ désigne la boule euclidienne de rayon $r$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ muni de sa structure symplectique standard (et $\dim M = 2n$). Cette notion a été introduite dans [9]. Lalonde et McDuff [13] ont établi le résultat suivant. Si $f$ est un élément de $\mathcal{G}$ et $A$ une partie de $M$ qui est disjointe d'elle-même par $f$, c'est-à-dire qui vérifie $f(A) \cap A = \emptyset$, alors l'énergie de $f$ est minorée par la moitié de la capacité de $A$ :

$$\|f\| \geqq \frac{1}{2} c(A).$$

Rappelons que c'est cette inégalité qui permet d'établir que la distance de Hofer est non-dégénérée : si $f$ est un difféomorphisme différent de l'identité, on peut trouver un ouvert de $M$ qui est disjoint de lui-même par $f$. Puisque tout ouvert non-vide a une capacité strictement positive, l'énergie de $f$ est non-nulle. Une telle inégalité avait été prouvée (sans le facteur $1/2$) par Hofer dans $\mathbb{R}^{2n}$ [11] (voir aussi [7]).

Expliquons maintenant comment nous allons utiliser cette inégalité. Notons d'abord que toutes les variétés symplectiques qui vérifient les hypothèses de notre théorème ont un groupe fondamental infini, et donc un revêtement universel $p : \tilde{M} \to M$ non compact. Fixons un élément $f$ de $\mathcal{G}$. Considérons une isotopie hamiltonienne $f_t : M \to M$, engendrée par un hamiltonien $(H_t)$, telle que $f_1 = f$. Notons $\tilde{f}_t : \tilde{M} \to \tilde{M}$ le relevé de l'isotopie $(f_t)$ issu de l'identité. C'est une isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction $H_t \circ p$ (à support non compact). Nous obtenons ainsi un relevé $\tilde{f}_1 : \tilde{M} \to \tilde{M}$ de $f$. Suivant [15], nous appellerons *relevé admissible* de $f$ tout relevé ainsi obtenu.

**Proposition 2.1** ([15]). *Soit $c > 0$ et $f \in \mathcal{G}$. Supposons que pour tout relevé admissible $\tilde{f}$ de $f$, il existe une partie $A$ de $\tilde{M}$ de capacité supérieure ou égale à $c$ telle que $\tilde{f}(A) \cap A = \emptyset$. Alors $\|f\| \geqq c/2$.*

**Remarque.** Si $M$ est non compacte, puisque nous ne considérons que des isotopies hamiltoniennes sur $M$ à support compact, il est clair qu'il existe un unique relevé admissible. Si $M$ est compacte, une conséquence facile de la (difficile) conjecture d'Arnold (voir [8], [16]) est que l'application d'évaluation

$$\pi_1(\mathcal{G}, \mathbb{1}) \to \pi_1(M, x_0)$$

a une image triviale. Ceci implique que tout difféomorphisme hamiltonien de $M$ possède un *unique* relevé admissible. Ainsi, pour appliquer la proposition ci-dessus, il suffit de vérifier l'hypothèse pour un seul difféomorphisme de $\tilde{M}$. Cependant, pour garder à cette article un caractère élémentaire, nous n'utiliserons pas ce fait.

*Preuve de la proposition.* Considérons une isotopie hamiltonienne $(f_t)$ sur $M$, engendrée par la fonction à support compact $H_t$, telle que $f_1 = f$. Soit $A$ un compact contenant la réunion des supports des fonctions $H_t$. Si $M$ est compacte, nous supposerons $H_t$ normalisée par la condition $\int_M H_t \omega^n = 0$, pour tout $t$. Soit $(\tilde{f}_t)$ l'isotopie de $\tilde{M}$ engendrée par la fonction $H_t \circ p$. Par hypothèse on peut trouver un compact $K$ de $\tilde{M}$ de capacité supérieure à $c - \epsilon$, qui est disjoint de lui-même par $\tilde{f}_1$. Soit $B$ une boule de $\tilde{M}$ qui contient $\bigcup_{t \in [0,1]} \tilde{f}_t(K)$ et telle que la projection $p : B \to A$ soit surjective ; et $\varphi : \tilde{M} \to [0,1]$ une fonction à support compact valant 1 sur $B$. L'isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction à support compact définie par $G_t(x) = \varphi(x) H_t\big(p(x)\big)$ disjoint $K$ de lui-même. Nous obtenons donc, d'après l'inégalité entre énergie et capacité, $\int_0^1 \operatorname{osc}(G_t)\, dt \geqq \dfrac{c-\epsilon}{2}$. Puisque $\operatorname{osc}(G_t) = \operatorname{osc}(H_t)$, on obtient l'estimation voulue. $\square$

Une conséquence classique de la preuve ci-dessus est qu'un relevé admissible d'un difféomorphisme hamiltonien de $M$ ne peut disjoindre d'elle-même une partie de $\tilde{M}$ de capacité infinie.

## 3. Preuve du théorème

Fixons une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle $g$ sur $L$. Nous noterons $d_g$ la distance induite par $g$ sur le revêtement universel $\tilde{L}$ de $L$. Quitte à multiplier la métrique $g$ par une constante, on peut supposer qu'il existe un voisinage $U$ de $L$ dans $M$ et un difféomorphisme symplectique

$$\theta : T^*L(\sqrt{3}) \to U,$$

où $T^*L(\sqrt{3}) = \{(q,p) \in T^*L, |p|_q^2 < 3\}$. Fixons désormais un entier naturel $N$. Notons $A_i$ $(1 \leqq i \leqq 2^N)$ la partie suivante de $T^*L(\sqrt{3})$ :

$$\left\{(q,p), 1 + \frac{i-1}{2^N} \leqq |p|_q^2 \leqq 1 + \frac{i-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\right\}.$$

Nous avons représenté en noir sur la figure 1, dans le cas où $N = 2$, la trace des ensembles $A_1, \ldots, A_4$ sur une fibre de la projection $T^*L \to L$.

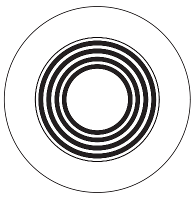

Figure 1

Il sera plus commode d'indexer en fait les ensembles $(A_i)_{1 \leqq i \leqq 2^N}$ par $\{\pm 1\}^N$. Pour cela nous fixons une bijection entre $\{\pm 1\}^N$ et $\{1, \ldots, 2^N\}$ :

$$I = (I_1, \ldots, I_N) \in \{\pm 1\}^N \mapsto i(I) \in \{1, \ldots, 2^N\}.$$

Soit, pour $1 \leqq k \leqq N$, $\varphi_k : [0, 3] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$, ayant les propriétés suivantes :

- L'application $\varphi_k$ est nulle en dehors de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

- Si $I_k = 1$ et $s \in \left[1 + \frac{i(I) - 1}{2^N}, 1 + \frac{i(I) - 1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\right]$, $\varphi_k(s) = s$ ; si $I_k = -1$ et $s \in \left[1 + \frac{i(I) - 1}{2^N}, 1 + \frac{i(I) - 1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\right]$, $\varphi_k(s) = -s$.

Enfin si $(q, p) \in T^*L(\sqrt{3})$, on pose $H_k(q, p) = \frac{1}{2}\varphi_k(|p|_q^2)$. Grâce au difféomorphisme $\theta$ on peut voir $H_k$ comme une fonction sur $U$, que l'on prolonge par 0 en dehors de $U$ pour obtenir une fonction lisse sur $M$. Les flots hamiltoniens $\phi_{H_k}^t$ associés aux fonctions $H_1, \ldots, H_N$ commutent et définissent une action de $\mathbb{R}^N$ sur $M$. Nous définissons un morphisme $\phi : \mathbb{Z}^N \to \mathscr{G}$ par

$$\phi\big(a = (a_1, \ldots, a_N)\big) = \prod_{k=1}^{N} \phi_{H_k}^{a_k}.$$

Nous avons bien sûr

$$\rho\big(\phi(a), \phi(b)\big) = \left\| \prod_{k=1}^{N} \phi_{H_k}^{a_k - b_k} \right\| \leqq C \cdot \left( \sum_{k=1}^{N} |a_k - b_k| \right),$$

où l'on a noté $C = \max\limits_{1 \leqq k \leqq N} \|\phi_{H_k}^1\|$. Pour prouver le théorème, nous devons établir une minoration de la forme

$$\|\phi(a)\| \geqq \epsilon_N \cdot \left( \sum_{k=1}^{N} |a_k| \right)$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}^N$, pour une certaine constante $\epsilon_N$. On peut ensuite prendre $C_N = \max(\epsilon_N^{-1}, C)$.

Fixons donc $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{Z}^N - \{0\}$. On peut choisir $I \in \{\pm 1\}^N$ tel que $I_k a_k \geqq 0$ pour tout $k$ de $\{1, \ldots, N\}$. Si $(q, p) \in A_{i(I)}$, alors

$$\left( \sum_{k=1}^{N} a_k H_k \right)(q, p) = \frac{l}{2} |p|_q^2$$

(où $l := \sum\limits_{k=1}^{N} |a_k|$). Notons $u^t : T^*L \to T^*L$ le flot géodésique (pour la métrique $g$) : c'est le flot hamiltonien associé à la fonction $E(q,p) = \frac{1}{2}|p|_q^2$. Le flot hamiltonien engendré par la fonction $\sum_{k=1}^{N} a_k H_k$ coïncide donc avec le flot $(u^{lt})$ sur $A_{i(I)}$.

Choisissons une composante connexe $\tilde{U}$ de l'image inverse de $U$ dans $\tilde{M}$. Puisque $L$ est incompressible dans $M$, $\tilde{U}$ est symplectiquement difféomorphe à $T^*\tilde{L}(\sqrt{3})$. Nous choisissons également un point base $q_0 \in \tilde{L}$, et notons $B(q_0, R)$ la boule ouverte de rayon $R$ centrée en $q_0$.

Notons $\tilde{\phi}(a) : \tilde{M} \to \tilde{M}$ le relevé admissible de $\phi(a)$ déterminé par l'isotopie engendrée par la fonction $\sum_{k=1}^{N} a_k H_k$. Un autre relevé admissible (hypothétique !!! d'après la remarque faite plus haut) serait de la forme $T \circ \tilde{\phi}(a)$ où $T$ est un élément du groupe fondamental de $M$. Notons que $T$ appartient nécessairement au groupe fondamental de $L$, sinon $T \circ \tilde{\phi}(a)$ disjoindrait $\tilde{U}$ de lui-même. C'est impossible car $\tilde{U}$ est de capacité infinie (ceci se déduit, par exemple, de la proposition 3.1).

Posons $R = l/4$. Soit $\tilde{A}_{i,R}$ la partie suivante de $T^*\tilde{L}(\sqrt{3})$ :

$$\left\{(q,p), q \in B(q_0, R), 1 + \frac{i-1}{2^N} \leqq |p|_q^2 \leqq 1 + \frac{i-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}\right\}.$$

Si $(q,p) \in \tilde{A}_{i,R}$, écrivant $\tilde{\phi}(a)(q,p) = (q',p')$, nous avons $d_g(q,q') \geqq l$. Ceci assure que $\tilde{\phi}(a)(\tilde{A}_{i,R}) \cap \tilde{A}_{i,R} = \emptyset$.

Considérons maintenant un autre relevé admissible de la forme

$$T \circ \tilde{\phi}(a) \quad (T \in \pi_1(L) - \{1\}).$$

Supposons que $T \circ \tilde{\phi}(a)(\tilde{A}_{i,R})$ rencontre $\tilde{A}_{i,R}$. Il existe alors $(q,p) \in \tilde{A}_{i,R}$ tel que $\tilde{\phi}(a)(q,p) = (q',p') \in T^{-1}(\tilde{A}_{i,R})$. On obtient alors

$$d_g\big(T(q_0), q_0\big) \geqq d_g\big(T(q_0), T(q')\big) - R \geqq d_g(q', q) - 2R \geqq \frac{l}{2}.$$

Si $v$ et $C$ sont des constantes strictement positives, nous noterons

$$\Lambda_{v,C} = \{(q,p), q \in B(q_0, C), |p|_q < v\}.$$

Rappelons que l'on a $H_k(q,p) = 0$ (pour tout $k$), dès que $|p|_q^2 < 1/2$. Alors, si $(q,p) \in \Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2}}$, $T \circ \tilde{\phi}(a)(q,p) = T(q,p) = (q',p')$ vérifie :

$$d_g(q', q_0) \geqq d_g\big(T(q_0), q_0\big) - d_g(q, q_0) \geqq \frac{l}{2} - \frac{l}{8} = \frac{3l}{8}.$$

Donc $T \circ \tilde{\phi}(a)(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2}}) \cap (\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2}}) = \emptyset$.

En résumé, tout relevé admissible de $\phi(a)$ disjoint d'elle-même une partie de $\tilde{M}$ de capacité supérieure ou égale à $\min\big(c(\tilde{A}_{i,R}), c(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})\big)$. D'après la proposition 2.1, nous avons $\|\phi(a)\| \geqq \frac{1}{2}\min\big(c(\tilde{A}_{i,R}), c(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})\big)$. Pour conclure la preuve du théorème, il nous reste à obtenir une minoration, linéaire en $R$, des capacités de $\tilde{A}_{i,R}$ et $\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}}$. La preuve de la proposition suivante m'a été suggérée par Jean-Claude Sikorav.

**Proposition 3.1.** *Il existe une constante* $\varepsilon > 0$ *telle que* $\min\big(c(\tilde{A}_{i,R}), c(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})\big) \geqq \varepsilon R$.

*Preuve.* On commence par ramener l'estimation de la capacité de $\tilde{A}_{i,R}$ à celle d'un ensemble de la forme $\Lambda_{\alpha,R} = \{(q,p), q \in B(q_0,R), |p|_q < \alpha\}$.

Soit $V : \tilde{L} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$ telle que $\|dV(q)\| = \sqrt{1 + \frac{i-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+2}}}$ pour $q \in B(q_0, 2R)$. Pour cela fixons un point $q_\infty \in \tilde{L}$ tel que $d_g(q_0, q_\infty) \geqq 10^7 \cdot R$, et prenons pour $V$ la fonction

$$\sqrt{1 + \frac{i-1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+2}}}\, d_g(\cdot, q_\infty),$$

multipliée par une fonction plateau qui s'annule au voisinage de $q_\infty$. Notons $T_V(q,p) = \big(q, p - dV(q)\big)$ $\big((q,p) \in T^*\tilde{L}\big)$. On vérifie aisément que si $q \in B(q_0,R)$ et $|p|_q < (10 \cdot 2^{N+2})^{-1}$, alors $\big(q, dV(q) + p\big) \in \tilde{A}_{i,R}$. L'application $T_V$ étant un difféomorphisme symplectique de $T^*\tilde{L}$, on a donc

$$c(\tilde{A}_{i,R}) = c\big(T_V(\tilde{A}_{i,R})\big) \geqq c(\Lambda_{(10\cdot 2^{(N+2)})^{-1},R}).$$

Il nous reste maintenant à obtenir une minoration de la capacité de $\Lambda_{\alpha,R}$. L'application $G : T_{q_0}\tilde{L} \times T^*_{q_0}\tilde{L} \to T^*\tilde{L}$ définie par

$$(v \in T_{q_0}\tilde{L}, \eta \in T^*_{q_0}\tilde{L}) \mapsto \big(\exp_{q_0}(v), \eta \circ \big(D\exp_{q_0}(v)\big)^{-1}\big)$$

est un difféomorphisme symplectique : c'est l'application induite entre les fibrés cotangents de $T_{q_0}\tilde{L}$ et $\tilde{L}$ par le difféomorphisme $\exp_{q_0} : T_{q_0}\tilde{L} \to \tilde{L}$. Puisque la métrique $g$ est à courbure négative ou nulle, l'application $\big(D\exp_{q_0}(v)\big)^{-1} : (T_{\exp_{q_0}(v)}\tilde{L}, g_{\exp_{q_0}(v)}) \to (T_{q_0}\tilde{L}, g_{q_0})$ est de norme majorée par 1. Il en est de même pour sa transposée. On a donc

$$\{(v,\eta), |v|_{q_0} < R, |\eta|_{q_0} < \alpha\} \subset G^{-1}(\Lambda_{\alpha,R}).$$

L'application linéaire symplectique

$$(q,p) \mapsto \left(\sqrt{\frac{R}{\alpha}}q, \sqrt{\frac{\alpha}{R}}p\right)$$

envoie la boule euclidienne $B(0,\sqrt{R\alpha})$ dans $\{(v,\eta), |v|_{q_0} < R, |\eta|_{q_0} < \alpha\}$. Nous obtenons donc bien l'inégalité $c(\Lambda_{\alpha,R}) \geqq \pi R\alpha$. Finalement :

$$\min\big(c(\tilde{A}_{i,R}), c(\Lambda_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{R}{2}})\big) \geqq \min\left(\frac{\pi R}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi R}{10 \cdot 2^{N+2}}\right) \geqq \frac{\pi R}{10 \cdot 2^{N+2}}. \quad \square$$

## Références


[1] *V. I. Arnold* et *B. Khesin*, Topological methods in hydrodynamics, Appl. Math. Sci. **125**, Springer-Verlag, New York 1998.

[2] *M. Benaim* et *J.-M. Gambaudo*, Metric properties of the group of area preserving diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc. **353**, No. 11 (2001), 4661–4672.

[3] *M. Bialy* et *L. Polterovich*, Geodesics of Hofer's metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms, Duke Math. J. **76**, No. 1 (1994), 273–292.

[4] *Yu. V. Chekanov*, Lagrangian intersections, symplectic energy, and areas of holomorphic curves, Duke Math. J. **95**, No. 1 (1998), 213–226.

[5] *J. Crisp* et *B. Wiest*, Quasi-isometrically embedded subgroups of braid and diffeomorphism groups, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.

[6] *M. Entov* et *L. Polterovich*, Calabi quasimorphism and quantum homology, Int. Math. Res. Not. **30** (2003), 1635–1676.

[7] *U. Frauenfelder*, *V. Ginzburg* et *F. Schlenk*, Energy capacity inequalities via an action selector, in: Geometry, spectral theory, groups and dynamics, Contemp. Math. **387** (2005), 129–152.

[8] *K. Fukaya* et *K. Ono*, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants, Topology **38**, No. 5 (1999), 933–1048.

[9] *M. Gromov*, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[10] *H. Hofer*, On the topological properties of symplectic maps, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115**, No. 1-2 (1990), 25–38.

[11] *H. Hofer*, Estimates for the energy of a symplectic map, Comment. Math. Helv. **68**, No. 1 (1993), 48–72.

[12] *H. Hofer* et *E. Zehnder*, Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics, Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks, Birkhäuser Verlag, Basel 1994.

[13] *F. Lalonde* et *D. McDuff*, The geometry of symplectic energy, Ann. Math. (2) **141**, No. 2 (1995), 349–371.

[14] *F. Lalonde* et *D. McDuff*, Hofer's $L^{\infty}$-geometry: energy and stability of Hamiltonian flows II, Invent. Math. **122**, No. 1 (1995), 35–69.

[15] *F. Lalonde* et *L. Polterovich*, Symplectic diffeomorphisms as isometries of Hofer's norm, Topology **36**, No. 3 (1997), 711–727.

[16] *G. Liu* et *G. Tian*, Floer homology and Arnold conjecture, J. Diff. Geom. **49**, No. 1 (1998), 1–74.

[17] *Y.-G. Oh*, Gromov-Floer theory and disjunction energy of compact Lagrangian embeddings, Math. Res. Lett. **4**, No. 6 (1997), 895–905.

[18] *Y.-G. Oh*, Spectral invariants, analysis of the Floer moduli space, and geometry of the Hamiltonian diffeomorphisms group, Duke Math. J. **130**, No. 2 (2005), 199–295.

[19] *L. Polterovich*, Symplectic displacement energy for Lagrangian submanifolds, Erg. Th. Dynam. Syst. **13**, No. 2 (1993), 357–367.

[20] *L. Polterovich*, Hofer's diameter and Lagrangian intersections, Internat. Math. Res. Notices **4** (1998), 217–223.

[21] *L. Polterovich*, The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms, Lect. Math. ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel 2001.

[22] *M. Schwarz*, On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds, Pacific J. Math. **193**, No. 2 (2000), 419–461.

[23] *C. Viterbo*, Symplectic topology as the geometry of generating functions, Math. Ann. **292**, No. 4 (1992), 685–710.


---

ANR-06-BLAN-0030, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, UMR 5669 CNRS, École Normale Supérieure de Lyon, 46, Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
e-mail: Pierre.Py@umpa.ens-lyon.fr

Eingegangen 24. April 2007