

INDICE DE MASLOV ET THÉORÈME DE NOVIKOV-WALL

PIERRE PY

ABSTRACT. This paper deals with the link between the signature of 4-manifolds and the ternary Maslov index in symplectic geometry. We give a proof of a theorem by C. T. C. Wall, which generalizes Novikov's classical additivity theorem. This theorem was formulated and proved by Wall before the appearance of the Maslov index in symplectic geometry. We can now formulate it in a slightly different way. We show how this theorem allows us to compute the signature of a closed oriented manifold using a Morse function. We also give a proof of a theorem by W. Meyer about the signature of fibre bundles over surfaces. Finally, we include a geometric definition of Maslov's index, due to Arnold.

1. Introduction

Le but de ce texte est de décrire quelques interactions entre deux notions d'origines différentes : *l'indice de Maslov* d'une part, issu de la géométrie symplectique, et la *signature* des variétés de dimension 4 d'autre part, de nature topologique. Ce lien a été observé initialement en 1969 par C.T.C. Wall dans [26]. Nous décrivons notamment un théorème de Wall qui généralise l'additivité de la signature de Novikov, ainsi qu'un théorème de W. Meyer sur la signature des variétés de dimension 4 fibrées en surfaces au-dessus d'une surface.

La signature $\sigma(M)$ d'une variété, compacte, orientée, de dimension 4, est la signature de la forme quadratique $H_2(M, \mathbb{R}) \times H_2(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par l'intersection. Ce lien a été remarqué en premier par Wall alors que l'indice de Maslov n'était pas encore apparu dans le cadre de la géométrie symplectique, et qu'il ne portait pas encore ce nom. Il a montré comment cette notion algébrique intervenait dans le calcul de la signature des variétés. Rappelons d'abord le théorème de S. Novikov sur l'additivité de la signature. Supposons que M soit une variété, compacte, orientée, de dimension 4, obtenue en recollant, par un homéomorphisme qui inverse l'orientation du bord, deux variétés M_1 et M_2 le long d'une réunion de composantes connexes de leurs bords. Alors la signature de M est la somme des signatures de M_1 et M_2 . Wall a prouvé dans [26] une généralisation de ce résultat dans le cas où l'on identifie M_1 et M_2 le long d'une *sous-variété à bord* X_0 de leur bord. La sous-variété X_0 possède elle-même un bord Σ de dimension 2. On suppose que les orientations de M_1 et M_2 sont induites par celle de M . L'orientation de M_1 induit une orientation de son bord, donc de X_0 , et l'orientation de X_0 induit une orientation de Σ . Dans M , la surface Σ peut être vue comme le bord de trois variétés de dimension 3

2000 *Mathematics Subject Classification*: 57R19, 53D12.

Keywords and phrases: signature, Maslov index, Novikov's additivity .

distinctes : $X_0, X_1 = \partial M_1 \setminus X_0$ et $X_2 = \partial M_2 \setminus X_0$. Les noyaux L_i des applications

$$H_1(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(X_i, \mathbb{R})$$

fournissent trois sous-espaces de $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$, lagrangiens pour la forme d'intersection. La signature n'est plus additive mais le défaut $\sigma(M) - \sigma(M_1) - \sigma(M_2)$ s'interprète comme l'indice de Maslov des trois lagrangiens L_0, L_1, L_2 . On a précisément :

THÉORÈME (1.1) (Wall). *Les variétés M, M_1, M_2 et Σ étant orientées comme indiqué ci-dessus, on a :*

$$\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \tau(L_1, L_0, L_2)$$

où $\tau(L_1, L_0, L_2)$ désigne l'indice de Maslov des lagrangiens L_1, L_0, L_2 dans l'espace vectoriel $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$ muni d'une structure symplectique grâce à la forme d'intersection.

Nous appellerons désormais *théorème de Novikov-Wall* ce résultat. Bien sûr ce théorème reste vrai en dimension $4n$, et nous travaillerons, comme Wall, dans ce cadre. La formulation du théorème de Wall en termes d'indice de Maslov apparaît déjà dans le travail de S.E. Cappell, R. Lee et E.Y. Miller [4]. Cette version raffinée de l'additivité de Novikov a été utilisée par J.-M. Gambaudo et É. Ghys pour calculer le cobord de la fonction signature sur le groupe de tresses B_n [10]. On pourra consulter [11] pour plus de détails sur le lien entre la signature des tresses et celle des variétés. Le théorème de Novikov-Wall permet également de donner une nouvelle preuve d'un théorème de W. Meyer. Dans [17], Meyer a calculé la signature d'une variété M de dimension 4 fibrée en surfaces (fermées) au-dessus d'un pantalon P . Les deux générateurs a et b du groupe fondamental de P agissent sur l'homologie de dimension 1 de la fibre S . Meyer a prouvé que la signature de M ne dépendait que de cette action. Celle-ci préserve la forme d'intersection sur $H_1(S, \mathbb{R})$. En choisissant une base symplectique de $H_1(S, \mathbb{R})$, les lacets a et b fournissent donc deux éléments γ_a et γ_b du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, définis à conjugaison près. On introduira alors au paragraphe 3.3, un 2-cocycle borné sur le groupe symplectique

$$\text{Meyer} : \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

et on prouvera, grâce au théorème de Novikov-Wall :

THÉORÈME (1.2) (Meyer). *La signature de M ne dépend que de l'action des générateurs du groupe fondamental de P sur l'homologie de dimension 1 de la fibre. On a précisément :*

$$\sigma(M) = \text{Meyer}(\gamma_a^{-1}, \gamma_b).$$

Cette application du théorème de Novikov-Wall figurait déjà dans [10]. On démontrera en fait le théorème de Meyer dans le cas où M est une variété de dimension $4n$ fibrée au-dessus d'un pantalon. Nous utilisons également le théorème de Novikov-Wall pour prouver le résultat suivant.

THÉORÈME (1.3). *Supposons que M soit une variété différentiable compacte sans bord, de dimension $4n$ et orientée. Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse de points critiques x_1, \dots, x_p . On suppose les valeurs critiques $\lambda_i = f(x_i)$ toutes*

distinctes. Alors, à chaque point critique x_i d'indice $2n$, on peut associer un entier $s(x_i)$ de $\{-1, 0, 1\}$ tel que la signature de M vérifie :

$$\sigma(M) = \sum s(x_i)$$

où la somme porte sur les points critiques d'indice $2n$. L'entier $s(x_i)$ est la signature de la variété $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$ pour tout ϵ suffisamment petit pour que l'intervalle $[\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon]$ ne contienne que λ_i comme valeur critique. On décrit de plus quand $s(x_i)$ prend chacune des valeurs $-1, 0, +1$.

L'intérêt du théorème de Novikov-Wall est qu'il permet un calcul plus effectif de la signature. Avec la version classique de l'additivité de Novikov, on ne peut espérer calculer la signature d'une variété en la décomposant en morceaux élémentaires de signatures nulles. On n'obtiendrait ainsi que des variétés de signature nulle. Avec le théorème de Novikov-Wall ceci est possible, car on exprime la signature d'une variété en fonction de la signature de ses différents morceaux, et d'un terme supplémentaire. Par exemple, dans le théorème précédent, le calcul de la signature de M à partir de f se fait en décomposant entièrement la variété en sous-variétés à bord de signatures nulles. Les termes non-nuls s'expriment comme des indices de Maslov.

Une autre manière de généraliser le théorème de Novikov est la suivante. On étudie toujours une variété compacte orientée de dimension 4. Considérons le groupe d'homologie $H_2(M, \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est un corps quelconque (disons de caractéristique distincte de 2). La forme d'intersection $H_2(M, \mathbb{K}) \times H_2(M, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définit un élément $\sigma(M)$ du groupe de Witt de \mathbb{K} , noté $W(\mathbb{K})$. Dans le cas où le corps est celui des réels, le groupe de Witt s'identifie à \mathbb{Z} via la signature, et $\sigma(M)$ s'identifie à la signature usuelle de la variété sous cet isomorphisme. On peut encore énoncer et démontrer l'additivité de Novikov, ainsi que sa généralisation par Wall, dans ce cadre. L'additivité a lieu cette fois-ci dans le groupe $W(\mathbb{K})$. Ce point de vue avait déjà été adopté par F. Latour dans [12].

L'organisation du texte est la suivante. Dans la partie 2, après un rappel sur le groupe de Witt, on définit l'indice de Maslov de trois lagrangiens dans un espace vectoriel symplectique sur un corps \mathbb{K} . On prouve qu'il vérifie une relation de cocycle et on décrit différentes manières de le représenter par une forme quadratique. Dans la troisième partie on prouve le théorème de Novikov-Wall en se plaçant dans le cas d'un corps quelconque (de caractéristique distincte de 2). On montre ensuite comment calculer la signature d'une variété de dimension 4 fibrée au-dessus d'un pantalon. On prouve enfin le théorème relatif au calcul de la signature à partir d'une fonction de Morse. Dans la dernière partie nous incluons une définition géométrique de l'indice de Maslov (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) due à Arnold. On pourra également consulter les articles de P. Dazord et M. De Gosson [8], [9], où cette approche est discutée en détails. Elle donne un autre point de vue sur l'indice de Maslov que celui de la seconde partie. C'est d'ailleurs ce point de vue qui apparaît lors de l'utilisation de l'indice de Maslov en topologie symplectique [22]. Cette partie est donc essentiellement indépendante des précédentes et sa lecture pourra être omise par un lecteur uniquement intéressé par la question de la signature des variétés. Pour obtenir cette définition géométrique de l'indice de Maslov, on étudie la topologie de la grassmannienne lagrangienne de \mathbb{R}^{2n} . Ceci permet

de construire un 2-cocycle borné à valeurs réelles qui représente l'image dans $H^2(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})^\delta, \mathbb{R})$ de la classe de l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

du groupe symplectique par son revêtement universel.

A l'exception du Théorème (1.3) ci-dessus, aucun des résultats évoqués dans ce texte n'est nouveau. Nous avons indiqué tout au long du texte l'origine de chacun des résultats mentionnés.

Remerciements. Je tiens à remercier Étienne Ghys pour ses explications enthousiastes et ses encouragements au cours de ce travail. Je voudrais également remercier le rapporteur, qui m'a permis de compléter ma bibliographie.

2. Groupe de Witt et indice de Maslov de trois lagrangiens

(2.1) Groupe de Witt. On rappelle ici brièvement la construction du groupe de Witt d'un corps \mathbb{K} . Nous supposons toujours que \mathbb{K} est de caractéristique distincte de 2. On pourra consulter [20] pour plus de détails, et pour la construction dans le cas d'un anneau.

On considère l'ensemble \mathcal{W} des classes d'isomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Un élément V de \mathcal{W} sera dit *hyperbolique* s'il possède un sous-espace $S \subset V$ tel que $S^\perp = S$. On peut voir facilement qu'un espace est hyperbolique si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a sur \mathcal{W} une addition naturelle qui, à deux espaces V_1 et V_2 , associe la somme directe orthogonale $V_1 \oplus V_2$. En outre, on peut définir sur \mathcal{W} la relation d'équivalence suivante : $V_1 \sim V_2$ s'il existe deux espaces hyperboliques S_1 et S_2 tels que $V_1 \oplus S_1$ et $V_2 \oplus S_2$ soient isomorphes. On note $W(\mathbb{K})$ le quotient de \mathcal{W} par cette relation. L'addition de \mathcal{W} passe au quotient et fait de $W(\mathbb{K})$ un groupe abélien. C'est *le groupe de Witt* de \mathbb{K} . En utilisant le produit tensoriel, on peut également le munir d'une structure d'anneau.

Dans le cas du corps des nombres réels, on a un isomorphisme naturel entre $W(\mathbb{R})$ et \mathbb{Z} , via la signature. Dans ce qui suit la signature d'une forme bilinéaire symétrique f sur un espace vectoriel réel désignera toujours l'entier $\nu_+ - \nu_-$, où ν_+ est le nombre de valeurs propres positives de f et ν_- le nombre de valeurs propres négatives. Il n'est pas difficile de voir que les modules hyperboliques sont exactement ceux de signature nulle. Ainsi la signature est bien définie sur $W(\mathbb{R})$ et fournit un isomorphisme entre $W(\mathbb{R})$ et \mathbb{Z} .

Dans la suite, si (E, f) est un espace vectoriel sur \mathbb{K} muni d'une forme bilinéaire symétrique éventuellement dégénérée, on parlera de l'image de (E, f) dans $W(\mathbb{K})$, notée $\sigma(E)$, pour désigner la classe de E/R où R est le radical de f .

(2.2) Cocycle de Maslov. Il existe de nombreux textes qui introduisent l'indice de Maslov ([2], [8], [9], [15], [21], [23] par exemple). A titre de remarque, si l'on utilise ici l'indice de Maslov pour l'étude de la signature des variétés, cette notion intervient également dans d'autres cadres : pour la résolution

d'équations différentielles ou aux dérivées partielles [1], [2], [13], [14], ou encore en topologie symplectique [22].

Signalons également que l'indice de Maslov (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) désigne en fait, selon les situations et les auteurs, un nombre attaché à :

- un triplet de lagrangiens,
- une paire de points dans le revêtement universel de la grassmannienne lagrangienne,
- une paire de chemins dans le groupe symplectique.

Dans ce texte, l'indice de Maslov désignera un entier attaché à un triplet de lagrangiens. Cet entier est parfois également appelé *signature de Kashiwara*. Le troisième cas ci-dessus n'apparaîtra pas ici, le second sera décrit dans la partie 4. Dans [4], on pourra trouver une description complète de chacune des versions de l'indice de Maslov (celles évoquées ci-dessus, mais également d'autres). Signalons également des travaux plus récents [5], [6], [7], dans lesquels l'indice de Maslov est étendu à un cadre plus général.

On suppose donc que (E, ω) est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une forme symplectique : c'est-à-dire, ω est une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée sur E . L'orthogonal d'un sous-espace V de E est :

$$V^\perp = \{u \in E, \omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}.$$

Un *lagrangien* de E est un sous-espace L de E isotrope pour ω et de dimension maximale pour cette propriété. Il est équivalent de dire que L est égal à son orthogonal. Enfin on désignera par $\text{Sp}(E, \omega)$ le groupe des automorphismes de E qui préservent la forme ω : ce sont les applications linéaires $g : E \rightarrow E$ telles que $\omega(gu, gv) = \omega(u, v)$ pour u et v dans E .

Si L_1, L_2, L_3 sont trois lagrangiens de E , on va définir leur indice de Maslov $\tau(L_1, L_2, L_3)$ comme étant un élément du groupe de Witt de \mathbb{K} . On considère dans $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ le sous espace V formé des vecteurs $v = (v_1, v_2, v_3)$ tels que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. On le munit de la forme bilinéaire symétrique définie par :

$$f(v, v') = \omega(v_2, v'_1) = \omega(v_3, v'_2) = \omega(v_1, v'_3).$$

L'indice de Maslov des trois lagrangiens L_1, L_2, L_3 est alors la classe de V muni de f dans le groupe $W(\mathbb{K})$. Il est bien clair que l'indice de Maslov est invariant sous l'action du groupe symplectique :

$$\tau(L_1, L_2, L_3) = \tau(gL_1, gL_2, gL_3),$$

pour un élément g de $\text{Sp}(E, \omega)$. Il change de signe si l'on échange deux des trois lagrangiens et est invariant par permutations circulaires. En outre l'indice de Maslov vérifie la relation de cocycle suivante.

THÉORÈME (2.2.1). *Si L_1, L_2, L_3, L_4 sont quatre lagrangiens de E on a :*

$$\tau(L_1, L_2, L_3) - \tau(L_1, L_2, L_4) + \tau(L_1, L_3, L_4) - \tau(L_2, L_3, L_4) = 0.$$

Preuve : la preuve suivante est tirée de [25]. On considère le sous-espace U de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus L_4$ formé des vecteurs v tels que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$, que

l'on munit de la forme bilinéaire suivante :

$$\begin{aligned} \phi(v, v') = & \frac{1}{4}(\omega(v_2, v'_1) + \omega(v_3, v'_2) + \omega(v_4, v'_3) + \omega(v_1, v'_4) + \omega(v'_2, v_1) \\ & + \omega(v'_3, v_2) + \omega(v'_4, v_3) + \omega(v'_1, v_4)). \end{aligned}$$

On va calculer de deux manières différentes la classe de U dans $W(\mathbb{K})$ pour obtenir la relation voulue. On note E_i le sous-espace de U formé des vecteurs tels que $v_i = 0$ ($1 \leq i \leq 4$). L'espace E_4 s'identifie naturellement à l'espace V considéré précédemment pour définir l'indice de Maslov de L_1, L_2, L_3 . De plus si v et v' sont dans E_4 on a :

$$\phi(v, v') = f(v, v').$$

Donc $\sigma(E_4) = \tau(L_1, L_2, L_3)$. On a de la même manière les égalités suivantes :

$$\sigma(E_3) = \tau(L_1, L_2, L_4), \quad \sigma(E_2) = \tau(L_1, L_3, L_4), \quad \text{et} \quad \sigma(E_1) = \tau(L_2, L_3, L_4).$$

La relation de cocycle cherchée se réécrit donc :

$$\sigma(E_2) + \sigma(E_4) = \sigma(E_1) + \sigma(E_3).$$

Pour la prouver on montre que chacun des deux membres est égal à la classe de U dans $W(\mathbb{K})$. Supposons prouvé que l'orthogonal dans U de $E_2 \cap E_4$ est $E_2 + E_4$. Alors par le lemme ci-dessous, $\sigma(U) = \sigma(E_2 + E_4) = \sigma(E_2) + \sigma(E_4)$, la dernière égalité provenant du fait que $E_2 \cap E_4$ est orthogonal à E_2 et E_4 . Il nous reste à voir que

$$(E_2 \cap E_4)^\perp = E_2 + E_4$$

(l'égalité $\sigma(U) = \sigma(E_1) + \sigma(E_3)$ se prouvant de même). Si a est un vecteur de $L_1 \cap L_3$ on a $\phi(v, (a, 0, -a, 0)) = \frac{1}{2}(\omega(v_2, a) - \omega(v_4, a)) = \omega(v_2, a) = \omega(a, v_4)$. Donc si v est dans E_2 ou E_4 cette dernière quantité est nulle. Si à l'inverse cette quantité est nulle pour tout a de $L_1 \cap L_3$, le vecteur v_2 se trouve dans l'orthogonal de $L_1 \cap L_3$ qui est $L_1 + L_3$ puisque ces deux espaces sont lagrangiens. On note $v_2 = v_{12} + v_{32}$. On peut alors écrire $v = (-v_{12}, v_2, -v_{32}, 0) + (v_1 + v_{12}, 0, v_3 + v_{32}, v_4)$. Le vecteur v est dans $E_2 + E_4$. \square

LEMME (2.2.2). Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique. Si S est un sous-espace isotrope de V et L un supplémentaire de S dans S^\perp on a dans $W(\mathbb{K})$:

$$\sigma(V) = \sigma(S^\perp) = \sigma(L).$$

Preuve : on le prouve dans le cas où la forme est non-dégénérée. Le cas général s'y ramène en factorisant par le radical de la forme considérée. L'égalité $\sigma(S^\perp) = \sigma(L)$ est claire, il nous suffit donc de prouver $\sigma(V) = \sigma(L)$.

Supposons que v soit dans $L \cap L^\perp$. En particulier, puisque v est dans L il est orthogonal à S . Donc v est orthogonal à $S \oplus L$, c'est-à-dire dans $S^{\perp\perp} = S$. Le vecteur v est alors nul car $S \cap L = \{0\}$. Donc L et L^\perp sont supplémentaires. Pour prouver l'égalité voulue il suffit de voir que L^\perp est hyperbolique. Or S est un sous-espace isotrope de L^\perp . Il suffit de vérifier qu'il est égal à son orthogonal dans L^\perp ce qui assure que L^\perp est hyperbolique. \square

Rappelons maintenant la construction suivante, appelée parfois *contraction* : si F est un sous-espace isotrope de E , le quotient F^\perp/F est naturellement muni d'une forme symplectique. En outre si L est un lagrangien de E , il n'est pas difficile de vérifier que $L^F = (L \cap F^\perp + F)/F$ est un lagrangien de F^\perp/F .

Supposons alors que L_1, L_2, L_3 soient trois lagrangiens de E et considérons le sous-espace isotrope suivant :

$$F = L_1 \cap L_2 + L_2 \cap L_3 + L_3 \cap L_1.$$

On note toujours V le sous-espace de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ formé des vecteurs dont la somme des trois coordonnées est nulle, et V^F le sous-espace défini de manière analogue dans $L_1^F \oplus L_2^F \oplus L_3^F$. Si v est dans V , chacun des vecteurs v_1, v_2, v_3 est dans F^\perp . On dispose donc d'une application naturelle $V \rightarrow V^F$. Elle envoie la forme quadratique f sur la forme quadratique correspondante f^F . En outre son noyau est contenu dans le radical de f , donc :

$$\tau(L_1, L_2, L_3) = \tau(L_1^F, L_2^F, L_3^F).$$

Autrement dit, l'indice de Maslov est invariant par cette contraction. Ce résultat peut par exemple être utile pour étendre à tous les triplets de lagrangiens un résultat déjà connu pour les triplets de lagrangiens deux-à-deux transverses. En effet, on peut vérifier que les trois lagrangiens L_1^F, L_2^F, L_3^F sont deux-à-deux transverses.

(2.3) Définitions supplémentaires de l'indice de Maslov. On donne ici d'autres manières de représenter l'indice de Maslov par une certaine forme quadratique. Notamment on fait le lien entre la définition donnée au paragraphe précédent et celle de [15].

Dans [15], l'indice de Maslov est défini comme la classe de la forme quadratique Q définie sur $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ par :

$$Q(x) = \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1).$$

Notons provisoirement $\mu(L_1, L_2, L_3)$ l'indice ainsi défini.

PROPOSITION (2.3.1). *Si $E = L_1 \oplus L_3$, alors l'indice μ se représente par la forme quadratique q sur L_2 définie par :*

$$q(x) = \omega(p_1x, p_3x).$$

Ici, p_1 (resp. p_3) est la projection sur L_1 (resp. L_3) parallèlement à L_3 (resp. L_1).

Preuve : on considère la transformation de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ dans lui-même :

$$y_1 = x_1 - p_1x_2, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - p_3x_2.$$

La forme quadratique Q est alors transformée en :

$$\tilde{Q}((y_1, y_2, y_3)) = -\omega(y_1, y_3) + \omega(p_1y_2, p_3y_2).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $L_1 \oplus L_3$ muni de la forme $-\omega(y_1, y_3)$ est hyperbolique. On en déduit la proposition. \square

Supposons maintenant L_1, L_2, L_3 deux à deux transverses et montrons que les indices τ et μ coïncident. En notant toujours V le sous-espace de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ formé des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle dans E , on a un isomorphisme :

$$L_2 \rightarrow V$$

$$v \mapsto x_v = (-p_1(v), v, -p_3(v)).$$

On a $\omega(p_1(v), p_3(v)) = \omega(v, p_3(v)) = \omega(v, -p_1(v)) = f(x_v, x_v)$. Donc par la proposition ci-dessus, $\tau(L_1, L_2, L_3) = \mu(L_1, L_2, L_3)$. Ainsi l'indice μ coïncide avec l'indice que nous avons défini. Puisque notre indice est invariant par contraction, il suffit de vérifier que μ l'est également, ce qui assurera que $\mu = \tau$ dans tous les cas. Ceci est impliqué par les résultats de [15] et [21]. Expliquons brièvement pourquoi.

Dans [15] l'invariance par contraction est prouvée dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En fait, en relisant la preuve on constate qu'elle est vraie dès que μ satisfait la relation de cocycle. Celle-ci est satisfaite dès que l'on a la propriété suivante (toujours par [15]) :

Propriété (2.3.2). Si (E, ω) est un espace vectoriel symplectique sur \mathbb{K} , et si L_1, L_2, L_3, L_4 sont quatre lagrangiens de E , on peut trouver un cinquième lagrangien transverse à L_1, L_2, L_3 et L_4 .

D'après [21] ceci est vrai dès que le corps a au moins quatre éléments. Dans le cas de \mathbb{F}_3 , la relation de cocycle est encore vraie, en utilisant une extension adéquate et un résultat sur le groupe de Witt (on se réfère à [21] là encore). Donc μ est invariant par contraction quel que soit le corps \mathbb{K} (de caractéristique distincte de 2) et μ coïncide bien avec l'indice de Maslov que nous avons défini. On a donc prouvé la

PROPOSITION (2.3.3). *Pour tout triplet de lagrangiens (L_1, L_2, L_3) , on a l'égalité*

$$\tau(L_1, L_2, L_3) = \mu(L_1, L_2, L_3).$$

Enfin, une dernière manière de représenter l'indice de Maslov des trois lagrangiens L_1, L_2, L_3 est de considérer la forme quadratique non-dégénérée sur

$$\frac{L_1 \cap (L_2 + L_3)}{L_1 \cap L_2 + L_1 \cap L_3}$$

qui à un vecteur x représenté par $x_1 = x_2 + x_3$, associe $q(x) = \omega(x_1, x_2)$. Il suit facilement de notre première définition que cette forme quadratique représente l'indice de Maslov $\tau(L_1, L_2, L_3)$.

Le groupe symplectique $\text{Sp}(E, \omega)$ agit transitivement sur l'ensemble des lagrangiens d'une part, et sur l'ensemble des paires de lagrangiens transverses d'autre part. Ce n'est plus le cas pour les triplets de lagrangiens transverses, puisque l'indice de Maslov est invariant par l'action du groupe symplectique. Par contre la définition de la Proposition (2.3.1) permet de montrer que l'indice de Maslov est un invariant complet pour l'action de $\text{Sp}(E, \omega)$ sur les triplets de lagrangiens deux-à-deux transverses.

PROPOSITION (2.3.4). *Soient L_1, L_2, L_3 et L'_1, L'_2, L'_3 deux triplets de lagrangiens deux à deux transverses. Supposons que $\tau(L_1, L_2, L_3) = \tau(L'_1, L'_2, L'_3)$. Alors il existe g dans $\text{Sp}(E, \omega)$ tel que $L'_1 = g(L_1), L'_2 = g(L_2)$ et $L'_3 = g(L_3)$.*

Preuve : on utilise donc la Proposition (2.3.1) pour représenter les indices de Maslov par les formes non-dégénérées $q : x \mapsto \omega(p_1(x), p_3(x))$ sur L_2 et $q' : x \mapsto \omega(p'_1(x), p'_3(x))$ sur L'_2 . Dire que les deux triplets ont le même indice de Maslov c'est dire qu'il existe deux modules hyperboliques S et S' tels que $L_2 \oplus S \simeq L'_2 \oplus S'$. Alors, S et S' ont nécessairement le même rang, et sont par conséquent

isomorphes (tout module hyperbolique de rang $2k$ est isomorphe à la somme directe orthogonale de k plans $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ munis de la forme $(x, y) \mapsto 2xy$). Ceci implique alors que L_2 et L'_2 , munis de leurs formes quadratiques, sont isomorphes (c'est un cas particulier d'un théorème de Witt, cf. [20] page 8). Fixons un isomorphisme

$$f : L_2 \rightarrow L'_2.$$

Soit v_1, \dots, v_n une base orthogonale de L_2 pour q . Alors $b = (p_1(v_l), p_3(v_l))$ est une base symplectique de E (dans le sens où $\omega(p_1(v_i), p_1(v_j)) = 0$, $\omega(p_3(v_i), p_3(v_j)) = 0$, $\omega(p_1(v_i), p_3(v_j)) = \delta_{ij}\alpha_i$ pour des éléments α_i de \mathbb{K}^\times). De même, $b' = (p'_1 f(v_l), p'_3 f(v_l))$ est une autre base symplectique de E (avec des coefficients α_i identiques). La transformation g qui envoie b sur b' est symplectique et envoie le triplet (L_1, L_2, L_3) sur le triplet (L'_1, L'_2, L'_3) . \square

3. Théorème de Novikov-Wall et applications

Tous les groupes de cohomologie (ou d'homologie) que l'on considérera sont des groupes de cohomologie (d'homologie) singulière, à coefficients dans un corps \mathbb{K} fixé.

(3.1) Trois lagrangiens dans $H^{2n-1}(\Sigma)$. On suppose ici que X est une variété compacte, connexe, orientée, de dimension $4n-1$ et de bord Σ . On notera $[X] \in H_{4n-1}(X, \Sigma)$ la classe fondamentale de X et $[\Sigma] = \partial_* [X] \in H_{4n-2}(\Sigma)$ celle de Σ , induite par l'orientation de X . Enfin on désignera par $x \cdot_X y$ et $x \cdot_\Sigma y$ les formes bilinéaires d'intersection

$$H^{2n-1}(X) \times H^{2n}(X, \Sigma) \rightarrow \mathbb{K}$$

et $H^{2n-1}(\Sigma) \times H^{2n-1}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{K}$.

Par dualité de Poincaré, ces deux formes sont non-dégénérées. La forme $x \cdot_\Sigma y$ est anti-symétrique et munit l'espace $H^{2n-1}(\Sigma)$ d'une structure symplectique.

On considère la partie suivante de la suite exacte longue de cohomologie associée à la paire (X, Σ) :

$$H^{2n-1}(X) \xrightarrow{\pi} H^{2n-1}(\Sigma) \xrightarrow{j} H^{2n}(X, \Sigma).$$

On a le :

LEMME (3.1.1). Si $a \in H^{2n-1}(\Sigma)$ et $b \in H^{2n-1}(X)$, on a :

$$a \cdot_\Sigma \pi(b) = b \cdot_X j(a).$$

Preuve : c'est une conséquence de la formule

$$\partial(x \cup y) = \partial x \cup y + (-1)^{\deg x} x \cup \partial y.$$

On prend pour x un cocycle sur X qui représente b et pour y une cochaîne sur X dont la restriction à Σ est un cocycle représentant a . \square

Donnons une brève interprétation géométrique de ce lemme. Supposons que $n = 1$. La variété ambiante X est donc de dimension 3. En utilisant les isomorphismes de dualité de Poincaré on peut donner une version homologique du résultat. L'élément b devient une chaîne de dimension 2 dont le bord $\pi(b)$ est dans la surface Σ . L'élément a est un cycle de dimension 1 dans Σ . Le lemme

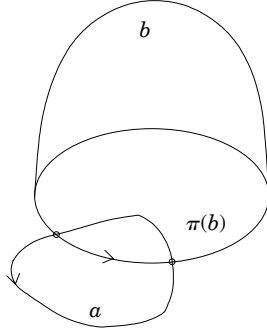


Figure 1.

affirme que le nombre d'intersection de a et de $\pi(b)$ dans la surface Σ , est le même que celui de a et de b dans X (fig. 1).

Une conséquence de ce lemme est que le sous-espace $L = \text{Ker } j = \text{Im } \pi$ est isotrope pour la forme symplectique de $H^{2n-1}(\Sigma)$. En outre, si a est orthogonal à L , on a pour tout b de $H^{2n-1}(X)$, $b \cdot_X j(a) = 0$. Donc $j(a)$ est nul, et a est lui-même dans L . Le sous-espace L est égal à son propre orthogonal, c'est-à-dire est lagrangien. On a donc prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION (3.1.2). *L'image de l'application $H^{2n-1}(X) \rightarrow H^{2n-1}(\Sigma)$ est un lagrangien de $H^{2n-1}(\Sigma)$.*

Donnons maintenant un argument plus géométrique en faveur de la proposition précédente. En utilisant, là encore, les isomorphismes de dualité de Poincaré, cette proposition affirme que le noyau de l'application $H_{2n-1}(\Sigma) \rightarrow H_{2n-1}(X)$ est un lagrangien pour la forme d'intersection de Σ . Le calcul de la dimension de ce noyau peut se faire en utilisant des arguments de dualité de Poincaré. Pour montrer qu'il est isotrope pour la forme d'intersection on peut se souvenir de l'argument suivant de Milnor [19]. Supposons que A et B soient des variétés différentiables compactes orientées immergées dans X , dont les bords sont contenus dans Σ . Alors les classes $\partial_*[A]$ et $\partial_*[B]$ sont dans l'image de $H_{2n}(X) \rightarrow H_{2n-1}(\Sigma)$, c'est-à-dire le noyau précédemment considéré. Supposons maintenant que, par une petite homotopie, on ait rendu A et B transverses. Alors $A \cap B$ est une sous-variété de dimension 1 de X , son bord $\partial A \cap \partial B$ est formé d'un nombre pair de points (fig. 2).

Le nombre d'intersection des classes $\partial_*[A]$ et $\partial_*[B]$ dans $H_{2n-1}(\Sigma)$ est alors le nombre de ces points, chacun étant compté avec son orientation. Puisque que l'on peut associer ces points deux à deux avec des orientations opposées, cette somme est nulle. Donc $\partial_*[A] \cdot_{\Sigma} \partial_*[B]$ est nul. Bien sûr, cet argument ne s'applique que dans le cas où toutes les classes intervenant sont représentées par des sous-variétés immergées.

Revenons à la situation du théorème de Novikov-Wall. On considère donc une variété (de dimension $4n$) obtenue en recollant les variétés M_1 et M_2 selon une sous-variété à bord, compacte, X_0 , de leur bord. On désignera par Σ le bord de X_0 et par X_1 et X_2 le complémentaire de l'intérieur de X_0 dans les bords de M_1 et M_2 . Ainsi, dans M , la sous-variété Σ peut être vue comme le bord de

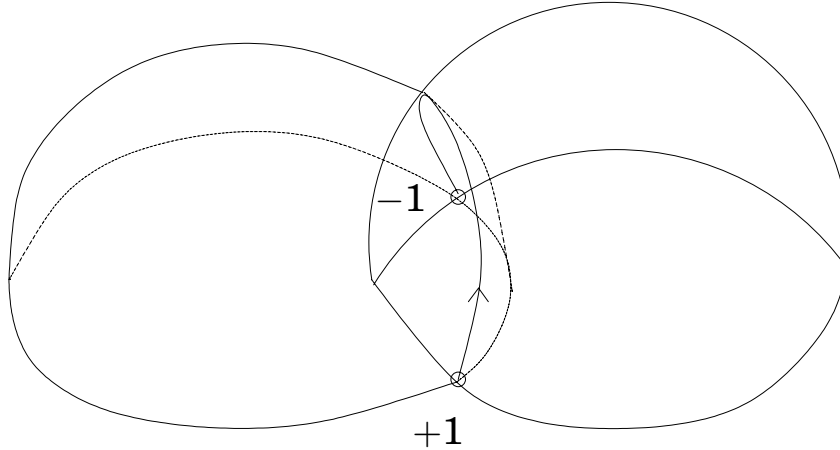


Figure 2.

trois variétés de dimensions $4n - 1$ distinctes : $X_0, X_1,$ et X_2 . Les images L_i des applications $H^{2n-1}(X_i) \rightarrow H^{2n-1}(\Sigma)$ fournissent donc trois lagrangiens de $H^{2n-1}(\Sigma)$. On pourra calculer leur indice de Maslov dès lors qu'une orientation de Σ sera fixée.

Le début du paragraphe suivant est consacré à des précisions sur l'orientation relative de toutes les variétés considérées.

(3.2) Théorème de Novikov-Wall. L'homologie de M peut être calculée en considérant l'homologie du complexe $C_*(M_1 + M_2)$ formé des chaînes sommes de simplexes dont l'image est contenue ou bien dans M_1 , ou bien dans M_2 . Ainsi on dispose d'applications naturelles de $H_k(M, \partial M)$ vers $H_k(M_i, \partial M_i)$. On dispose pour la même raison d'applications de l'homologie de ∂M_i vers l'homologie relative de X_0 par exemple. De même, la cohomologie de M peut être calculée à partir du complexe $\text{Hom}(C_*(M_1 + M_2), \mathbb{K})$.

On suppose qu'une classe fondamentale $[M] \in H_{4n}(M, \partial M)$ est fixée. Notons $[M_1]$ et $[M_2]$ les images de $[M]$ par les applications $H_{4n}(M, \partial M) \rightarrow H_{4n}(M_i, \partial M_i)$. Ce sont des classes fondamentales pour M_1 et M_2 . Les classes $\partial_*[M_1]$ et $\partial_*[M_2]$ orientent ∂M_1 et ∂M_2 respectivement. On notera $[X_0]_1$ et $[X_0]_2$ leurs images respectives par les applications

$$H_{4n}(\partial M_i) \rightarrow H_{4n}(X_0, \Sigma).$$

On a supposé que l'homéomorphisme utilisé pour effectuer notre somme connexe inversait l'orientation, c'est-à-dire que $[X_0]_1 = -[X_0]_2$. On notera $[X_0] = [X_0]_1$. Enfin on choisira $\partial_*[X_0] = [\Sigma]$ comme classe fondamentale de Σ . On a alors :

THÉORÈME (3.2.1). *Les variétés M, M_1, M_2 et Σ étant orientées comme ci-dessus, on a l'égalité suivante dans le groupe de Witt de \mathbb{K} :*

$$\sigma(M) = \sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \tau(L_1, L_0, L_2).$$

Résumons maintenant la trame de la preuve. Soit N une variété de dimension $4n$ à bord ∂N . On a la suite exacte suivante, associée à la paire $(N, \partial N)$:

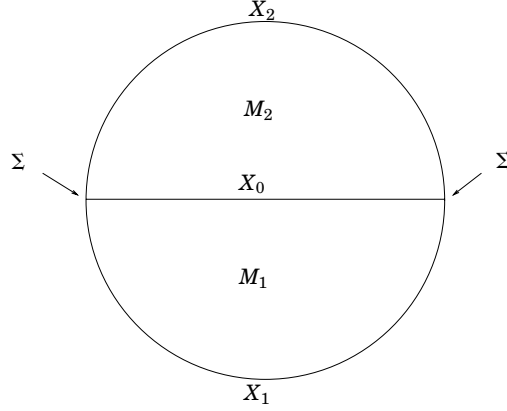


Figure 3. Recollement le long d'une sous-variété à bord

$$H^{2n-1}(\partial N) \longrightarrow H^{2n}(N, \partial N) \xrightarrow{\pi} H^{2n}(N) \xrightarrow{\varphi} H^{2n}(\partial N).$$

La forme bilinéaire d'intersection $x \cdot_N y$, définie sur $H^{2n}(N) \times H^{2n}(N, \partial N)$, met les deux espaces du milieu en dualité. La signature de N sur \mathbb{K} est par définition la classe dans le groupe de Witt de \mathbb{K} de la forme bilinéaire symétrique \mathcal{J}_N sur $H^{2n}(N, \partial N)$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \pi(y) \cdot_N x.$$

Puisque $H^{2n}(N, \partial N)$ et $H^{2n}(N)$ sont duaux l'un de l'autre, on a que le radical de la forme \mathcal{J}_N est égal à l'image de l'application $H^{2n-1}(\partial N) \rightarrow H^{2n}(N, \partial N)$. On choisit un supplémentaire G_N de cette image dans $H^{2n}(N, \partial N)$. On identifie ainsi les espaces $G_N \subset H^{2n}(N, \partial N)$ et $\text{Ker } \varphi \subset H^{2n}(N)$. On applique cette remarque au cas où N est l'une des trois variétés M, M_1, M_2 . On va alors écrire $G_M = G_{M_1} \oplus G_{M_2} \oplus V$, où la somme sera orthogonale relativement à \mathcal{J}_M et où la restriction de \mathcal{J}_M à G_{M_i} coïncidera avec \mathcal{J}_{M_i} . Le défaut δ recherché est alors :

$$\delta = \sigma(M) - \sigma(M_1) - \sigma(M_2) = \sigma(V).$$

On construira ensuite un sous-espace isotrope S de V . En notant S^\perp l'orthogonal de S dans V et en écrivant $S^\perp = S \oplus L$, il suffira alors d'identifier $\sigma(L)$ à l'indice de Maslov, en vertu du Lemme (2.2.2) On peut maintenant rentrer dans les détails.

On a deux applications naturelles

$$H^{2n}(M_1, \partial M_1) \xrightarrow{f_1} H^{2n}(M)$$

$$H^{2n}(M_2, \partial M_1) \xrightarrow{f_2} H^{2n}(M).$$

Ces deux applications sont en fait définies au niveau des cochaînes. Par exemple, l'image par f_1 d'une cochaîne nulle sur le bord de M_1 est égal à son prolongement par 0 sur toutes les chaînes contenues dans M_2 . Il est bien clair que f_1 et f_2 ont des images contenues dans $\text{Ker } \varphi = \text{Im } \pi$. On peut donc les considérer comme étant à valeurs dans G_M .

LEMME (3.2.2). *On a*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{M_1}(u, v) &= \mathcal{J}_M(f_1(u), f_1(v)) \text{ pour } u, v \in H^{2n}(M_1, \partial M_1), \\ \mathcal{J}_{M_2}(u, v) &= \mathcal{J}_M(f_2(u), f_2(v)) \text{ pour } u, v \in H^{2n}(M_2, \partial M_2), \\ \mathcal{J}_M(f_1(u), f_2(v)) &= 0 \text{ pour } u \in H^{2n}(M_1, \partial M_1) \text{ et } v \in H^{2n}(M_2, \partial M_2). \end{aligned}$$

Preuve : on prouve le premier point seulement, les deux autres sont identiques. Quand on calcule le nombre $\mathcal{J}_M(f_1(v), f_1(u))$, on prend des cochaînes qui représentent chacune des deux classes $f_1(v)$ et $f_1(u)$, que l'on évalue sur tous les simplexes de la classe $[M]$. Il suffit de considérer les simplexes contenus dans M_1 puisque $f_1(u)$ et $f_1(v)$ sont nuls ailleurs. On évalue donc en fait le cup-produit des deux cochaînes sur $[M_1]$. \square

Puisque les formes \mathcal{J}_{M_1} et \mathcal{J}_{M_2} sont non-dégénérées sur G_{M_1} et G_{M_2} , le lemme implique que f_1 et f_2 sont injectives, une fois restreintes à G_{M_1} et G_{M_2} . En outre puisque leurs images sont orthogonales on peut écrire :

$$G_M = G_{M_1} \oplus G_{M_2} \oplus V$$

où V est l'orthogonal de $G_{M_1} \oplus G_{M_2}$ dans G_M .

On peut maintenant considérer l'application $g_1 : H^{2n-1}(\partial M_1) \rightarrow H^{2n}(M_1, \partial M_1)$, issue de la suite exacte longue de cohomologie associée à la paire $(M_1, \partial M_1)$. En composant avec f_1 on obtient une application $s_1 : H^{2n-1}(\partial M_1) \rightarrow G_M$. On construit de même une application $s_2 : H^{2n-1}(\partial M_2) \rightarrow G_M$. On note S la somme des images de s_1 et s_2 dans G_M . Considérons un élément u de $H^{2n-1}(\partial M_1)$. Par le lemme précédent, et puisque $s_1 = f_1 g_1$, on a :

$$(*) \quad \mathcal{J}_M(s_1(u), f_1(v)) = \mathcal{J}_{M_1}(g_1(u), v)$$

pour tout v de $H^{2n}(M_1, \partial M_1)$. Puisque l'image de g_1 est le radical de \mathcal{J}_{M_1} , cette quantité est toujours nulle. On en déduit que l'image de s_1 est orthogonale à l'image de G_{M_1} dans G_M . Puisque l'image de s_1 est contenue dans celle de f_1 , elle est aussi orthogonale à G_{M_2} . On a de la même manière que l'image de s_2 est orthogonale à $G_{M_1} \oplus G_{M_2} \subset G_M$. Donc le sous-espace S est contenu dans V . En outre l'équation (*), ainsi que l'équation correspondante pour s_2 assurent que S est isotrope. Il nous reste à calculer l'orthogonal de S dans V . Or l'orthogonal de S dans V est égal à l'orthogonal de $\text{Im } f_1 + \text{Im } f_2$ dans G_M .

Considérons la partie suivante de la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$H^{2n-1}(X_0) \longrightarrow H^{2n}(M) \longrightarrow H^{2n}(M_1) \oplus H^{2n}(M_2).$$

On note r_1 et r_2 les deux composantes de la flèche de droite dans le diagramme ci-dessus.

PROPOSITION (3.2.3). *L'orthogonal de S dans V est :*

$$\text{Im}(H^{2n-1}(X_0) \rightarrow H^{2n}(M)) \cap \text{Ker } \varphi.$$

Preuve : Soit v un élément de $H^{2n}(M) \cap \text{Ker } \varphi$. Il suffit d'établir les deux égalités :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_M(v, f_1(u)) &= r_1(v) \cdot_{M_1} u \\ \mathcal{J}_M(v, f_2(u')) &= r_2(v) \cdot_{M_2} u' \end{aligned}$$

pour u dans $H^{2n}(M_1, \partial M_1)$ et u' dans $H^{2n}(M_2, \partial M_2)$. Puisque les formes bilinéaires $x \cdot_{M_i} y : H^{2n}(M_i) \times H^{2n}(M_i, \partial M_i) \rightarrow \mathbb{K}$ sont non-dégénérées on aura le résultat voulu. \square

Il nous reste pour conclure à construire une application

$$Y : S^\perp \rightarrow W = \frac{L_0 \cap (L_1 + L_2)}{L_0 \cap L_1 + L_0 \cap L_2}$$

de noyau S , et envoyant la restriction de J_M à S^\perp sur la forme définie à la fin du paragraphe 2.3 :

$$[x_0 = x_1 + x_2] \mapsto \omega(x_0, x_1).$$

Regardons le diagramme commutatif suivant. Les lignes proviennent de la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à M et ∂M décomposées respectivement selon M_1 et M_2 et X_1 et X_2 .

$$\begin{array}{ccccccc} H^{2n-1}(M_1) \oplus H^{2n-1}(M_2) & \longrightarrow & H^{2n-1}(X_0) & \xrightarrow{\tau_1} & H^{2n}(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ H^{2n-1}(X_1) \oplus H^{2n-1}(X_2) & \xrightarrow{\tau_2} & H^{2n-1}(\Sigma) & \xrightarrow{\tau_3} & H^{2n}(\partial M) \end{array}$$

Si x_i est dans $H^{2n-1}(X_i)$, on notera \bar{x}_i son image dans $H^{2n-1}(\Sigma)$.

Considérons un élément y de S^\perp . On peut écrire $y = \tau_1(x_0)$. Puisque $\varphi(y) = 0$, \bar{x}_0 est dans l'image de τ_2 , c'est-à-dire dans $L_1 + L_2$. Puisqu'un élément du noyau de τ_1 s'envoie dans $L_0 \cap L_1 + L_0 \cap L_2$, on obtient une application Y bien définie de S^\perp dans W . Elle est surjective car si $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ représente un élément de W , $\tau_3(\bar{x}_0) = 0$ donc $\tau_1(x_0)$ est bien dans le noyau de φ . On a alors $Y(\tau_1(x_0)) = [\bar{x}_0]$. Vérifions que le noyau de Y est S .

$$\begin{array}{ccc} & H^{2n-1}(\partial M_1) \xrightarrow{s_1} H^{2n}(M) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ H^{2n-1}(X_1) & & H^{2n-1}(X_0) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H^{2n-1}(\Sigma) & \end{array}$$

Si x est dans $H^{2n-1}(\partial M_1)$, notons x_0 et x_1 ses restrictions à X_0 et X_1 respectivement. Puisque l'image de x_0 par τ_1 est $s_1(x)$, $Y(s_1(x))$ est représenté par \bar{x}_0 . Mais $\bar{x}_0 = \bar{x}_1$ est dans $L_0 \cap L_1$. Donc l'image de s_1 est contenue dans le noyau de Y . De même, l'image de s_2 est contenue dans ce noyau. Réciproquement, considérons un élément $y = \tau_1(x_0) \in S^\perp$ qui est dans le noyau de Y . On peut écrire $\bar{x}_0 = \bar{a}_0 + \bar{b}_0$ avec $\bar{a}_0 \in L_0 \cap L_1$ et $\bar{b}_0 \in L_0 \cap L_2$. Ceci implique que l'on peut trouver $a \in H^{2n-1}(\partial M_1)$ et $b \in H^{2n-1}(\partial M_2)$, qui se restreignent à a_0 et b_0 sur X_0 . Alors $y - s_1(a) - s_2(b) = \tau_1(v)$ où $v = x_0 - a_0 - b_0$ est dans l'image de l'application $H^{2n-1}(X_0, \Sigma) \rightarrow H^{2n-1}(X_0)$. On peut donc représenter v par un cocycle c sur X_0 , nul sur Σ . Prolongeons c par 0 sur ∂M_1 . Puisque la cohomologie de ∂M_1 peut être calculée à partir du complexe $\text{Hom}(C_*(X_0 + X_1), \mathbb{K})$ où $C_*(X_0 + X_1)$ est le complexe des chaînes sommes de simplexes dans X_0 ou dans X_1 , c est un cocycle. On vérifie facilement que $\tau_1(v) = s_1([c])$, donc $y = s_1(a) + s_2(b) + s_1([c])$ est dans S .

Identifions maintenant les formes quadratiques. Supposons que $\bar{x}_0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ soit dans $H^{2n-1}(\Sigma)$. On peut toujours trouver des cocycles $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ représentant x_0, x_1, x_2 telles que $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$ sur Σ . Rappelons la construction de $\tau_1(x_0)$. On choisit des cochaînes ψ_1 et ψ_2 , définies sur M_1 et M_2 respectivement, telles

que $\psi_1 - \psi_2 = \varphi_0$, sur X_0 . On peut toujours supposer que $\varphi_1 = \psi_1$ sur X_1 et $\varphi_2 = -\psi_2$ sur X_2 . La classe de cohomologie $\tau_1(x_0)$ est alors représentée par le cocycle ψ , égal à $\psi_1 \circ \partial$ sur M_1 et à $\psi_2 \circ \partial$ sur M_2 . On doit vérifier l'égalité suivante :

$$\mathcal{J}_M(\tau_1(x_0), \tau_1(x_0)) = -\bar{x}_0 \cdot_{\Sigma} \bar{x}_1.$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_M(\tau_1(x_0), \tau_1(x_0)) &= (\psi \cup \psi)([M]) \\ &= (\psi_1 \circ \partial \cup \psi_1 \circ \partial)([M_1]) + (\psi_2 \circ \partial \cup \psi_2 \circ \partial)([M_2]) \\ &= (\psi_1 \cup \psi_1 \circ \partial)([X_1] + [X_0]) + (\psi_2 \cup \psi_2 \circ \partial)([X_2] - [X_0]) \\ &= ((\psi_1 - \psi_2) \cup \psi_1 \circ \partial)([X_0]) + (\psi_1 \cup \psi_1 \circ \partial)([X_1]) + (\psi_2 \cup \psi_2 \circ \partial)([X_2]). \end{aligned}$$

Le premier de ces trois termes vaut $x_0 \cdot_{X_0} j(\bar{x}_1)$. Ici j désigne l'application naturelle $H^{2n-1}(\Sigma) \rightarrow H^{2n}(X_0, \Sigma)$. Mais par le Lemme (3.1.1), ceci vaut $-\bar{x}_0 \cdot_{\Sigma} \bar{x}_1$. Il nous reste donc à vérifier que les deux derniers termes ci-dessus sont nuls. Mais $\psi_i \circ \partial$ est nul sur X_i , si on a supposé $\psi_i = \pm \varphi_i$ sur X_i .

(3.3) Cocycle signature de Meyer. Le théorème de Novikov-Wall permet par exemple de calculer la signature d'une variété différentiable de dimension 4 fibrée en surfaces au-dessus d'un pantalon (et donc de toute variété de dimension 4 fibrée au-dessus d'une surface). Le résultat obtenu a été prouvé initialement par Meyer [17] par des arguments de suites spectrales. La preuve suivante est tirée de [10]. Bien sûr, on peut se placer dans le cadre de la dimension $4n$.

On désigne par P la sphère S^2 privée de trois disques ouverts, avec son orientation usuelle. On note également F une variété (compacte sans bord) orientée de dimension $4n-2$. Si $\pi : M \rightarrow P$ est une fibration localement triviale au-dessus de P , de fibre F , dont le groupe structural préserve l'orientation de F , les orientations de F et de P induisent une orientation de M . Notons P_a et P_b les parties de P obtenues en découpant le long du chemin c (figure 4). Elles sont homéomorphes au produit d'un cercle par un intervalle. La composition $\pi^{-1}(P_a) \rightarrow P_a \rightarrow [0, 1]$ est encore une fibration et est donc trivialisable. La variété $X_1 = \pi^{-1}(P_a)$ est homéomorphe à $N^{4n-1} \times [0, 1]$, donc de signature nulle. Pour la même raison $X_2 = \pi^{-1}(P_b)$ est de signature nulle.

Notons X_0 , l'image inverse par π du chemin c dans P , et Σ la réunion des fibres au-dessus de c_0 et de c_1 . On identifie l'espace $H_{2n-1}(\Sigma) = H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1)) \oplus H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_0))$ à $E = H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1)) \oplus H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1))$ par la monodromie associée au chemin c . L'orientation de $\pi^{-1}(P_a)$ induit une orientation de X_0 , qui induit elle-même une orientation de $\Sigma = \pi^{-1}(c_0) \cup \pi^{-1}(c_1)$. On note ω la forme symplectique sur $H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1))$ induite par cette orientation. En identifiant alors $H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_0))$ à $H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1))$ par la monodromie de c , la forme symplectique fournie par l'orientation de $\pi^{-1}(c_0)$ s'envoie sur $-\omega$. Ainsi, l'espace $H_{2n-1}(\Sigma)$, orienté comme dans le théorème de Novikov-Wall, s'identifie à l'espace $E = H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1)) \oplus H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1))$ muni de la forme $\omega \oplus -\omega$.

Notons maintenant γ_a et γ_b les éléments de $\text{Sp}(H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1)), \omega)$ correspondant à l'action des générateurs a et b du groupe fondamental du pantalon représentés sur la figure 4. Nous allons vérifier que les graphes de $-\text{id}$, de $-\gamma_a$ et de $-\gamma_b$ dans E sont les noyaux des applications $H_{2n-1}(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow H_{2n-1}(X_i, \mathbb{R})$.

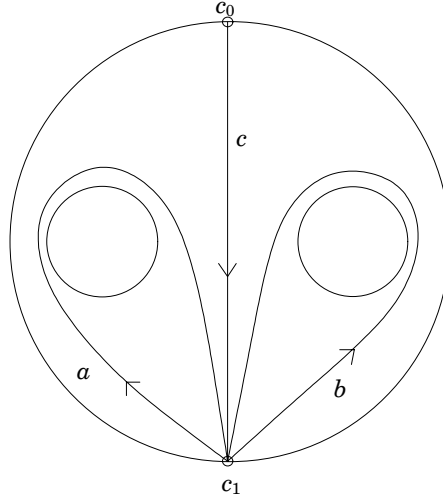


Figure 4.

Prouvons le dans un cas seulement, les deux autres sont identiques. La monodromie le long de c fournit une application $f : \pi^{-1}(c_0) \times [0, 1] \rightarrow X_0$ telle que f_t est un difféomorphisme de $\pi^{-1}(c_0)$ sur $\pi^{-1}(c_t)$, pour tout t . On peut alors construire un opérateur de prisme P , des k -chaînes de $\pi^{-1}(c_0)$ vers les $(k + 1)$ -chaînes de X_0 , qui satisfait : $\partial P + P\partial = f_{1*} - f_{0*}$. Si u est un $(2n - 1)$ -cycle dans $\pi^{-1}(c_0)$, la classe définie par $(f_{1*}(u), -u)$ dans $H_{2n-1}(\Sigma)$ borde donc dans X_0 . La classe correspondante dans E est $(f_{1*}(u), -f_{1*}(u))$. Le graphe de $-id$ est donc bien le noyau de l'application $H_{2n-1}(\Sigma, \mathbb{R}) \rightarrow H_{2n-1}(X_0, \mathbb{R})$.

Définissons maintenant le cocycle de Meyer sur le groupe symplectique. On considère $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme symplectique $\omega \oplus -\omega$ (ω désignant la forme symplectique canonique de \mathbb{R}^{2n}). Si γ est un élément du groupe symplectique, son graphe

$$\text{Graphe}(\gamma) = \{(v, \gamma(v)), v \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

est un lagrangien de $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. Si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont trois éléments du groupe symplectique, on peut donc considérer l'indice de Maslov de leurs graphes dans $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. On note $\text{meyer}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ cet entier. Si x et y sont des éléments de $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, l'application $(u, v) \mapsto (x^{-1}(u), y(v))$ est une transformation symplectique de $\mathbb{R}^{2n} \oplus \mathbb{R}^{2n}$. On en déduit que $\text{meyer}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \text{meyer}(x\gamma_1y, x\gamma_2y, x\gamma_3y)$. On pose alors

$$\text{Meyer}(\gamma_1, \gamma_2) = \text{meyer}(1, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2).$$

Ceci définit un 2-cocycle borné sur le groupe symplectique. En outre, Meyer est invariant par conjugaison. On renvoie à [3] pour le lien entre la classe de cohomologie définie par le cocycle de Meyer et la classe de cohomologie définie précédemment grâce à l'indice de Maslov, et pour un calcul détaillé du cocycle de Meyer sur $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Après avoir choisi une identification entre $H_{2n-1}(\pi^{-1}(c_1))$ et \mathbb{R}^{2n} , munis de leurs formes symplectiques respectives, on peut considérer γ_a et γ_b comme des

éléments du groupe $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ (définis à conjugaison près). La signature de M est donc

$$\text{meyer}(-\gamma_a, -\text{id}, -\gamma_b) = \text{meyer}(\text{id}, \gamma_a^{-1}, \gamma_a^{-1}\gamma_b).$$

On obtient bien le théorème déjà prouvé par Meyer dans [17].

THÉORÈME (3.3.1). *La signature de M ne dépend que de l'action des générateurs du groupe fondamental de P sur l'homologie de dimension $2n - 1$ de la fibre. Avec les notations précédentes :*

$$\sigma(M) = \text{Meyer}(\gamma_a^{-1}, \gamma_b).$$

(3.4) Signature et fonction de Morse. On suppose ici que M est une variété différentiable, compacte sans bord, de dimension $4n$. Considérons une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de points critiques x_1, \dots, x_p . On suppose en outre que les valeurs critiques $\lambda_i = f(x_i)$ sont toutes distinctes, par exemple que $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$. Le théorème de Novikov-Wall permet alors de calculer la signature de M à partir de f . L'énoncé du théorème suivant m'a été suggéré par Étienne Ghys.

THÉORÈME (3.4.1). *La signature de M s'écrit :*

$$\sigma(M) = \sum_i s(x_i)$$

où la somme porte sur les points critiques de f d'indice $2n$. L'entier $s(x_i)$ est compris entre -1 et 1 et est la signature de la variété $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$, pour tout ϵ suffisamment petit pour que l'intervalle $[\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon]$ ne contienne pas d'autre valeur critique que λ_i .

On décompose l'image de f dans \mathbb{R} en une réunion d'intervalles compacts d'intérieurs disjoints, dont les extrémités ne sont pas des valeurs critiques (excepté pour le maximum et le minimum de f). On demande en outre que chacun de ces intervalles I contienne au plus une valeur critique. On va alors étudier la signature des variétés à bord $f^{-1}(I)$. Puisque chacun de ces intervalles est de la forme $I = [a, b]$ où a et b sont des valeurs régulières de f (à l'exception des deux intervalles contenant les extrémités de l'image de f), les variétés $f^{-1}(I)$ sont recollées les unes aux autres le long de niveaux $f^{-1}(a)$, qui sont des variétés compactes sans bord de dimension $4n - 1$. Ainsi par le théorème de Novikov usuel, la signature de M est la somme des signatures des $f^{-1}(I)$. Si l'intervalle I ne contient pas de valeur critique, $f^{-1}(I)$ est diffeomorphe au produit $f^{-1}(a) \times [a, b]$ (par un résultat élémentaire de théorie de Morse). Sa signature est donc nulle. Il suffit donc de prendre en compte les intervalles I contenant une valeur critique. Ceux-ci peuvent être pris de la forme $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$ avec ϵ aussi petit qu'on le souhaite. En effet, changer ϵ en $\epsilon' > \epsilon$ revient à ajouter les variétés $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon', \lambda_i - \epsilon])$ et $f^{-1}([\lambda_i + \epsilon, \lambda_i + \epsilon'])$ qui sont de signatures nulles. Par le théorème de Novikov usuel la signature ne s'en trouve pas affectée. On définit donc l'entier $s(x_i)$ comme la signature de $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$ (avec ϵ assez petit). Nous allons voir que cet entier est nul si le point critique n'est pas d'indice $2n$.

Notons donc l l'indice du point critique x_i . D'après la théorie de Morse, on peut trouver un plongement $\phi : S^{l-1} \times D^{4n-l} \rightarrow f^{-1}(\lambda_i - \epsilon/2)$, tel que la variété $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$ soit diffeomorphe à la variété $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i - \epsilon/2])$,

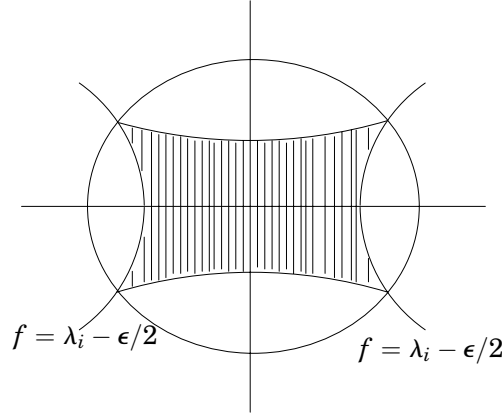


Figure 5. La variété M_1

à laquelle on a recollé l'anse $D^l \times D^{4n-l}$, via le plongement ϕ . La variété $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i - \epsilon/2])$ est de signature nulle car est le produit d'une variété fermée de dimension $4n-1$ par un intervalle. L'anse $D^l \times D^{4n-l}$ est également de signature nulle car est homéomorphe à une boule. Par le théorème de Novikov-Wall, la signature de $f^{-1}([\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon])$ est donc l'indice de Maslov de trois lagrangiens dans l'homologie de dimension $2n-1$ du bord de la sous-variété sur laquelle on a effectué le recollement, c'est-à-dire $S^{l-1} \times S^{4n-l-1}$. Or, si l est différent de $2n$, $S^{l-1} \times S^{4n-l-1}$ n'a pas d'homologie en dimension moitié. L'indice de Maslov cherché est donc nul, et l'entier $s(x_i)$ est nul également.

Supposons maintenant que l soit égal à $2n$. On suppose pour fixer les orientations que $D^{2n} \times D^{2n}$ est la variété M_1 dans le théorème de Novikov-Wall. On choisit une base (u, v) de l'homologie de dimension $2n-1$ de $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$, telle que u corresponde à une classe fondamentale du premier facteur et v à une classe fondamentale du second facteur. En outre, on peut orienter $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$, de sorte que $\mathcal{J}(u, v) = 1$, où \mathcal{J} désigne le nombre d'intersection. On peut toujours supposer que le plongement ϕ envoie l'orientation choisie de $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$ sur l'orientation qui lui est associée par le théorème de Novikov-Wall. Alors le lagrangien L_0 est la droite engendrée par v , le lagrangien L_1 est la droite engendrée par u . La droite L_2 est formée des cycles qui bordent dans le complémentaire dans $f^{-1}(\lambda_i - \epsilon/2)$ de l'image de ϕ . L'indice de Maslov vaut 0 si et seulement si la droite L_2 est égale à l'une des deux droites u ou v . Sinon, la droite L_2 est engendrée par un vecteur de la forme $\cos(\theta)u + \sin(\theta)v$ avec $\theta \in]0, \pi[$. L'indice de Maslov cherché est 1 si $\theta < \pi/2$ et -1 si $\theta > \pi/2$. On obtient bien dans tous les cas un indice borné par 1.

4. Grassmannienne Lagrangienne de \mathbb{R}^{2n} et revêtement universel du groupe symplectique

Dans ce qui suit on notera (p_α, q_α) les coordonnées d'un point de \mathbb{R}^{2n} . On peut identifier \mathbb{R}^{2n} à \mathbb{C}^n par les coordonnées $z_\alpha = p_\alpha + iq_\alpha$. On désigne par ω

la forme symplectique usuelle sur \mathbb{R}^{2n} :

$$\omega((p_\alpha, q_\alpha), (p'_\alpha, q'_\alpha)) = \sum_{\alpha=1}^n q'_\alpha p_\alpha - p'_\alpha q_\alpha$$

et par \langle, \rangle le produit scalaire euclidien :

$$\langle (p_\alpha, q_\alpha), (p'_\alpha, q'_\alpha) \rangle = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha p'_\alpha + q_\alpha q'_\alpha.$$

En notant $(,)$ la forme hermitienne canonique sur \mathbb{C}^n , on a pour des vecteurs x et y de \mathbb{C}^n :

$$(x, y) = \langle x, y \rangle - i\omega(x, y).$$

La forme $(,)$ est \mathbb{C} -linéaire à gauche. On désignera par \mathbb{R}^n le sous-espace de \mathbb{R}^{2n} d'équation $q = 0$, et par $i\mathbb{R}^n$ le sous-espace d'équation $p = 0$.

Les constructions et les résultats des paragraphes 4.1 et 4.2 sont dus à Arnold et proviennent des articles [1] et [2].

(4.1) Propriétés de la Grassmannienne Lagrangienne. On notera Λ_n l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de \mathbb{R}^{2n} . Le groupe unitaire $U(n)$ est contenu dans le groupe symplectique $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Si L est un lagrangien de \mathbb{R}^{2n} , on peut trouver une base v_1, \dots, v_n de L , orthonormée pour le produit scalaire euclidien. Puisque L est isotrope pour ω , la relation entre les structures complexe, euclidienne et symplectique, assure que $\{v_i\}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^n pour sa structure hermitienne. Donc L est l'image de \mathbb{R}^n par une transformation unitaire. L'action du groupe unitaire sur Λ_n est donc transitive, et puisque le stabilisateur de \mathbb{R}^n dans $U(n)$ est $O(n)$, on identifie Λ_n à $U(n)/O(n)$. Soit $\det^2 : \Lambda_n \rightarrow S^1$, l'application qui envoie l'élément $u \cdot O(n)$ sur le carré du déterminant de u . On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} SO(n) & \longrightarrow & O(n) & \longrightarrow & S^0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SU(n) & \longrightarrow & U(n) & \longrightarrow & S^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ SU(n)/SO(n) & \longrightarrow & U(n)/O(n) & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Les deux premières lignes horizontales sont réalisées par le déterminant, la troisième par le carré du déterminant. La flèche verticale de droite est fournie par le revêtement du cercle $z \mapsto z^2$. Toutes les suites qui apparaissent sont des fibrations. En appliquant deux fois la suite exacte d'homotopie associée à une fibration, sur la colonne de gauche puis sur la ligne du bas, on obtient que $SU(n)/SO(n)$ est simplement connexe, puis que l'application :

$$\det^2 : \Lambda_n \rightarrow S^1$$

induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux. On en déduit que

$$H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(\Lambda_n), \mathbb{Z})$$

est isomorphe à \mathbb{Z} .

Notations. On notera $\tilde{\Lambda}_n$ le revêtement universel de Λ_n . On choisit un point base $\tilde{*}$ dans $\tilde{\Lambda}_n$, et on note $*$ son image dans Λ_n . Ceci permet d'identifier le groupe $\pi_1(\Lambda_n, *)$ au groupe des automorphismes du revêtement cyclique $\pi : \tilde{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_n$. On notera T le générateur de ce groupe correspondant à un générateur de $\pi_1(S^1)$ avec l'orientation habituelle du cercle, Γ le groupe des homéomorphismes de $\tilde{\Lambda}_n$ qui relèvent l'action d'un élément du groupe symplectique sur Λ_n , et $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$ le quotient du groupe symplectique par son centre $\{\pm \text{Id}\}$.

Enfin si λ est un lagrangien on notera $\mathcal{O}(\lambda)$ l'ouvert des lagrangiens qui lui sont transverses, et Λ_n^k l'ensemble des lagrangiens dont l'intersection avec \mathbb{R}^n est de dimension k . Si K est une partie de $\{1, \dots, n\}$, on note λ_K le lagrangien défini par les équations

$$\begin{aligned} p_j &= 0, & j \in K \\ q_j &= 0, & j \notin K. \end{aligned}$$

C'est l'image de \mathbb{R}^n par la transformation unitaire I_K :

$$\begin{aligned} I_K(z_j) &= iz_j, & j \in K \\ I_K(z_j) &= z_j, & j \notin K. \end{aligned}$$

On notera E la matrice identité, et I la multiplication par i , c'est-à-dire $I = I_{\{1, \dots, n\}}$.

LEMME (4.1.1). *Si $\lambda \in \Lambda_n^k$, alors il existe une partie K de $\{1, \dots, n\}$ à k éléments telle que λ soit transverse à λ_K .*

Preuve : si $\lambda_0 = \lambda \cap \mathbb{R}^n$, il est clair que l'on peut trouver K de cardinal k tel que λ_0 et $\lambda_K \cap \mathbb{R}^n$ soient supplémentaires dans \mathbb{R}^n . Alors puisque λ et λ_K sont lagrangiens et que $\mathbb{R}^n = \lambda_0 \oplus \lambda_K \cap \mathbb{R}^n$:

$$\omega(\lambda \cap \lambda_K, \mathbb{R}^n) = 0.$$

Donc $\lambda \cap \lambda_K$ est contenu dans \mathbb{R}^n donc nul car λ_0 et $\lambda_K \cap \mathbb{R}^n$ sont supplémentaires. \square

L'ouvert des lagrangiens transverses à \mathbb{R}^n est paramétré par l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille $n \times n$. A la matrice S on associe le plan lagrangien λ_S défini par l'équation $p = S(q)$. L'ouvert $\mathcal{O}(\lambda_K)$ est donc paramétré par les matrices symétriques réelles de la manière suivante : à la matrice S on associe le plan $I_K(\lambda_S)$. On obtient ainsi un atlas de la grassmannienne lagrangienne à 2^n cartes. On peut bien sûr construire un système de coordonnées identique en utilisant un lagrangien quelconque à la place de \mathbb{R}^n , une structure complexe compatible avec ω quelconque, et une base orthonormée de ce lagrangien. Nous utiliserons ce fait par la suite.

(4.2) Définition géométrique de l'indice de Maslov. Si λ est un lagrangien, nous noterons $t(\lambda)$ l'ensemble des lagrangiens qui ne lui sont pas transverses, que nous appellerons la *traîne* de λ , en suivant la terminologie de Arnold. Nous allons voir que $t(\lambda)$ est une sous-variété stratifiée de Λ_n . Avec les notations précédentes on a $t(\mathbb{R}^n) = \cup_{k \geq 1} \Lambda_n^k$. L'ensemble Λ_n^k est une sous-variété de Λ_n . En effet, supposons que le lagrangien λ_0 ait une intersection avec \mathbb{R}^n de dimension k . Par le lemme 4.1, on peut écrire $\lambda_0 = I_K(\lambda_{S_0})$ avec K

de cardinal k . L'application qui au vecteur q de \mathbb{R}^n associe $\varphi(q) = I_K(Sq, q)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^n sur $I_K(\lambda_S)$. Dire que $\varphi(q)$ est dans \mathbb{R}^n équivaut à :

$$\begin{cases} q_j = 0, j \notin K \\ \sum_{s \in K} S_{rs} q_s = 0, r \in K. \end{cases}$$

Donc l'intersection $I_K(\lambda_S) \cap \mathbb{R}^n$ est de dimension k si et seulement si $S_{rs} = 0$ pour tous les couples (r, s) de $K \times K$. On en déduit que Λ_n^k est une sous-variété de Λ_n , de codimension $k(k + 1)/2$. On peut aussi remarquer que dans cette carte, le fait d'être transverse à \mathbb{R}^n se traduit par la condition $\det(S_{K \times K}) \neq 0$ (où $S_{K \times K}$ est la matrice extraite de S obtenue en ne conservant que les indices de K). Considérons le flot $\phi^t(\lambda) = e^{tI}(\lambda)$ sur Λ_n . Notons v le champ de vecteurs associé :

$$v(\lambda) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^{tI}(\lambda)).$$

Supposons que $\lambda \in \Lambda_n^k$ s'écrive $\lambda = I_K(\lambda_S)$ (avec K de cardinal $k \geq 1$). Nous allons calculer les coordonnées de v dans les cartes précédemment construites. Puisque e^{tI} et I_K commutent, il suffit de calculer les coordonnées du plan $e^{tI}(\lambda_S)$. Pour t assez petit on a $e^{tI}(\lambda_S) = \lambda_{S(t)}$ avec

$$S(t) = (\cos(t)S - \sin(t)E)(\sin(t)S + \cos(t)E)^{-1}.$$

On a $S'(0) = -(E + S^2)$, dont les coefficients diagonaux ne sont jamais nuls, donc $v(\lambda)$ n'est pas tangent à Λ_n^k .

On a donc construit un champ de vecteurs v qui n'est tangent à aucune strate de la traîne de \mathbb{R}^n . Puisque $U(n)$ agit transitivement sur la grassmannienne lagrangienne et commute avec ϕ^t , ce champ n'est tangent à aucune strate de $t(\alpha)$, quel que soit le lagrangien α . Ceci nous permet d'orienter transversalement la partie régulière (de codimension 1) de $t(\alpha)$.

On aurait pu faire la même construction avec le flot donné par l'action de e^{tC} , où C est une structure complexe compatible avec ω quelconque. Puisque l'ensemble de ces structures est contractile, l'orientation de la partie régulière de $t(\alpha)$ ne dépend pas du choix de C .

La traîne $t(\alpha)$ d'un lagrangien possède un point privilégié : son *sommet* α . Choisissons un lagrangien β transverse à α . L'ouvert $\mathcal{O}(\beta)$ est difféomorphe à l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur α de la manière suivante : un lagrangien L de $\mathcal{O}(\beta)$ s'écrit comme le graphe d'une application linéaire $f : \alpha \rightarrow \beta$. On lui associe la forme $\omega(x, f(y))$. L'ensemble $\mathcal{O}(\beta) \cap t(\alpha)$ est formé des formes dégénérées, et $\mathcal{O}(\beta) - t(\alpha)$ a $n + 1$ composantes connexes paramétrées par la signature. Si C est une structure complexe compatible avec ω , pour t dans $]0, \pi[$, α et $e^{tC}(\alpha)$ sont transverses. Il n'est pas difficile de vérifier que, pour t assez petit $e^{tC}(\alpha)$ est dans la composante connexe de $\mathcal{O}(\beta) - t(\alpha)$ formée des formes définies positives (il suffit pour cela de choisir C de sorte que $\beta = C(\alpha)$, la forme associée au lagrangien $e^{tC}(\alpha)$ admet alors pour seule valeur propre $\tan(t)$). On y fera référence comme la composante privilégiée du voisinage du sommet de la traîne de α .

Soit α un lagrangien et c_t une courbe dans Λ_n dont les extrémités c_0 et c_1 sont transverses à α . On peut modifier la courbe c par une petite homotopie (à extrémités fixes) de telle sorte qu'elle ne rencontre $t(\alpha)$ que dans sa partie régulière (formée des lagrangiens dont l'intersection avec α est de dimension

1) et ce de manière transverse. Alors, grâce à l'orientation transverse de $t(\alpha)$ on peut compter algébriquement le nombre de ses points d'intersection avec la courbe c . On note $I(\alpha, c)$ cet entier. Si β est transverse à α , on obtient ainsi un morphisme $I(\alpha, -) : \pi_1(\Lambda_n, \beta) \rightarrow \mathbb{Z}$.

PROPOSITION (4.2.1). *L'élément $I(\alpha, -)$ est un générateur de $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$.*

Preuve : On peut supposer $\alpha = \mathbb{R}^n$. De plus cette propriété ne dépend pas du choix du point β (transverse à α), on peut donc supposer que $\beta = U(\alpha)$ où U est une matrice unitaire diagonale de coefficients $e^{ia_1}, \dots, e^{ia_n}$ avec $-\pi < a_1 < \dots < a_n < 0$. La courbe $c_t = e^{It}(\beta)$ ($t \in [0, \pi]$) rencontre n fois la traîne de α , dans sa partie régulière, et selon la direction positive. Donc $I(\alpha, c) = n$. Par ailleurs, il est clair que $\det^2(c)$ fait n tours sur le cercle quand t varie de 0 à π . □

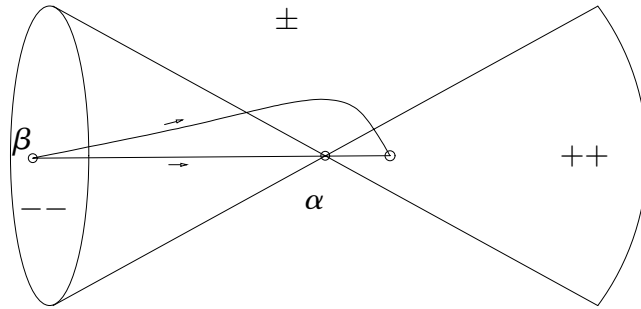


Figure 6. Structure de la traîne au voisinage de son sommet dans Λ_2

Supposons maintenant que $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ soient deux points de $\tilde{\Lambda}_n$, d'images α et β transverses dans Λ_n . Choisissons une courbe de $\tilde{\beta}$ à $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{\Lambda}_n$ et notons c sa projection dans Λ_n . On note \hat{c} la courbe obtenue en prolongeant c par $e^{It}(\alpha)$ pour $t \in [0, \pi/2]$. La courbe \hat{c} a des extrémités transverses à α , et sa classe d'homotopie ne dépend que de $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ car $\tilde{\Lambda}_n$ est simplement connexe. On définit alors $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = I(\alpha, \hat{c})$. Cet entier ne dépend pas du choix de la structure complexe utilisée pour prolonger c .

Dans le cas où α et β ne sont pas transverses, on fait précéder la courbe c d'une courbe de la forme $e^{-tC}(\beta)$, $t \in [\epsilon, 0]$. Dans une carte construite comme précédemment, en faisant jouer à α le rôle de \mathbb{R}^n , et en choisissant C comme structure complexe, les coordonnées de $e^{-tC}(\beta)$ sont $S(t) = S + t(E + S^2) + O(t^2)$, si β admet S comme coordonnées. Puisque $E + S^2$ est définie positive, et $S_{K \times K} = 0$, $S(t)_{K \times K}$ est inversible pour t assez petit, c'est-à-dire $e^{-tC}(\beta)$ est transverse à α . On note encore \hat{c} la courbe obtenue à partir de c en la modifiant comme indiqué pour que ses deux extrémités soient transverses à α et on définit $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = I(\alpha, \hat{c}) - \dim(\alpha \cap \beta)/2$.

PROPOSITION (4.2.2). *La fonction $m : \tilde{\Lambda}_n \times \tilde{\Lambda}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ est Γ -invariante :*

$$m(\tilde{g}(\tilde{\alpha}), \tilde{g}(\tilde{\beta})) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), \tilde{g} \in \Gamma.$$

Preuve : choisissons deux points $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ de $\tilde{\Lambda}_n$ et \tilde{g} dans Γ , d'image g dans $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$. Notons c la projection dans Λ_n d'une courbe \tilde{c} de $\tilde{\beta}$ à $\tilde{\alpha}$, \hat{c} la courbe obtenue à partir de c en la modifiant convenablement aux extrémités. Le terme $-\dim(\alpha \cap \beta)/2$ est clairement invariant par l'action de $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$. Il reste donc à voir d'une part que $I(\alpha, \hat{c}) = I(g\alpha, g(\hat{c}))$ et d'autre part que la courbe $g(\hat{c})$ est homotope à une courbe obtenue à partir de $g(c)$ par le procédé que nous avons expliqué. Le second point résulte du fait que la courbe $e^{tC}(\alpha)$ s'envoie sur la courbe $e^{tgCg^{-1}}(g(\alpha))$. L'application gCg^{-1} est encore une structure complexe compatible avec ω . Le premier résulte du fait que l'action du groupe symplectique sur Λ_n préserve l'orientation des traînes. \square

L'ouvert des lagrangiens transverses à α étant contractile, son image inverse par π , $\tilde{\Lambda}_n - t(\alpha)$, est une réunion disjointe d'ouverts contractiles permutés par l'action de T . Chacun de ces ouverts est homéomorphe à $\Lambda_n - t(\alpha)$. La fonction $m(\tilde{\alpha}, -)$ est constante sur chacun de ces ouverts. Le théorème suivant a été prouvé par Arnold dans le cas où les lagrangiens considérés sont tous deux à deux transverses [2]. Des preuves complètes se trouvent dans [8] et [9].

THÉORÈME (4.2.3). *La fonction m a les propriétés suivantes :*

1. $m(T(\tilde{\alpha}), \tilde{\beta}) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 1$.
2. $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) = n$ si $\pi(\tilde{\alpha})$ et $\pi(\tilde{\beta})$ sont transverses.
3. $m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + m_0(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) - m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = \tau(\pi(\tilde{\alpha}), \pi(\tilde{\beta}), \pi(\tilde{\gamma}))$ avec $m_0 = n - 2m$.

Preuve : pour calculer $m(T(\tilde{\alpha}), \tilde{\beta})$ on considère un chemin c de β (ou d'un point proche de β et transverse à α construit comme précédemment si β rencontre α) à α . On le fait suivre d'un chemin d de α à α' de la forme $d(t) = e^{tC}(\alpha)$. On note encore T un générateur de $\pi_1(\Lambda_n, \alpha')$. On a $I(\alpha, c * d) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ et $I(\alpha, c * d * T) = m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 1$ car $I(\alpha, -)$ engendre le groupe $H^1(\Lambda_n, \mathbb{Z})$. Mais $c * d * T$ est homotope à $c * (d * T * \tilde{d}) * d$ et $c * (d * T * \tilde{d})$ est l'image d'un chemin de $\tilde{\beta}$ à $T(\tilde{\alpha})$. Donc $I(\alpha, c * d * T) = m(T(\tilde{\alpha}), \tilde{\beta})$.

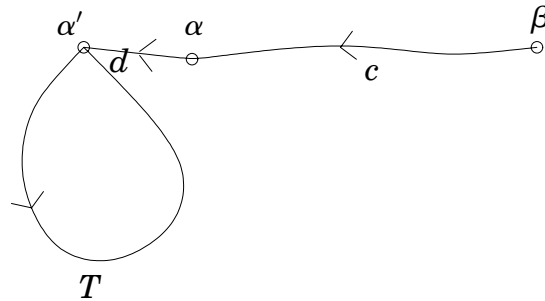


Figure 7.

Pour prouver le second point, on considère la fonction $m(\tilde{\alpha}, -) + m(-, \tilde{\alpha})$. Il suffit de prouver qu'elle est constante égale à n sur $\tilde{\Lambda}_n - t(\alpha)$. On va prouver que c'est une constante $c_{\tilde{\alpha}}$. Alors l'invariance par Γ assurera que $c_{\tilde{\alpha}}$ ne dépend pas de $\tilde{\alpha}$. Il suffira de calculer cette constante sur un exemple.

Il est bien clair que $m(\tilde{\alpha}, -)$ est constante sur chaque composante connexe de $\tilde{\Lambda}_n - \widetilde{t(\alpha)}$. Par ailleurs on a $m(\tilde{g}(\tilde{\beta}), \tilde{\alpha}) = m(\tilde{\beta}, \tilde{g}^{-1}(\tilde{\alpha}))$ pour $\tilde{g} \in \Gamma$. Cet entier reste égal à $m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ si \tilde{g} reste dans un voisinage connexe V de 1 dans Γ tel que $\tilde{g}^{-1}(\tilde{\alpha})$ reste transverse à $\tilde{\beta}$ pour \tilde{g} dans V . Mais $\tilde{g}(\tilde{\beta})$ décrit un voisinage de $\tilde{\beta}$ pour \tilde{g} dans V . Donc $m(-, \tilde{\alpha})$ est localement constante. La fonction $m(\tilde{\alpha}, -) + m(-, \tilde{\alpha})$ est donc localement constante sur $\tilde{\Lambda}_n - \widetilde{t(\alpha)}$. Par le premier point, elle est T -invariante donc constante.

Il nous reste à calculer cette constante sur un exemple simple. Considérons les lagrangiens \mathbb{R}^n et $i(\mathbb{R}^n)$. On peut les joindre par le chemin c donné par : $e^{tI}(\mathbb{R}^n)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour calculer $m(i(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ on prolonge c par le chemin $e^{tI}(i\mathbb{R}^n)$ ($t \in [0, \pi/2]$) à valeur dans la composante privilégiée de $\tilde{\Lambda}_n - \widetilde{t(i\mathbb{R}^n)}$. On doit donc calculer le nombre d'intersection de $e^{tI}(\mathbb{R}^n)$ ($t \in [0, \pi]$) avec la traîne de $i\mathbb{R}^n$. Cet entier vaut n par la Proposition (4.2.1). Il reste à voir que $m(\mathbb{R}^n, i(\mathbb{R}^n))$ vaut 0. Mais pour le calculer on considère le chemin $e^{(\frac{\pi}{2}-t)I}(\mathbb{R}^n)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En le prolongeant par $e^{tI}(\mathbb{R}^n)$ ($t \in [0, \pi/2]$) on obtient un chemin homotope à un chemin constant. Donc $m(\mathbb{R}^n, i(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Prouvons maintenant le dernier point. Il est bien clair que $m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + m_0(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) - m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})$ ne dépend que des images α, β, γ de $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ dans Λ_n . On note $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$ cette quantité. C'est un cocycle car son relevé à $\tilde{\Lambda}_n$ est un cobord. Pour prouver qu'il coïncide avec τ il suffit de le faire dans le cas où le troisième lagrangien est transverse aux deux autres. En effet supposons que τ et μ coïncident sur les triplets ayant cette propriété. Soit L_1, L_2, L_3 un triplet quelconque. On peut trouver un lagrangien L_4 qui soit transverse à L_1, L_2 et L_3 à la fois. Alors

$$\begin{aligned} \mu(L_1, L_2, L_3) &= \mu(L_1, L_2, L_4) + \mu(L_2, L_3, L_4) - \mu(L_1, L_3, L_4) \\ \tau(L_1, L_2, L_3) &= \tau(L_1, L_2, L_4) + \tau(L_2, L_3, L_4) - \tau(L_1, L_3, L_4) \end{aligned}$$

car τ et μ vérifient chacun la relation de cocycle du Théorème (2.2.1). Les membres de droites coïncident, donc $\tau(L_1, L_2, L_3) = \mu(L_1, L_2, L_3)$.

Prouvons maintenant le résultat dans le cas où le troisième lagrangien est transverse aux deux autres. Puisque l'on a vu que l'on peut toujours utiliser une structure complexe compatible avec la structure symplectique on peut supposer que $\alpha = \mathbb{R}^n$, $\gamma = i\mathbb{R}^n$, et que β a pour équation $q = S_\beta p$ où S_β est une matrice symétrique. Alors, d'après la Proposition (2.3.1), l'indice de Maslov $\tau(\alpha, \beta, \gamma)$ est la signature de la forme quadratique $q(x) = \omega(x, iS_\beta x) = \langle x, S_\beta x \rangle$ sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire la signature de S_β . Notons ν_+ le nombre de valeurs propres positives de S_β et ν_- le nombre de valeurs propres négatives. On choisit trois chemins reliant \mathbb{R}^n , $i\mathbb{R}^n$, β comme suit. On relie \mathbb{R}^n à $i\mathbb{R}^n$ par le chemin de lagrangiens c_1 d'équation $(p, -tp)$ pour $t \in [0, \infty]$; β à \mathbb{R}^n par le chemin c_2 d'équation $(p, (1-t)S_\beta p)$, $t \in [0, 1]$, et β à $i\mathbb{R}^n$ par le chemin c_3 d'équation $(p, S_\beta p - tp)$, $t \in [0, \infty]$. Il n'est pas difficile de voir que le lacet ainsi formé se relève dans $\tilde{\Lambda}_n$ en un lacet. On peut donc trouver trois relevés \mathbb{R}^n , $i\mathbb{R}^n$, β , tels que les classes d'homotopie de chemins déterminées par deux de ces points se projettent sur les chemins c_1, c_2 et c_3 . De plus, en paramétrant $\mathcal{O}(i\mathbb{R}^n)$ par les coordonnées qui à une matrice symétrique S associent le plan d'équation $q = Sp$, le champ de vecteur v a pour coordonnées $v(S) = E + S^2$. Enfin, dans les

coordonnées qui à la matrice symétrique S associent le lagrangien d'équation $q = Sp$, une matrice définie positive est dans la composante privilégiée pour \mathbb{R}^n , et une matrice inversible définie négative est dans la composante privilégiée pour $i\mathbb{R}^n$.

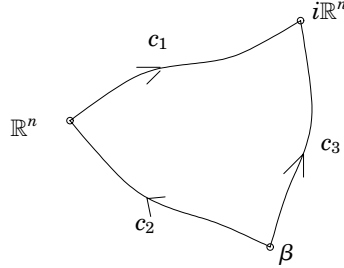


Figure 8.

Le chemin c_1 est formé de lagrangiens transverses à $i\mathbb{R}^n$ et qui sont dans la composantes privilégiée pour $i\mathbb{R}^n$, au voisinage de $t = \infty$. Donc $m(i\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = 0$, et $m_0(i\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = n$. Le chemin c_3 est lui aussi formé de lagrangiens transverses à $i\mathbb{R}^n$ et arrive dans la composante privilégiée au voisinage de l'infini. Donc $m_0(i\mathbb{R}^n, \tilde{\beta}) = n$. Quand on prolonge aux extrémités le chemin c_2 dans la direction du champ v , on obtient un chemin d'un lagrangien β' (de coordonnées une matrice $S_{\beta'}$) à un lagrangien proche de \mathbb{R}^n (de coordonnées une matrice proche de 0 et définie positive). L'indice d'intersection de ce chemin avec $t(\mathbb{R}^n)$ est le nombre de valeurs propres négatives de $S_{\beta'}$ d'après le lemme suivant. Toujours d'après ce lemme ce nombre de valeurs propres négatives est $\nu_- + \dim(\beta \cap \mathbb{R}^n)$. Enfin $m_0(\mathbb{R}^n, \tilde{\beta}) = n - 2\nu_- - 2 \dim(\beta \cap \mathbb{R}^n) + \dim(\beta \cap \mathbb{R}^n)$. Donc $\mu(\mathbb{R}^n, \beta, i\mathbb{R}^n) = n - 2\nu_- - \dim(\beta \cap \mathbb{R}^n) - n + n = \nu_+ - \nu_-$ [car $\text{rang } S_{\beta'} = n = \nu_+ + \nu_- + \dim(\beta \cap \mathbb{R}^n)$]. \square

LEMME (4.2.4). Soit $s \in [-\epsilon, \epsilon] \mapsto M_s$ un chemin lisse de matrices symétriques. On suppose que M_s est non-dégénérée pour s non-nul, et que M'_s est définie positive sur le noyau de M_0 . Alors le nombre de valeurs propres positives de M_ϵ est égal au nombre de valeurs propres positives de $M_{-\epsilon}$, augmenté de la dimension du noyau de M_0 .

Preuve : on peut supposer que

$$M_s = \begin{pmatrix} A_s & B_s \\ B_s^t & C_s \end{pmatrix}$$

avec C_0 inversible, et A_0 et B_0 nuls ($C_s \in GL_k(\mathbb{R})$ où k est le rang de M_0). Alors

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & B_s C_s^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_s - B_s C_s^{-1} B_s^t & 0 \\ 0 & C_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C_s^{-1} B_s^t & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc M_s a même signature que la matrice

$$\begin{pmatrix} A_s - B_s C_s^{-1} B_s^t & 0 \\ 0 & C_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sA'_0 + O(s^2) & 0 \\ 0 & C_s \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse A'_0 est définie positive. On en déduit le résultat. \square

Avant d'en finir avec la définition géométrique de l'indice de Maslov, on peut décrire ce qu'est l'indice de Maslov dans \mathbb{R}^2 . Toute droite du plan est alors lagrangienne. La grassmannienne lagrangienne s'identifie donc à la droite projective. L'application \det^2 précédemment rencontrée est une bijection. En utilisant l'orientation usuelle de la droite projective on peut décrire l'indice de Maslov de trois droites D_1, D_2, D_3 . Si deux d'entre elles sont confondues $\tau(D_1, D_2, D_3) = 0$. Sinon $\tau(D_1, D_2, D_3)$ vaut 1 si D_1, D_2, D_3 sont dans cet ordre sur le cercle et -1 si elles sont dans l'ordre D_1, D_3, D_2 .

(4.3) Revêtement universel du groupe symplectique. On a désigné par Γ le groupe des homéomorphismes de $\tilde{\Lambda}_n$ qui relèvent l'action d'un élément de $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$ sur Λ_n . Il s'avère que, selon la parité de n , Γ est ou bien le revêtement universel du groupe symplectique, ou bien possède deux composantes connexes dont chacune est homéomorphe à un quotient par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de ce revêtement universel. Nous allons expliciter ce fait maintenant.

Tout d'abord Γ peut être identifié au sous-ensemble de $\text{PSp}(2n, \mathbb{R}) \times \tilde{\Lambda}_n$ formé des couples $(g, \tilde{\alpha})$ tels que $g(*) = \pi(\tilde{\alpha})$. Ainsi on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \tilde{\Lambda}_n \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{PSp}(2n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \Lambda_n \end{array}$$

et Γ revêt $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$. Considérons de la même manière le revêtement $\tilde{\Gamma}$ de $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ formé des couples $(g, \tilde{\alpha})$ de $\text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \times \tilde{\Lambda}_n$ tels que $g(*) = \pi(\tilde{\alpha})$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \longrightarrow & \tilde{\Lambda}_n \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \Lambda_n . \end{array}$$

L'application

$$\begin{aligned} \phi : \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) &\rightarrow \Lambda_n \\ g &\mapsto g(*) \end{aligned}$$

induit entre les groupes fondamentaux, après choix de deux générateurs, l'application $x \mapsto 2x$. On en déduit que $\tilde{\Gamma}$ possède deux composantes connexes dont chacune est simplement connexe. On note donc $\tilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ la composante de $(1, \tilde{*})$ dans $\tilde{\Gamma}$ que l'on munit d'une structure de groupe en choisissant ce point comme élément neutre. C'est le revêtement universel du groupe symplectique.

Il nous reste maintenant à voir le lien entre $\tilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ et Γ . On a bien sûr une application surjective $\varphi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ qui envoie $(g, \tilde{\alpha})$ sur $(\bar{g}, \tilde{\alpha})$, où \bar{g} est la classe dans $\text{PSp}(2n, \mathbb{R})$ de g . On a $\varphi(g_1, \tilde{\alpha}_1) = \varphi(g_2, \tilde{\alpha}_2)$ si et seulement si $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ et $g_1 = \pm g_2$. On doit donc voir quand les points $(g_1, \tilde{\alpha}_1)$ et $(-g_1, \tilde{\alpha}_1)$ sont dans la même composante connexe de $\tilde{\Gamma}$. On vérifie facilement le lemme suivant.

LEMME (4.3.1). *Les éléments $(1, \tilde{*})$ et $(-1, \tilde{*})$ sont dans la même composante connexe de $\tilde{\Gamma}$ si et seulement si $(g, \tilde{\alpha})$ et $(-g, \tilde{\alpha})$ sont dans la même composante connexe pour tout $(g, \tilde{\alpha})$ de $\tilde{\Gamma}$.*

Considérons le chemin de Id à $-\text{Id}$, $\gamma_t = e^{it}$ ($t \in [0, \pi]$) dans le groupe symplectique. Alors $\phi(\gamma_t)$ est un élément du groupe fondamental de la grassmannienne lagrangienne. On prouve facilement le lemme suivant :

LEMME (4.3.2). *Le lacet $\phi(\gamma_t)$ est dans l'image de ϕ_* si et seulement si $(-1, \tilde{*})$ est dans $\widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$.*

D'après le calcul du groupe fondamental de la lagrangienne effectué précédemment, un lacet de Λ_n est dans l'image de ϕ_* si et seulement si son image par l'application \det^2 parcourt un nombre pair de tours sur le cercle. Quand t parcourt $[0, \pi]$, $\det^2(\phi(\gamma_t))$ parcourt n tours sur le cercle. Donc :

– Si n est pair, $(1, \tilde{*})$ et $(-1, \tilde{*})$ sont dans la même composante connexe de $\widetilde{\Gamma}$. La restriction de φ à chacune des composantes de $\widetilde{\Gamma}$ est un revêtement à deux feuillets. Donc Γ a deux composantes connexes. Leur groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

– Si n est impair, $(1, \tilde{*})$ et $(-1, \tilde{*})$ ne sont pas dans la même composante connexe de $\widetilde{\Gamma}$ et la restriction $\varphi : \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma$ est un homéomorphisme. Le groupe des homéomorphismes de $\widetilde{\Lambda}_n$ qui relèvent l'action du groupe symplectique sur la lagrangienne est bien le revêtement universel de $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

Enfin on notera γ_T l'élément de $\widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ égal à $(1, T^2(\tilde{*}))$. La classe d'homotopie de lacets de $(1, \tilde{*})$ à γ_T dans $\widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ est le générateur du groupe du revêtement cyclique :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

(4.4) Classe de Maslov de $H^2(\text{Sp}(2n, \mathbb{R})^\delta, \mathbb{R})$. On part maintenant d'une fonction $m_0 : \widetilde{\Lambda}_n \times \widetilde{\Lambda}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que :

$$m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + m_0(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) - m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = \tau(\pi(\tilde{\alpha}), \pi(\tilde{\beta}), \pi(\tilde{\gamma})).$$

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ g &\mapsto m_0(\tilde{*}, \varphi(g)\tilde{*}) \end{aligned}$$

Puisque $m_0(\tilde{\alpha}, T(\tilde{\beta})) = m_0(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) + 2$ et que $\varphi(\gamma_T) = T^2$, la fonction ϕ satisfait : $\phi(g\gamma_T) = \phi(g) + 4$. Notons $c(g_1, g_2) = \phi(g_1) + \phi(g_2) - \phi(g_1g_2)$. Vu l'équation satisfaite par m_0 on a immédiatement : $c(g_1, g_2) = \tau(*, p(g_1)*, p(g_1g_2)*)$. La fonction c est donc bien définie sur le groupe symplectique $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et y définit un 2-cocycle borné. La classe de cohomologie ainsi définie est par définition la classe de Maslov. Elle n'est pas triviale a priori puisque la fonction ϕ n'est pas définie sur le groupe symplectique. Elle peut être reliée à la classe de l'extension centrale :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow 0.$$

En effet si l'on choisit une section ensembliste $s : \text{Sp}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{\text{Sp}}(2n, \mathbb{R})$ (avec $s(1) = 1$) on peut écrire :

$$s(x)s(y) = \gamma_T^{n_{xy}} s(xy).$$

Alors la fonction $f : (x, y) \mapsto n_{xy}$ est un 2-cocycle qui représente dans $H^2(\text{Sp}(2n, \mathbb{R})^\delta, \mathbb{Z})$ l'extension centrale que l'on considère. On a $\phi(s(x)s(y)) =$

$\phi(s(xy)) + 4n_{xy}$, donc $c(x, y) + 4n_{xy}$ est le cobord de $-\phi \circ s$. Ainsi, $c + 4f$ est nul dans $H^2(\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})^\delta, \mathbb{Z})$.

On peut également voir que cette construction ne dépend pas du point base $\tilde{*}$ choisi dans $\tilde{\Lambda}_n$. Le choix du point \tilde{u} aurait conduit à une fonction ϕ_u définie de manière analogue à ϕ . Elle satisfait encore l'identité $\phi_u(g\gamma_T) = \phi_u(g) + 4$, donc la fonction $\phi - \phi_u$ est bien définie sur $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et les cobords de ϕ et ϕ_u définissent la même classe de cohomologie réelle. On peut en fait dire mieux. Notons Φ l'unique quasi-morphisme homogène à distance bornée de ϕ : $\Phi(g) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\phi(g^p)}{p}$. On définit de même Φ_u . Alors, puisque les deux quasi-morphismes homogènes Φ et Φ_u satisfont $\Phi(g\gamma_T) = \Phi(g) + 4$ ils sont égaux (cf. [3]). Donc la fonction $\phi - \phi_u = \phi - \Phi + (\Phi_u - \phi_u)$ est bornée et les cobords de ϕ et ϕ_u définissent la même classe dans le second groupe de cohomologie bornée de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. La classe de Maslov peut donc être considérée comme une classe bornée. On pourra consulter [3] pour plus de détails sur ces faits.

Remarque. Dans [3], les auteurs obtiennent que c et f définissent les mêmes classes de cohomologie. Nous obtenons $c = -4f$. Le signe opposé provient probablement d'un choix différent pour une orientation ou pour le générateur du groupe d'un revêtement. Expliquons d'où vient le 4. Dans [2], Arnold définit l'indice de Maslov de L_1, L_2, L_3 comme le nombre de valeurs propres positives ν_+ de la forme quadratique sur L_2 , $x \mapsto \omega(p_1(x), p_3(x))$. Il ne considère que les triplets de lagrangiens deux à deux transverses. Il construit alors une primitive $\tilde{m} : \tilde{\Lambda}_n \times \tilde{\Lambda}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ de cette fonction dans le cas des relevés de lagrangiens transverses. C'est cette primitive qui est utilisée dans [3]. Puisque dans les cas transverses, le rang de la forme quadratique est fixe égal à n , la signature $\nu_+ - \nu_-$ est aussi $2\nu_+ - n$. L'indice de Maslov comme nous l'avons défini est donc (à une constante près) le double de celui d'Arnold.

Le second facteur 2 provient du fait suivant. Dans [3] les auteurs affirment que le groupe Γ est le revêtement universel du groupe symplectique et que le générateur du noyau de $\tilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est l'élément T qui engendre le groupe du revêtement $\tilde{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_n$. Nous avons vu qu'il existe en fait une application $\varphi : \tilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \Gamma$ (qui n'est pas toujours un homéomorphisme) et que le générateur du noyau de $\tilde{\mathrm{Sp}}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ s'envoie sur l'élément T^2 par φ , ce qui explique la présence du second facteur 2.

Received August 10, 2004

Final version received July 04, 2005

UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON
46, ALLÉE D'ITALIE
69364 LYON CEDEX 07
FRANCE
Pierre.Py@umpa.ens-lyon.fr

RÉFÉRENCES

- [1] V. ARNOLD, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Funct. Anal. Appl., **1**, (1967), 1–13.

- [2] V. ARNOLD, *Sturm theorem and symplectic geometry*, *Funct. Anal. Appl.* **19**, 1, (1985), 251–276.
- [3] J. BARGE, AND É. GHYS, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, *Math. Ann.* **294**, 2, (1992), 235–265.
- [4] S. E. CAPPELL, R. LEE, AND E. Y. MILLER, *On the Maslov index*, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **47**, 2, (1994), 121–186.
- [5] J. -L. CLERC, *L'indice de Maslov généralisé*, *J. Math. Pures. Appl.* **83**, 1, (2004), 99–114.
- [6] J. -L. CLERC, *The Maslov triple index on the Shilov boundary of a classical domain*, *J. Geom. Phys.* **49**, 1, (2004), 21–51.
- [7] J. -M. CLERC, AND B. OERSTED, *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, *Asian J. Math.* **7** (2003), 269–295.
- [8] P. DAZORD, *Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques*, *Ann. Inst. Fourier* **29**, 2, (1979), 25–78.
- [9] M. DE GOSSON, *The structure of q -symplectic geometry*, *J. Math. Pures Appl.* **71**, 5, (1992), 429–453.
- [10] J. -M. GAMBAUDO, AND É. GHYS, *Braids and signatures*, A paraître dans *Bull. Soc. Math. France*, (2004).
- [11] L. H. KAUFFMAN, *On knots*, Number 115 in *Ann. of Math. Stud.* Princeton University Press, Princeton, (1987).
- [12] F. LATOUR, *Variétés géométriques et résolutions I. Classes caractéristiques*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10**, 1, (1977).
- [13] J. LERAY, *Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles*, In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, Collège de France*, (1972-1973).
- [14] J. LERAY, *Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics. A mathematical structure related to asymptotics expansions and the Maslov index*, MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1981.
- [15] G. LION, AND M. VERGNE, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, *Progr. Math.*, **6**, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1980.
- [16] A. MAZZOLENI, *Partially defined cocycles and the Maslov index for a local ring*, *Ann. Inst. Fourier* **54**, 4, (2004), 875–885.
- [17] W. MEYER, *Die Signatur von lokalen Koeffizientensystemen und Faserbündeln*, *Bonner Math. Schriften*, 53, (1972).
- [18] W. MEYER, *Die Signatur von Flächenbündeln*, *Math. Ann.* **201** (1973), 239–264.
- [19] J. W. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [20] J. W. MILNOR, AND D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1973.
- [21] R. PARIMALA, R. PREETI, AND R. SRIDHARAN, *Maslov index and a central extension of the symplectic group*, *K-Theory* **19**, (2000), 29–45.
- [22] J. ROBBIN, AND D. SALAMON, *The Maslov index for paths*, *Topology*, **32**, 4, (1993), 827–844.
- [23] J. -M. SOURIAU, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications*, *Lecture Notes in Phys.*, **50** Springer, Berlin, 1976, 117–148 pp..
- [24] V. G. TURAEV, *A cocycle of the symplectic first Chern class and the Maslov indices*, *Funktional Anal. i Prilozhen* **18**, (1984).
- [25] V. G. TURAEV, *Quantum invariants of knots and 3-Manifolds*, de Gruyter Stud. Math. **18**, de Gruyter, Berlin, New York, 1994.
- [26] C. T. C. WALL, *Non-additivity of the signature*, *Invent. Math.* **7**, (1969), 269–274.