Resumé detaillé du travail de thèse

Directeurs de thèse :

Gilles Christol (Univ. Paris VI)
&
Bruno Chiarellotto (Univ. Padova)

Jury de Thèse :

André Yves

Chiarellotto Bruno

Christol Gilles

Di Vizio Lucia

Oesterle Joseph

Ramis Jean-Pierre

Reversat Marc

Soutenue le 14 Juin 2006

La thèse a été preparée à l'Université de Paris sous la direction de Gilles Christol et a été co-dirigée par Bruno Chiarellotto de l'Université de Padoue dans le cadre d'une co-tutelle.

La thèse est constituée de deux articles plus des chapitres en appendice.
Nous avons ajouté un resumé detaillé de la thèse en français
pour que le lecteur puisse mieux s'orienter.

Andrea Pulita

13 *Juin* 2006

Resumé detaillé de la Thèse

1. Premier Article

Le premier article se propose d'expliciter, pour les caractères, la correspondence donnée par le théorème de monodromie locale $p-$adique récemment demontré (cf. [And02], [Ked04], [Meb02]).

DÉFINITION 1.1. *Soit K un corps ultramétrique de caractéristique* 0. *Nous dénotons par $\mathcal{R}_K$ l'anneau "de Robba"*

$$\mathcal{R}_K := \{f(T) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \mid a_i \in K, \exists\, \rho < 1 \textit{ tel que } f(T) \textit{ converge pour } \rho < |T| < 1\} \qquad (1.1.1)$$

et par $\mathcal{E}_K^\dagger$ l'anneau de "Robba borné"

$$\mathcal{E}_K^\dagger := \{f(T) \in \mathcal{R}_K \mid \sup|a_i| < +\infty\}\ . \qquad (1.1.2)$$

Dans cet article nous obtenons les résultats suivants :

- Une *classification complète des équations différentielles de rang un, solubles sur l'anneau de Robba* $\mathcal{R}_K$ (resp. sur $\mathcal{E}_K^\dagger$), et une étude detaillée de chaque équation, à isomorphisme prés ;
- Une correspondence explicite entre *caractères de Artin-Schreier-Witt* du groupe de Galois absolu de $k((t))$, et *équations différentielles de rang un sur* $\mathcal{R}_K$;
- *Le calcul explicite, pour ces caractères, du foncteur de Monodromie $p-$adique* qui associe a une représentation V, du groupe de Galois absolù $\mathrm{G}_{k((t))}$, un $\varphi-$module $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V})$ sur $\mathcal{E}_K^\dagger$ et par conséquence une équation différentielle $p-$adique $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V})$ sur $\mathcal{R}_K$;
- Pour tout corps $p-$adique L de corps residuel k_L de caracteristique $p > 0$, on donne une *description des extensions non ramifiées cycliques de L, qui proviennent, par henselianité, d'une extension finie séparable du corps k_L.*

Ces résultats passent par l'étude detaillée de la convergence/surconvergence des solutions des équations solubles sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_K$.

Notre travail commence par l'introduction d'une nouvelle classe d'exponentielles de type Artin-Hasse, nommées $\boldsymbol{\pi}-$*exponentielles* qui généralisent la bien connue *exponentielle de Dwork*

$$\exp(\pi_0 T) \qquad (1.1.3)$$

où π_0 est une racine du polynôme $X^{p-1} = -p$. Ces exponentielles sont solutions d'équations de rang un solubles, et reciproquement toute solution d'une équation de rang un soluble est de ce type (après éventuel changement de base dans le module differentiel).

Les $\boldsymbol{\pi}-$*exponentielles* sont l'outil technique central de l'article et leur étude permet de clarifier et de décrire très explicitement toute la théorie en rang un.

Remarque 1.2. *Afin d'être simple, nous fesons dans cette introduction une suite d'hypothèses, qui en réalité ne sont pas nécessaires. Les énoncés ne sont donc pas dans leur forme la plus générale.*

Les différents définitions et les principals objets qui apparaissent dans cette introduction sont rapélée dans les premieres chapitres de la thèse.

2000 Mathematics Subject Classification ????

2. $\pi-$exponentielles

Nous fixons une série de Lubin-Tate $P(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ et son groupe de Lubin-Tate $\mathfrak{G}_P$. Par définition la série $P(X)$ vérifie

$$P(X) \equiv \mathrm{w}X \mod X^2\mathbb{Z}_p[[X]] \quad , \quad P(X) \equiv X^p \mod p \cdot \mathbb{Z}_p[[X]] \tag{2.0.1}$$

où $\mathrm{w} \in \mathbb{Z}_p$ est une uniformisante. Le groupe $\mathfrak{G}_P(X,Y) \in \mathrm{Z}_p[X,Y]$ est l'unique groupe formel pour lequel $P(X)$ est un endomorphisme. De plus $\mathfrak{G}_P$ a une structure canonique de $\mathbb{Z}_p-$module pour laquelle la multiplication par w est donnée par la série $P(X)$. Les points de w^n-torsion de $\mathfrak{G}_P$ sont alors les zéros, de valuation inférieure ou égale à 1, dans une clôture algébrique $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ de $\mathbb{Q}_p$, de la série $P^{(n)}(X) := \underbrace{P \circ P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}}$.

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{w}^n) := \{x \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}} \mid |x| \leqslant 1 \ , \ P^{(n)}(x) = 0\} \ . \tag{2.0.2}$$

Le groupe de Tate associé a $\mathfrak{G}_P$ est par définition

$$\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P) := \varprojlim \left(\mathrm{Ker}(\mathrm{w}^{n+1}) \xrightarrow[x \mapsto P(x)]{} \mathrm{Ker}(\mathrm{w}^n) \right) \ . \tag{2.0.3}$$

On trouve que $\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P)$ est un $\mathbb{Z}_p-$module libre de rang un. Un générateur de $\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P)$ est une suite $(\pi_j)_{j\geqslant 0}$ compatible (i.e. $P(\pi_0) = 0$ et $P(\pi_{j+1}) = \pi_j$, pour tout $j \geqslant 0$) tel que $\pi_0 \neq 0$ et $|\pi_0| < 1$.

Définition 2.1. *Nous fixons un générateur* $\boldsymbol{\pi} := (\pi_j)_{j\geqslant 0}$ *de* $\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P)$.

Exemple 2.2. *Si* $P(X) = X^p + pX$, *alors* π_0 *est le bien connu "*π *de Dwork" (cf. 1.1.3).*

Proposition 2.3. Soit L un corps valué complet de caractéristique 0, qui contient les racines $p^{m+1}-$èmes de l'unité. Soit $d = np^m \geqslant 1$, avec $(n,p) = 1$, et $m \geqslant 0$. Soit $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_0, \ldots, \lambda_m) \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L)$ un vecteur de Witt. Soit $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_m) \in (\mathcal{O}_L)^{m+1}$ son vecteur fantôme, i.e.

$$\phi_j := \lambda_0^{p^j} + p\lambda_1^{p^{j-1}} + \cdots + p^j\lambda_j \ .$$

Alors, la serie formelle (nommée $\boldsymbol{\pi}-$*exponentielle*)

$$\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T) := \exp\left(\pi_m\phi_0 T^n + \pi_{m-1}\phi_1\frac{T^{np}}{p} + \cdots + \pi_0\phi_m\frac{T^{np^m}}{p^m}\right) \tag{2.3.1}$$

converge pour $|T| < 1$. De plus, elle est surconvergente (i.e. converge pour $|T| < 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$) si et seulement si $|\lambda_i| < 1$, pour tout $i = 0, \cdots, m$.

En particulier, la série

$$\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_d(p^{m+1} \cdot \boldsymbol{\lambda}, T) \ , \tag{2.3.2}$$

est toujours surconvergente.

Exemple 2.4. *Pour* $m = 0$ *et* $n = 1$ *(i.e.* $d = 1$*), on trouve*

$$\mathrm{e}_1(\lambda_0, T) = \exp(\pi_0\lambda_0 T) \ , \tag{2.4.1}$$

$$\mathrm{e}_1(\lambda_0, T)^p = \exp(\pi_0\lambda_0 T)^p = \exp(\pi_0 p\lambda_0 T) \ . \tag{2.4.2}$$

Dans l'article on trouve une étude détaillée de l'équation différéntielle satisfaite par une $\boldsymbol{\pi}-$exponentielle.

Proposition 2.5. *L'équation différentielle satisfaite par* $\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1})$ *est*

$$\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda}) := \partial_T - \frac{\partial_T(\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1}))}{\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1})} = \partial_T + n \cdot (\sum_{j=0}^{m} \pi_{m-j} \cdot \phi_j \cdot T^{-np^j}) \ . \tag{2.5.1}$$

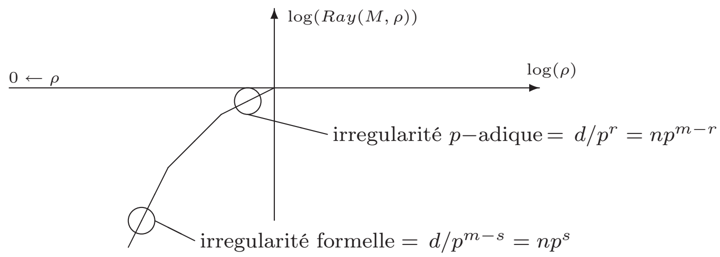
Ou $\partial_T = T\frac{d}{dT}$. On définit $s, r \leqslant m$ respectivement par $\phi = \langle \phi_0, \ldots, \phi_s, 0, \ldots, 0\rangle$, avec $\phi_s \neq 0$, et $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, avec $|\lambda_0|, \ldots, |\lambda_{r-1}| < 1$ et $|\lambda_r| = 1$. Par convention, si $|\lambda_i| < 1$ pour tout i, on pose $r = \infty$. Alors :

- *L'opérateur $\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda})$ est trivial sur $\mathcal{R}_K$ (i.e. $\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1}) \in \mathcal{R}_K$) si et seulement si $r = \infty$, (i.e. $|\lambda_0|, \ldots, |\lambda_m| < 1$).*
- *Plus précisement l'irrégularité* formelle *de $\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda})$ est égale a $d/p^{m-s} = np^s$ et l'irregularité* $p-$adique *est égale à $d/p^r = np^{m-r}$.*

Voici le graphe logarithmique de la fonction

$$\rho \mapsto Ray(\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda}), \rho)/\rho \tag{2.5.2}$$

où $Ray(\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda}), \rho)$ est la rayon de convergence générique en ρ de $\mathrm{L}_d(\boldsymbol{\lambda})$:



• Dans les notations précédentes, soit k_L le corps residuel de L. Soit $\varphi : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L$ un Frobenius qui réleve la puissance $p-$ème de k_L. Nous dénotons encore par $\varphi : \mathbf{W}(\mathcal{O}_L) \to \mathbf{W}(\mathcal{O}_L)$ le morphisme d'anneau déduit par fonctorialité.

La proposition suivante dépend fortement de la théorie de Lubin-Tate :

Proposition 2.6. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{W}(\mathcal{O}_L)$, la série formelle

$$\theta_d(\boldsymbol{\lambda}, T) := \frac{\mathrm{e}_d(\varphi(\boldsymbol{\lambda}), T^p)}{\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T)} \tag{2.6.1}$$

est surconvergente si et seulement si le groupe $\mathfrak{G}_P$ est isomorphe au groupe multiplicatif formel $\widehat{\mathbb{G}}_m$. Dans ce cas, on peut considérer sa valeur en 1.

Exemple 2.7. *Pour $d = 1$ on trouve*

$$\theta_1(\lambda_0, T) = \exp(\pi_0(\varphi(\lambda_0)T^p - \lambda_0 T)) \ . \tag{2.7.1}$$

En particulier, si $P(X) = X^p + pX$ (i.e. π_0 est le π de Dwork), alors on retrouve la bien connue "splitting function" de Dwork (cf. [Dwo62, §4,a)])

$$\theta_1(1, T) = \exp(\pi_0(T^p - T)) \ . \tag{2.7.2}$$

3. Une déformation du complexe de Artin-Schreier-Witt dans le complexe de Kummer

Dorénavant nous supposerons que $\mathfrak{G}_P$ est isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_m$. Ceci révient a demander que $\mathrm{w} = p$.

Les théories de Artin-Schreier-Witt et de Kummer consistent dans la donnée de deux complexes qui calculent la cohomologie galoisienne.

$$\begin{tikzcd}
\text{char } 0 & 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m(L) \arrow[r, "x \to x^{p^{m+1}}"] & \mathbb{G}_m(L) \arrow[r] & 0 & \text{Kummer} \\
\text{char } p \arrow[u, dotted] & 0 \arrow[r] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, "\mathrm{F}-1"'] \arrow[u, dotted, "\theta"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "e"'] & 0 & \text{Artin-Schreier}
\end{tikzcd}$$

Le théorème suivant "*déforme*" le complexe de Artin-Schreier-Witt dans celui de Kummer. Les applications qui déforment un complexe dans l'autre sont *la valeur en* $T = 1$ *des* $\boldsymbol{\pi}-$*exponentielles surconvergents* $\theta_{p^m}(-,T)$ *et* $\mathrm{e}_{p^m}(-,T)^{p^{m+1}}$.

Ce théorème constitue l'analogue d'une partie de la théorie de Sekigichi-Suwa (cf. [SS94]).

Théorème 3.1. Posons $\mathrm{G}_L := \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{alg}}/L)$, $\mathrm{G}_{k_L} := \mathrm{Gal}(k_L^{\mathrm{sep}}/k_L)$ et $\mathcal{O}_L^{\varphi=1} := \{a \in \mathcal{O}_L \mid a^{\varphi} = a\}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}} \arrow[r] & L^{\times} \arrow[r, "x \mapsto x^{p^{m+1}}"'] & L^{\times} \arrow[r, two heads, "\delta_{\mathrm{Kum}}"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_L, \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}) \\
 & \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L^{\varphi=1}) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, hook] & \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L) \arrow[u, "\theta_{p^m}(-,1)"] \arrow[d] \arrow[r, "\varphi-1"'] & \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L) \arrow[u, "\mathrm{e}_{p^m}(-,1)^{p^{m+1}}"'] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[uu, dotted, bend left, "\wr"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, "\bar{\mathrm{F}}-1"'] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, two heads, "\delta"'] & \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[uu, dotted, hook, "\bar{e}"]
\end{tikzcd}$$

où $\bar{\mathrm{F}}$ est le Frobenius de $\mathbf{W}_m(k_L)$. De plus, $\theta_{p^m}(-,1)$ induit une identification

$$1 \mapsto \xi_m^{-1} \ : \ \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{m+1}} \ , \tag{3.1.1}$$

où ξ_m est l'unique racine $p^{m+1}-$ème de 1 tel que $|(\xi_m - 1) - \pi_m| < |\pi_m|$.

Exemple 3.2. *La dernière partie de ce théorème généralise le fait bien connu que la fonction surconvergente* $\theta_1(1,T) = \exp(\pi_0(T^p - T))$ *a pour valeur en* $T = 1$ *l'unique racine* $p-$*ème de l'unité* ξ_0^{-1} *qui vérifie* $|\xi_0 - 1 - \pi_0| < |\pi_0|$ *(cf. ex.2.7).*

Ceci permet de donner la description suivante des extensions cycliques *non ramifiées* de L dont l'ordre est une puissance de p :

Corollaire 3.3. Soit $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{W}_m(k_L)$. Soit k'/k_L l'extension définie par $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$.[1] Alors l'extension non ramifiée L' de L correspondante à k' est donnée par

$$L' = L(\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)) \ , \tag{3.3.1}$$

où $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_{L'})$ est une relèvement arbitraire d'une solution $\bar{\boldsymbol{\nu}}$, dans $\mathbf{W}_m(k_L^{\mathrm{sep}})$, de l'équation

$$\bar{\mathrm{F}}(\bar{\boldsymbol{\nu}}) - \bar{\boldsymbol{\nu}} = \overline{\boldsymbol{\lambda}} \ . \tag{3.3.2}$$

Exemple 3.4. *Si* $m = 0$*, alors la suite de Artin-Schreier est*

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to k_L \xrightarrow[\nu \mapsto \nu^p - \nu]{} k_L \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0 \ , \tag{3.4.1}$$

Si $\bar{\lambda} \in k_L$*, alors l'extension* k'/k_L *définié par* $\bar{\lambda}$ *est, par définition, le sous-corps de* k^{sep} *stabilisé par le noyau de* $\delta(\lambda)$ *et est égale à* $k' = k_L(\bar{\nu})$*, où* $\bar{\nu} \in k^{\mathrm{sep}}$ *est une racine de l'équation* $\bar{\nu}^p - \bar{\nu} = \bar{\lambda}$*. L'extension de* L'/L *est alors donnée par*

$$L' = L(\theta_1(\nu, T)_{|T=1}) = L(\ \exp(\pi_0(\varphi(\nu)T^p - \nu T))_{|T=1}\ ) \ . \tag{3.4.2}$$

Remarque 3.5. *Le corollaire 3.3 n'est pas entièrement explicite car il necessite le calcul de* $\bar{\boldsymbol{\nu}}$*. Nous allons voir que, bien que* $\mathcal{E}_K^{\dagger}$ *ne soit pas complèt, ce corollaire s'applique aussi au cas* $L = \mathcal{E}_K^{\dagger}$*. Dans ce cas nous aurons une description meilleure qui dépend uniquement de* $\boldsymbol{\lambda}$*, et ne nécessite pas le calcul de* $\boldsymbol{\nu}$ *(cf. 5.2). En effet on remarque qu'on a l'identité*

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1)^{p^{m+1}} \ . \tag{3.5.1}$$

[1] Rappelons que l'extension k' est par définition le corps fixé par le noyau du caractère $\delta(\boldsymbol{\lambda}) : G_{k_L} \to \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$, où δ est le morphisme cohomologique de Artin-Schreier-Witt défini dans le diagramme du théorème 3.1.

Au contraire, l'écriture $\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu},1) = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda},1)$ n'a pas de sens car la série $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda},T)$ n'est pas surconvergente et on ne peut pas prendre sa valeur en $T=1$. Dans le cas du corps $\mathcal{E}_K^\dagger$ nous allons donner un sens au symbole $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda},1)$ pour une classe de vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ qui est suffisamment grande pour décrire toutes les extensions non ramifiée de $\mathcal{E}_K^\dagger$ qui proviennent par henselianité d'une extension séparable de son corps residuel $k(\!(t)\!)$ (voir théorème 5.2).

4. Equations différentielles solubles de rang un

Posons $\partial_T := T\frac{d}{dT}$. Les modules différentiels solubles de rang un sur $\mathcal{R}_K$ sont, dans une base convenable, définis par un équation $\partial_T - g(T)$, où $g(T) \in K[T^{-1}]$. La solution de Taylor à l'infini d'une telle équation s'exprime comme produit de $\boldsymbol{\pi}-$exponentielles. Cette solution est l'analogue de l'élément $\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu},1)$ du corollaire 3.3. Remarquons que le diagramme du théorème 3.1 donne l'équation

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu},1)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda},1)^{p^{m+1}} \ . \tag{4.0.2}$$

Bien que la série entière $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda},T)$ ne soit pas en général surconvergente, cette remarque justifie la définition suivante

Définition 4.1. *Soit $m \geqslant 0$ et soit $\boldsymbol{f}^-(T) := (f_0^-(T),\ldots,f_m^-(T))$ un vecteur de Witt dans $\mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$. Soit $(\phi_0(T),\ldots,\phi_m(T))$ son vecteur fantôme. Nous posons*

$$\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1) := \exp\left(\pi_m\phi_0(T) + \pi_{m-1}\frac{\phi_1(T)}{p} + \cdots + \pi_0\frac{\phi_m(T)}{p^m}\right) \ . \tag{4.1.1}$$

• La série formelle $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ appartient à $1+\pi_m T^{-1}\mathcal{O}_K[[T^{-1}]]$, et est donc convergente pour $|T|>1$.

• Sa différentielle logarithmique $g(T) := \partial_T(\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1))/\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ est un polynôme en T^{-1} sans terme constant. On pose

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{f}^-(T),0) := \partial_T - g(T) \ , \tag{4.1.2}$$

cette équation est triviale sur $\mathcal{R}_K$ si et seulement si sa solution $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ appartient a $\mathcal{R}_K$.

• On étudie la série $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ en la décomposant en produit fini de $\boldsymbol{\pi}-$exponentielles élémentaires de la forme 2.3.1. On développe le langage qui permet de passer d'une écriture à l'autre.

• La fonction $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ est algébrique sur $\mathcal{R}_K$ (resp. $\mathcal{E}_K^\dagger$) et est aussi le générateur d'une extension de Kummer de $\mathcal{E}_K^\dagger$, car on a

$$\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_{p^m}(p^{m+1}\cdot\boldsymbol{f}^-(T),1) \in \mathcal{E}_K^\dagger \ . \tag{4.1.3}$$

Plus précisement, on a les résultats suivants qui font le pont entre la théorie de Artin-Schreier-Witt pour le corps $k(\!(t)\!)$ et les équations différentielles sur $\mathcal{R}_K$.

Théorème 4.2. Tout module différentiel soluble sur $\mathcal{R}_K$ a une base dans laquelle l'opérateur associé est défini à l'infini. La solution de Taylor à l'infini de cet opérateur est alors de la forme

$$T^{a_0}\cdot\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1) \tag{4.2.1}$$

pour un $m \geqslant 0$ convenable, un $a_0 \in \mathbb{Z}_p$, et un vecteur de Witt $\boldsymbol{f}^-(T) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_{K_m}[T^{-1}])$, où $K_m := K(\boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}})$.

Théorème 4.3. La série formelle $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ est surconvergente si et seulement si l'équation d'Artin-Schreier-Witt

$$\bar{\mathrm{F}}(\bar{\boldsymbol{g}}) - \bar{\boldsymbol{g}} = \overline{\boldsymbol{f}^-(T)} \in \mathbf{W}_m(k(\!(t)\!)) \tag{4.3.1}$$

a une solution $\bar{\boldsymbol{g}} \in \mathbf{W}_m(k((t))^{\mathrm{sep}})$. En particulier si $\varphi : \mathcal{E}_K^\dagger \to \mathcal{E}_K^\dagger$ est un morphisme d'anneaux qui relève la puissance $p-$ème de $k((t))$, alors la série

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1) := \mathrm{e}_{p^m}(\varphi(\boldsymbol{f}^-(T)) - \boldsymbol{f}^-(T),1) \tag{4.3.2}$$

est surconvergent pour tout $\boldsymbol{f}^-(T) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$.

Exemple 4.4. *Si $P(X) = X^p + pX$, et si $\boldsymbol{f}^-(T) = T^{-1}$, $m = 1$, alors on retrouve*

$$\mathrm{e}_1(T^{-1},1) = \exp(\pi_0 T^{-1}) \;, \tag{4.4.1}$$

dans ce cas $\exp(\pi_0 T^{-1})^p = \exp(\pi_0 p T^{-1}) \in \mathcal{E}_K^\dagger$. D'autre part on trouve

$$\theta_1(T^{-1},1) = \exp(\pi_0(T^{-p} - T^{-1})) \;. \tag{4.4.2}$$

DÉFINITION 4.5. *Soit $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_K)$ le groupe, pour le produit tensoriel, des classes d'isomorphisme des modules différentiels de rang un sur $\mathcal{R}_K$. Soit $K_\infty := \cup_{m\geqslant 0} K_m$, où $K_m := K(\pi_m)$. Nous posons*

$$\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty}) := \bigcup_{m\geqslant 0} \mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_m}) \;. \tag{4.5.1}$$

Corollaire 4.6. Soit k_∞ le corps résiduel de K_∞. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty}) &= \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} \times \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_{k_\infty((t))}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) && (4.6.1)\\ &= \mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} \times \frac{\mathbf{CW}(k_\infty((t)))}{(\bar{\mathrm{F}} - \mathrm{Id})\mathbf{CW}(k_\infty((t)))} \;. && (4.6.2) \end{aligned}$$

• Le groupe $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty})$ est le groupe des caractères du groupe de Galois tannakien de la catégorie des modules différentiels sur l'anneau de $\mathcal{R}_{K_\infty}$.[2]

• Nous donnons aussi une description du sous-groupe de $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty})$ formé par les équations qui sont trivialisées par une extension spéciale $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}_K$ (i.e. une extension étale finie de $\mathcal{R}_K$ qui "provient" d'une extension finie séparable de $k((t))$ cf. [Mat02, 5.1]).

4.1 Un critère de solubilité

Nous obtenons un critère de solubilité pour les équations différentielles de rang un à coefficients dans $\mathcal{R}_K$, sans avoir besoin de passer à K_∞.

Théorème 4.7. Soit $g(T) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \in \mathcal{R}_K$. Alors l'équation différentielle $\partial_T - g(T)$ est soluble si et seulement si, pour tout entier n premier à p, les vecteurs

$$\Big(-\frac{a_{-n}}{n}, -\frac{a_{-np}}{n}, -\frac{a_{-np^2}}{n}, \dots\Big) \quad , \quad \Big(\frac{a_n}{n}, \frac{a_{np}}{n}, \frac{a_{np^2}}{n}, \dots\Big)$$

sont les vecteurs fantômes de vecteurs de Witt $\boldsymbol{\lambda}_{-n} = (\lambda_{-n,0}, \lambda_{-n,1}, \dots)$ et $\boldsymbol{\lambda}_n = (\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \dots)$ qui appartiennent à $\mathbf{W}(\mathcal{O}_K)$. Très explicitement $\partial_T - g(T)$ est soluble si et seulement si pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, avec n premier a p, ils existent $\lambda_{n,m} \in \mathcal{O}_K$, de telle sorte que

$$\begin{aligned} a_{-np^m} &= -n\cdot\phi_{-n,m} &:=& -n\cdot(\lambda_{-n,0}^{p^m} + p\lambda_{-n,1}^{p^{m-1}} + \dots + p^m\lambda_{-n,m}) \;,\\ a_{np^m} &= n\cdot\phi_{n,m} &:=& n\cdot(\lambda_{n,0}^{p^m} + p\lambda_{n,1}^{p^{m-1}} + \dots + p^m\lambda_{n,m}) \;. \end{aligned}$$

• On remarque que si l'on considère une famille arbitraire de vecteurs $\{\boldsymbol{\lambda}_{-n}, \boldsymbol{\lambda}_n\}_{(n,p)=1}$ dans $\mathbf{W}(\mathcal{O}_K)$, et si l'on forme la série formelle

$$g(T) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{m\geqslant 0} n\phi_{n,m} T^{np^m} ,$$

[2] Remarquons que le corps K_∞ n'est pas complet. L'anneau $\mathcal{R}_{K_\infty}$ est alors *défini* par $\mathcal{R}_{K_\infty} := \mathcal{R}_K \otimes_K K_\infty$. De cette façon tout module différentielle sur $\mathcal{R}_{K_\infty}$ provient, per extension des scalaires, d'un module sur $\mathcal{R}_{K_m}$, pour un K_m convenable.

il n'est pas vrai en général que cette série soit dans $\mathcal{R}_K$, ni qu'elle converge sur une couronne. Nous donnons une caractérisation des familles $\{\boldsymbol{\lambda}_{-n},\boldsymbol{\lambda}_n\}_{(n,p)=1}$ pour lesquelles cette série est bien dans $\mathcal{R}_K$.

Le théorème précédent donne alors le corollaire suivant

Corollaire 4.8. Si K est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, alors toute équation différentielle soluble de rang un sur $\mathcal{R}_K$ est modérée (i.e. isomorphe à une equation du type $\partial_T - a_0$, avec $a_0 \in \mathbb{Z}_p$).

5. Calcul explicite du foncteur de monodromie pour les caractères

Supposons que k soit un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $\Lambda/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^r$, qui contient les racines $p^{m+1}-$èmes de 1. Nous supposons de plus que Λ est munie d'un Frobenius $\sigma_0 : \Lambda \to \Lambda$ qui relève la puissance $p-$ième de $\mathbb{F}_q$, et tel que $\sigma_0^r = \mathrm{Id}_\Lambda$ et $\sigma_0(\pi_m) = \pi_m$. Nous notons encore par σ_0 (resp. σ) le Frobenius $\sigma_0 \otimes \mathrm{F}$ (resp. $\mathrm{Id} \otimes \mathrm{F}^r$) sur l'anneau

$$K := \Lambda \otimes_{\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)} \mathbf{W}(k)\ .$$

Notons par $\mathcal{O}_K^\dagger$ l'anneau des entiers du corps $\mathcal{E}_K^\dagger$. Nous fixons donc un Frobenius $\varphi_0 : \mathcal{O}_K^\dagger \to \mathcal{O}_K^\dagger$ qui prolonge $\sigma_0 : K \to K$. Alors φ_0 et $\varphi := \varphi_0^r$ s'étendent de manière unique à toute extension finie non ramifié de $\mathcal{E}_K^\dagger$.

- Soit $\mathrm{G}_{k((t))}$ le groupe de Galois absolu du corps $k((t))$. Pour tout caractère

$$\alpha : \mathrm{G}_{k((t))} \to \Lambda^\times\ ,$$

notons V_α la représentation de $\mathrm{G}_{k((t))}$ donnée dans une base $\mathbf{e} \in \mathrm{V}_\alpha$ par

$$\gamma(\mathbf{e}) := \alpha(\gamma)\cdot\mathbf{e}\ , \quad \text{pour tout } \ \gamma \in \mathrm{G}_{k((t))}.$$

Si maintenant

$$\alpha : \mathrm{G}_{k((t))} \to \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$$

est un caractère, et si ξ_m est la racine définie dans le théorème 3.1, nous notons encore par V_α la représentation obtenue par composition $\imath\circ\alpha : \mathrm{G}_{k((t))} \to \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}$ ou

$$\imath\ :\ 1 \mapsto \xi_m \quad :\quad \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\ \sim\ } \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}\ . \tag{5.0.1}$$

- Notons par $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ le $\varphi-$module sur $\mathcal{E}_K^\dagger$ défini par

$$(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)\ ,\ \varphi_{\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)}) := ((\mathrm{V}_\alpha \otimes_\Lambda \mathcal{E}_K^{\dagger,\mathrm{unr}})^{\mathrm{G}_{k((t))}}\ ,\ 1\otimes\varphi\ )\ .$$

L'application $1 \otimes \partial_T$ est alors une connection sur $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$. Nous notons par $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ l'équation différentielle de rang un sur $\mathcal{R}_K$ ainsi définie.

- L'abélianisé $\mathrm{G}_{k((t))}^{\mathrm{ab}}$ se décompose comme

$$\mathrm{G}_{k((t))}^{\mathrm{ab}} = \mathcal{I}_{k((t))}^{\mathrm{ab}} \oplus \mathrm{G}_k^{\mathrm{ab}}\ ,$$

où G_k est le groupe de Galois absolu de k. Ceci implique que tout caractère α de $\mathrm{G}_{k((t))}$ est produit d'un caractère α_- de $\mathcal{I}_{k((t))}$ avec un caractère α_0 de G_k. En termes de représentations ceci s'exprime en disant que

$$\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{V}_{\alpha_-} \otimes \mathrm{V}_{\alpha_0}\ . \tag{5.0.2}$$

On trouve que $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_0}) = 0$.

• Soit maintenant $\alpha : \mathcal{I}_{k((t))} \to \Lambda$ un caractère avec *image finie*. Alors le groupe abélien $\alpha(\mathcal{I}^{\mathrm{ab}}_{k((t))}) \subseteq \boldsymbol{\mu}_n$ se décompose en un produit de groupes cycliques. Pour calculer $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ et $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$, on peut alors supposer que α est un caractère cyclique, c'est à dire que :

$$\alpha : \mathcal{I}_{k((t))} \to \boldsymbol{\mu}_{\ell^m} \tag{5.0.3}$$

où ℓ est un nombre premier.

• Pour ℓ premier a p on trouve que l'extension définie par le noyau de α est $k((t^{1/\ell^m}))$, et alors on a $\alpha(\gamma) = \gamma(t^{1/\ell^m})/t^{1/\ell^m}$ pour tout $\gamma \in \mathcal{I}_{k((t))}$:

$$\gamma(\mathbf{e}) := \gamma(t^{1/\ell^m})/t^{1/\ell^m} \cdot \mathbf{e}\ .$$

On relève, par hensélianité, $k((t^{1/\ell^m}))$ en une extension kummérienne de $\mathcal{E}^\dagger_K$, dont un générateur de kummer est donné visiblement par T^{1/ℓ^m}. Donc une base de $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ est donnée par

$$\mathbf{e} \otimes T^{-1/\ell^m} \in (\mathrm{V}_\alpha \otimes_\Lambda \mathcal{E}^{\dagger,\mathrm{unr}}_K)^{\mathrm{G}_{k((t))}}\ . \tag{5.0.4}$$

On calcule alors facilement la matrice du Frobenius et de la connexion :

$$(1\otimes\varphi)(\mathbf{e}\otimes T^{-1/\ell^m}) = T^{1/\ell^m}\varphi(T^{-1/\ell^m})\cdot(\mathbf{e}\otimes T^{-1/\ell^m})\ , \tag{5.0.5}$$

$$(1\otimes\partial_T)(\mathbf{e}\otimes T^{-1/\ell^m}) = -1/\ell^m\cdot(\mathbf{e}\otimes T^{-1/\ell^m})\ . \tag{5.0.6}$$

En particulier l'équation différentielle est $\mathrm{L}(0, a_0)$, avec $a_0 = 1/\ell^m$ (cf. 4.1.2).

Le cas $\ell = p^m$ est traité dans le paragraphe suivant.

5.1 Cas de la $p-$torsion

Pour $\ell = p$ on rencontre le problème technique de trouver un générateur de Kummer explicite de l'extension non ramifiée de $\mathcal{E}^\dagger_K$ attachée a une extension finie séparable de $k((t))$ cyclique de degrée p^m. Ce problème est résolu par le corollaire 3.3. De plus l'équation 4.0.2 montre comment décrire l'élement $\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)$. On obtient donc les théorèmes 5.2 et 5.4.

Définition 5.1. *Soit $\overline{\boldsymbol{f}(t)} = (\overline{f_0(t)}, \ldots, \overline{f_m(t)}) \in \mathbf{W}_m(k((t)))$ un vecteur de Witt. Si $\overline{f_i(t)} = \sum_{n\geqslant n_i} \bar{a}_i t^i$, nous posons $\overline{f_i^-(t)} := \sum_{n_i\leqslant n\leqslant -1} \bar{a}_i t^i$ et*

$$\overline{\boldsymbol{f}^-(t)} := (\overline{f_0^-(t)}, \ldots, \overline{f_m^-(t)})\ . \tag{5.1.1}$$

Le théorème suivant donne une description des extensions Kummeriennes non ramifiées de $\mathcal{E}^\dagger_K$ dont le corps résiduel est une extension d'Artin-Schreier-Witt donnée de $k((t))$ (i.e. cyclique d'ordre une puissance de p). Rappelons la suite d'Artin-Schreier-Witt :

$$0 \to \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \to \mathbf{W}_m(k((t))) \xrightarrow{\bar{\mathrm{F}}-1} \mathbf{W}_m(k((t))) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{k((t))}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \to 0 \tag{5.1.2}$$

Théorème 5.2. Soit $\overline{\boldsymbol{f}(t)} \in \mathbf{W}_m(k((t)))$ et soit $\alpha = \delta(\overline{\boldsymbol{f}(t)})$ le caractère de Artin-Schreier-Witt défini par $\overline{\boldsymbol{f}(t)}$. Soit $k'((t'))$ l'extension finie séparable de $k((t))$ fixée par le noyau de α. Soit $(\mathcal{E}^\dagger)'$ l'extension non ramifiée de $\mathcal{E}^\dagger_K$ obtenue par hensélianité de $k'((t'))$. Alors on a

$$(\mathcal{E}^\dagger)' = \mathcal{E}^\dagger_{K'}(\ \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T), 1)\ ), \tag{5.2.1}$$

ou K' est l'extension non ramifiée de K attachée par henselianité a k'/k, et $\boldsymbol{f}^-(T) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$ est un relèvement arbitraire de $\overline{\boldsymbol{f}^-(t)}$.

Exemple 5.3. *1.– Si $m = 0$, et $\boldsymbol{f}^-(T) = T^{-1}$, alors, comme $\boldsymbol{f}^-(T)$ n'a pas de terme constant, alors l'extension $k'((t'))/k((t))$ est totalement ramifié (i.e. on a $k' = k$). Plus précisement l'on a*

$$\frac{1}{(t')^p} - \frac{1}{t'} = \frac{1}{t}\ , \qquad k((t')) = k((t))[t']\ . \tag{5.3.1}$$

L'extension non ramifiée $(\mathcal{E}^\dagger)'/\mathcal{E}_K^\dagger$ qui correspond a $k((t'))$ est donnée par

$$\frac{1}{(T')^p} - \frac{1}{T'} = \frac{1}{T} \;, \qquad (\mathcal{E}^\dagger)' = \mathcal{E}_K^\dagger[T'] \;. \tag{5.3.2}$$

Mais, par le théorème 5.2, elle peut s'exprimer comme

$$(\mathcal{E}^\dagger)' = \mathcal{E}_K^\dagger(\,\exp(\pi_0 T^{-1})\,) \;. \tag{5.3.3}$$

2.– On remarque que $(\mathcal{E}^\dagger)'$ et $\mathcal{E}_K^\dagger$ sont isomorphes par l'isomorphisme (non canonique) donné par $T \mapsto T'$. Si l'on exprime $\exp(\pi T^{-1})$ dans la nouvelle variable T' on trouve (cf. 5.3.2)

$$\exp(\pi T^{-1}) = \exp(\pi\ ((T')^{-p} - (T')^{-1})\ ) = \theta((T')^{-1}, 1) \tag{5.3.4}$$

et l'on a donné un sens à l'égalité

$$\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1) = \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1) \tag{5.3.5}$$

qu'on avait envisagée dans 3.5.1.

Théorème 5.4. Soit $\overline{\boldsymbol{f}(t)} \in \mathbf{W}_m(k((t)))$ et soit $\alpha = \delta(\overline{\boldsymbol{f}(t)})$ le caractère de Artin-Schreier-Witt défini par $\overline{\boldsymbol{f}(t)}$. Alors

i) Une base de $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ est donnée par

$$\mathbf{e} \otimes \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1) \;, \tag{5.4.1}$$

où $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{W}_m(\widehat{\mathcal{E}}_K^{\mathrm{unr}})$ est une solution de l'équation

$$\varphi_0(\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}(T) \;, \tag{5.4.2}$$

où $\boldsymbol{f}(T) \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_K[[T]][T^{-1}])$ est un relèvement arbitraire de $\overline{\boldsymbol{f}}(t)$;

ii) Le Frobenius φ_0 agit sur V_α, et l'on a

$$\varphi_0\big(\mathbf{e} \otimes \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)\big) = \theta_{p^m}(\boldsymbol{f}(T), 1) \cdot \big(\mathbf{e} \otimes \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)\big) \;. \tag{5.4.3}$$

Donc, si

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{f}(T)) := \boldsymbol{f}(T) + \varphi_0(\boldsymbol{f}(T)) + \cdots + \varphi_0^{r-1}(\boldsymbol{f}(T)),$$

alors

$$\varphi\big(\mathbf{e} \otimes \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)\big) = \theta_{p^m}(\mathrm{Tr}(\boldsymbol{f}(T)), 1) \cdot \big(\mathbf{e} \otimes \theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu}, 1)\big) \;; \tag{5.4.4}$$

iii) La classe d'isomorphisme de $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ dépend seulement du caractère α_- et le module différentiel $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ est isomorphe au module différentiel défini par l'opérateur $\mathrm{L}(\boldsymbol{f}^-(T), 0)$ (cf. 4.1.2) où $\boldsymbol{f}^-(T) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$ est un vecteur de Witt arbitraire qui relève $\overline{\boldsymbol{f}^-(t)}$.

iv) L'irrégularité de $\mathbf{M}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)$ est égale au conducteur de Swan de la représentation V_α.

Exemple 5.5. *Soit $\alpha : \mathrm{Gal}(k((t))^{\mathrm{sep}}/k((t))) \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le caractère de Artin-Schreier défini par $t^{-1} \in k((t))$. Si y est une solution de l'équation $y^p - y = t^{-1}$, alors on a*

$$\alpha(\gamma) = \gamma(y) - y \in \mathbb{F}_p \;, \qquad \textit{pour tout} \quad \gamma \in \mathrm{Gal}(k((t))^{\mathrm{sep}}/k((t))) \;. \tag{5.5.1}$$

Notons encore par $\alpha : \mathrm{Gal}(k((t))^{\mathrm{sep}}/k((t))) \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_p$ le morphisme obtenu par composition avec 5.0.1. Dans cet exemple $\Lambda = \mathbb{Q}_p(\xi_0)$, avec $\xi_0^p = 1$, $\xi_0 \neq 1$, et

$$\sigma_0 = \sigma = \mathrm{Id}_\Lambda \otimes \mathrm{F} \tag{5.5.2}$$

$$\varphi_0(T) = \varphi(T) = T^p \tag{5.5.3}$$

$$\alpha = \alpha^- \tag{5.5.4}$$

Dans les notations de l'exemple 5.3 on obtient que une base de $\mathbf{D}^{\dagger}(\mathrm{V}_{\alpha})$ *est donnée par (cf.5.4.1 et 5.3.4) :*

$$\mathbf{e} \otimes \exp(\pi_0 T^{-1})\ , \tag{5.5.5}$$

$$\boldsymbol{\nu} = (t')^{-1} \tag{5.5.6}$$

$$\mathrm{Tr}(T^{-1}) = T^{-1} \tag{5.5.7}$$

La matrice de φ *agissant sur* V_{α} *est alors égale à*

$$\theta_{p^m}(T^{-1}, 1) = \exp(\pi_0(T^{-p} - T^{-1}))\ . \tag{5.5.8}$$

L'équation différentielle définie par $\mathbf{M}^{\dagger}(\mathrm{V}_{\alpha})$ *est*

$$T\frac{d}{dT} + \pi_0 T^{-1}\ . \tag{5.5.9}$$

Le conducteur de Swan de V_{α} *et l'irrégularité de cette équation sont égales à* 1*.*

Remarque 5.6. *En general si l'on ne considère que des vecteurs de Witt de longueur* 0*, on retrouve les calculs faits par Dwork. Nous envisageons donc, dans le futur, de reprendre ses calculs sur la fontion Gamma* $p-$*adique, sur le principle de Boyarsky, et sur les fonctions zéta des variétés en caractéristique* p *pour les généraliser.*

6. Deuxième article

Dans le deuxième article nous étudions, dans le cadre $p-$adique, le phénomèns de la *confluence* d'une famille d'équations aux $q-$différences vers une équation différentielle et celui de la *déformation* d'une équation différentielle vers une équation aux $q-$différences.

Soit B un anneau de fonctions sur un domaine D. Soit $\mathcal{Q}$ un sous-groupe multiplicatif de $K^\times$ tel que D est stable par tout homothetie $x \mapsto qx$, avec $q \in \mathcal{Q}$. Pour tout $q \in \mathcal{Q}$, notons par σ_q l'automorphisme de B donné par $f(T) \mapsto f(qT)$. La $q-$dérivation est alors

$$\Delta_q(f(T)) := \frac{f(qT) - f(T)}{q - 1} \ . \tag{6.0.1}$$

Pour q qui tend vers 1, la $q-$dérivation tend vers la dérivation $\delta_1 := T\frac{d}{dT}$ de B. Soit maintenant

$$\{\Delta_q(Y) = H(q,T) \cdot Y\}_{q\in\mathcal{Q}} \tag{6.0.2}$$

une famille d'équations aux $q-$différences. Dans le cadre classique, la confluence et la déformation décrivent le fait heuristique que certaines de ces familes d'équations ont la propriété suivante : lorsque q tend vers 1, l'équation $\Delta_q - H(q,T)$ "tend" vers une équation différentielle $\delta_1 - G(1,T)$, en ce sens que la solution $Y_q(T)$ de l'équation $\Delta_q - H(q,T)$ "tend" vers la solution $Y_1(T)$ de l'équation différentielle $\delta_1 - G(1,T)$:

$$\lim_{q\to 1} Y_q(T) = Y_1(T) \ . \tag{6.0.3}$$

Nous montrons, dans le contexte $p-$adique, que si l'on part d'une seule équation aux q_0-différences $\sigma_{q_0}(Y) = A_{q_0}(T) \cdot Y$, alors, si la solution Y_{q_0} satisfait certaines conditions, il existe un sous-groupe ouvert $U \subseteq \mathcal{Q}$ et une famille canonique d'équations aux $q-$différences

$$\{\sigma_q(Y) = A(q,T) \cdot Y\}_{q\in U} \ , \tag{6.0.4}$$

tels que la matrice $A(q,T)$ est localement analytique pour $(q,T) \in U \times D$, et vérifie $A_{q_0}(T) = A(q_0,T)$. En fait la solution de Taylor $Y(T,c)$ de 6.0.4, en tout point c du domaine D, est la même pour toutes les équations de cette famille.

En d'autres termes, dans ce contexte $p-$adique, l'équation 6.0.3 s'écrit

$$Y_q(T) = Y_1(T) \ , \quad \forall\, q \in U \ . \tag{6.0.5}$$

On remarque que, comme la solution $Y(T,c)$ est en même temps solution de chacune des équations de la famille 6.0.4, la famille peut être entièrement reconstituée à partir de la solution $Y(T,c)$. En effet $A(q,T) = Y(qT,c) \cdot Y(T,c)^{-1}$.

Ceci montre que le module M aux q_0-différences donné au départ est canoniquement muni d'une action de σ_q, pour tout $q \in U$. Ceci s'exprime en disant que M est un *faisceau* de modules sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_\mathcal{Q}$ défini par

$$\mathcal{O}_\mathcal{Q}(U) := \mathrm{B}[\{\sigma_q, \sigma_q^{-1}\}_{q\in U}] \ . \tag{6.0.6}$$

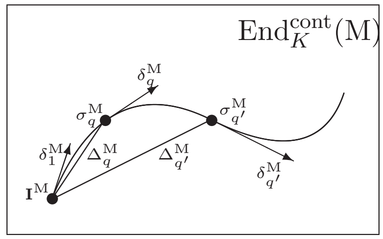
Nous dirons que M est un $\sigma-$module analytique. Nous dirons que M est *constant* sur U s'il existe une solution $Y(T,c)$ qui soit solution simultanée de toute fibre de M.

Pour $q = 1$ la fibre n'est pas définie, car Δ_q n'est pas défini. Plus généralement, si q est égal à une racine ξ de l'unité, alors l'opérateur σ_ξ est d'ordre fini et la catégorie des équations aux $\xi-$différences est de nature fondamentalement différente par rapport à la catégorie des $q-$différences pour q proche de ξ.

Par exemple, la fibre naturelle d'un $\sigma-$module analytique, pour q proche de 1, est une équation différentielle $\delta_1 - G(1,T)$ définie par

$$G(1,T) := \lim_{q\to 1} H(q,T) = \left(q\frac{d}{dq}A(q,T)\right)_{|q=1} . \tag{6.0.7}$$

Notons par σ_q^{M}, Δ_q^{M}, δ_1^{M} l'action de $\delta_1, \sigma_q, \Delta_q$ sur M, que nous visualisons dans ce dessin :



Plus généralement pour $q = \xi$ la "vrai" fibre d'un tel faisceau est la donnée du module M, de l'opérateur d'ordre fini σ_ξ^{M}, et de l'opérateur $\xi-$tangent δ_q^{M} défini par

$$\delta_q^{\mathrm{M}} := q \lim_{q'\to q} \cdot \frac{\sigma_{q'}^{\mathrm{M}} - \sigma_q^{\mathrm{M}}}{q'-q} = \text{“}q\frac{d}{dq}(\sigma_q^{\mathrm{M}})\text{”} \tag{6.0.8}$$

Cet opérateur vérifie $\delta_q^{\mathrm{M}} = \sigma_q^{\mathrm{M}} \circ \delta_1^{\mathrm{M}}$ et donc, pour tout $f \in \mathrm{B}$ et $m \in \mathrm{M}$:

$$\delta_q^{\mathrm{M}}(f\cdot m) = \sigma_q(f)\cdot\delta_q^{\mathrm{M}}(m) + \delta_q(f)\cdot\sigma_q^{\mathrm{M}}(m) . \tag{6.0.9}$$

Pour tenir compte de ces phénomènes nous introduisons la notion de $(\sigma,\delta)-$modules analytiques.

• Les notions de "confluence forte" et de "déformation forte" consistent alors à passer d'une fibre à l'autre du $(\sigma,\delta)-$module analytique canoniquement attaché à l'équation aux q_0-différences du départ.

Exemple 6.1. L'équation différentielle de rang un $\delta_1 + \pi T^{-1}$, avec $\pi^{p-1} = -p$, a pour solution de Taylor à l'infini la fonction

$$y(T) = \exp(\pi T^{-1}) . \tag{6.1.1}$$

Nous considerons cette équation sur l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $\mathcal{A}_K(I)$, avec $I =]1-\varepsilon, 1[$, $0 < \varepsilon < 1$. Alors, si $q \in \mathrm{D}^-(1,\tau)$, avec $\tau = 1-\varepsilon$, la déformation forte envoie cet opérateur différentiel dans l'équation aux $q-$différences $\sigma_q - A(q,T)$ où

$$A(q,T) = \exp(\pi(q^{-1}-1)T^{-1}) . \tag{6.1.2}$$

En effet, comme $q \in \mathrm{D}^-(1,\tau)$, alors $A(q,T) \in \mathcal{A}_K(]1-\varepsilon,1[)^\times$, et de plus la solution de $\sigma_q - A(q,T)$ est toujours égale à $\exp(\pi T^{-1})$, pour tout $q \in \mathrm{D}^-(1,\tau)$.

Remarque 6.2. *Dans un souci de concision, les énoncés de ce résumé ne sont pas dans leur forme la plus générale, et la présentation qui en est faite ne suit pas toujour l'ordre logique des démonstrations.*

7. Théorème principal

Soit $(K, |.|)$ un corps ultramétrique sphériquement complet. Dans la suite B sera un anneau de fonctions sur un affinoïde A, ou, plus généralement, une limite inductive ou projective de tels anneaux. Par exemple $\mathrm{B} = \mathcal{R}_K, \mathcal{E}_K^\dagger$, ou $\mathrm{B} = \mathcal{H}_K^\dagger$ (les definitions de $\mathcal{R}_K$, $\mathcal{E}_K^\dagger$, ont été données dans la première partie de ce resumé, cf. 1.1.1, 1.1.2). On pose :

$$\mathcal{H}_K^\dagger := \{f(T) = \sum a_i T^i \mid f(T) \text{ converge pour } \rho_1 < |T| < \rho_2, \\ \text{pour } \rho_1 < 1 < \rho_2 \text{ non precisés}\} . \tag{7.0.1}$$

Nous notons $\mathcal{Q}$ le sous groupe topologique de $K^\times$ formé des q pour lesquels σ_q est un automorphisme de B. Le groupe $\mathcal{Q}$ est ouvert dans $K^\times$.

• Pour fixer les idées nous prenons pour B l'anneau des fonctions analytiques sur une couronne $\mathcal{C}_K(I) := \{x \in K \mid |x| \in I\}$, où $I \subseteq \mathbb{R}_\geqslant$ est un intervalle *borné*.

$$\mathcal{A}_K(I) := \{f(T) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i T^i \mid f(T) \text{ converge pour } |T| \in I\} \tag{7.0.2}$$

Alors $\mathcal{Q} = \{q \in K \mid |q| = 1\}$.

Définition 7.1. *Soit $q \in \mathcal{Q}$ un point. On dénote par*

$$\sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I)) \tag{7.1.1}$$

la catégorie des équations aux $q-$différences sur $\mathcal{A}_K(I)$

Un module aux $q-$différences M est un B$-$module libre de type fini muni d'une action bijective d'un opérateur σ_q-semilinéaire σ_q^{M} (i.e. $\sigma_q^{\mathrm{M}}(f\cdot m) = \sigma_q(f)\cdot\sigma_q^{\mathrm{M}}(m)$, pour tout $f \in \mathcal{A}_K(I)$ et $m \in$ M). Les morphismes sont ceux qui commutent à σ_q^{M}.

Si $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ est une base de M, et si $\sigma_q^{\mathrm{M}}(\mathrm{e}_i) = \sum_j a_{i,j}(q,T)\mathrm{e}_j$, alors l'opérateur attaché à M dans cette base est $\sigma_q - A(q,T)$, où $A(q,T) = (a_{i,j}(q,T))_{i,j}$. Les solutions de cet opérateur dans une B$-$algèbre C, munie d'un opérateur σ_q, sont alors en correspondance naturelle avec les morphismes $\alpha : \mathrm{M} \to \mathrm{C}$ qui commutent à σ_q.

Notation 7.2. 1.– Pour $n \geqslant 0$, nous posons $[0]_q = 0$, $[n]_q := \frac{q^n-1}{q-1}$, $[0]_q^! = 1$,

$$[n]_q^! := \prod_{i=1}^{n} [i]_q \ .$$

2.– Nous posons encore pour tout $n \geqslant 0$

$$(x-y)_{q,n} := (x-y)(x-qy)(x-q^2y)\cdots(x-q^{n-1}y) \ . \tag{7.2.1}$$

3.– Si $\sigma_q - A(q,T)$ est un opérateur aux $q-$différences, alors nous notons $H_{[n]}(T) \in M_n(\mathcal{A}_K(I))$ la matrice de l'opérateur $(\frac{1}{T}\Delta_q^{\mathrm{M}})^n$ (i.e. telle que $(\frac{1}{T}\Delta_q)^n(Y) = H_{[n]}Y$) on a alors $H_{[0]} = \mathrm{I}$, $H_{[1]}(T) = \frac{A(q,T)-\mathrm{I}}{(q-1)T}$, et

$$H_{[n+1]} = \frac{1}{T}\Delta_q(H_{[n]}) + \sigma_q(H_{[n]})\cdot H_{[1]} \ .$$

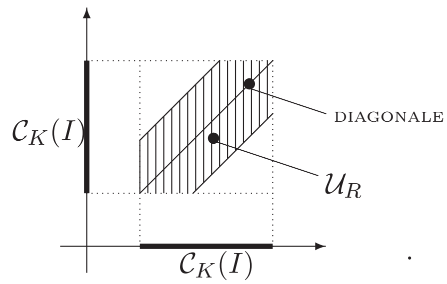
Si q n'est pas une racine de l'unité, on note

$$Y(x,y) = \sum_{n\geqslant 0} H_{[n]}(y)\frac{(x-y)_{q,n}}{[n]_q^!} \tag{7.2.2}$$

la $q-$résolvante de l'équation $\sigma_q - A(q,T)$.

Remarque 7.3. *Si $q = \xi$ est une à une racine $m-$ème de l'unité, alors $[m]_\xi = 0$ et donc $[n]_\xi^! = 0$, pour tout $n \geqslant m$. Pour cette raison il n'existe pas de $q-$résolvante si q est une racine de l'unité.*

Définition 7.4. *Soit q différent d'une racine de l'unité. Un opérateur aux $q-$différences $\sigma_q - A(q,T)$ est dit* admissible *si la $q-$résolvante $Y(x,y)$ converge dans un voisinage de la diagonale de $\mathcal{C}_K(I) \times \mathcal{C}_K(I)$ de la forme $\mathcal{U}_R := \{(x,y) \in \mathcal{C}_K(I) \mid |x-y| < R\}$, pour un $R > 0$.*



.

La sous catégorie pleine de $\sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))$ *dont les objets sont admissibles sera notée*

$$\sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \; . \tag{7.4.1}$$

Théorème 7.5 Théorème principal**.** Soient $q_0 \in \mathcal{Q}$ et $\mathrm{M} \in \sigma_{q_0} - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}$ défini dans une base par l'opérateur

$$\sigma_{q_0} - A_{q_0}(T) \; , \tag{7.5.1}$$

avec $A_{q_0}(T) \in GL_n(\mathcal{A}_K(I))$, alors il existe un sous groupe ouvert $U \subseteq \mathcal{Q}$, et une famille unique de matrices $\{A(q,T)\}_{q \in U}$ qui vérifient :

i) $A(q_0,T) = A_{q_0}(T)$;

ii) $A(q,T) \in GL_n(\mathcal{A}_K(I))$ pour tout $q \in U$;

iii) Pour tout $q \in U$ il existe un disque $\mathrm{D}^-(q,\tau_q)$ tel que la matrice $A(q,T)$ est analytique sur le domaine

$$\mathrm{D}^-(q,\tau_q) \times \mathcal{C}_K(I) \; ; \tag{7.5.2}$$

iv) Pour tout point $c \in \mathcal{C}_K(I)$, la solution $Y(T,c)$ de l'équation 7.5.1 est solution aussi de chaque opérateur $\sigma_q - A(q,T)$ pour tout $q \in U$.

de plus $Y(T,c)$ coïncide avec la solution de Taylor de l'équation différentielle $\delta_1 - G(1,T)$ définie par

$$G(1,T) := \lim_{q \to 1} \frac{A(q,T) - 1}{q - 1} = \left(q \frac{d}{dq} A(q,T) \right)_{\big| q=1} \in M_n(\mathcal{A}_K(I)) \; . \tag{7.5.3}$$

Preuve : On démontre ce théorème en utilisant les propriétés de la résolvante : on a $Y(x,z) = Y(x,y) \cdot Y(y,z)$. Si $c \in \mathcal{C}_K(I)$, et si $Y(T,c)$ est la solution de l'équation près de c, alors la matrice cherchée est

$$A(q,T) := Y(qT,c) \cdot Y(T,c)^{-1} = Y(qT,T) \; . \tag{7.5.4}$$

qui converge dans un voisinage de $q = 1$. On démontre que le lieu de convergence de cette matrice est en realité un sous groupe ouvert de $\mathcal{Q}$. $\square$

Remarque 7.6. *Ce théorème montre que le module* M *reçoit de façon canonique l'action de* σ_q *pour tout* $q \in U$.

8. Les $\sigma-$modules analytiques

DÉFINITION 8.1. *Soit* $U \subseteq \mathcal{Q}$ *un ouvert et* $\langle U \rangle$ *le sous-groupe engendré par* U. *Un* $\sigma-$*module analytique sur* U *est un* $\mathcal{A}_K(I)-$*module libre de type fini, muni d'un morphisme de groupes :*

$$\sigma^{\mathrm{M}} : \langle U \rangle \xrightarrow[q \mapsto \sigma_q^{\mathrm{M}}]{} \mathrm{Aut}_K^{\mathrm{cont}}(\mathrm{M}) \tag{8.1.1}$$

de sorte que dans une (et donc toute) base de M *on ait*

$$\sigma_q^{\mathrm{M}} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A(q,T) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_q(f_1) \\ \vdots \\ \sigma_q(f_n) \end{pmatrix} \; , \tag{8.1.2}$$

où la matrice $A(q,T)$ vérifie les propriétés 1, 2, 3 du théorème 7.5. Les morphismes entre $\sigma-$modules analytiques sont les morphismes $\mathcal{A}_K(I)-$linéaires qui commutent à σ_q pour tout $q \in U$. On note par

$$\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{an}} \tag{8.1.3}$$

la catégorie des $\sigma-$modules analytiques sur l'ouvert U. Si le module M *vérifie dans une base (et alors dans toute base) la proprieté 4 du théorème 7.5, alors nous dirons que* M *est* constant *sur U. Nous dénotons par $\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{an,const}}$ la sous-catégorie pleine de $\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{an}}$ dont les objets sont constants. Nous dirons que* M *est* admissible *s'il est* constant *sur U et si sa résolvante converge dans un voisinage de type $\mathcal{U}_R$. Nous notons*

$$\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \quad \subseteq \quad \sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{an,const}} \tag{8.1.4}$$

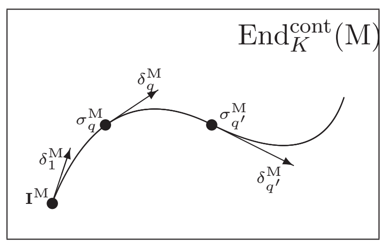
la sous-catégorie pleine de $\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{an,const}}$ des objets admissibles.

9. Opérateurs $q-$tangents et $(\sigma, \delta)-$modules

Définition 9.1. *Pour tout $q \in \mathcal{Q}$ l'*opérateur $q-$tangent *sur $\mathcal{A}_K(I)$ est défini par*

$$\delta_q := \lim_{q' \to q} \frac{\sigma_{q'} - \sigma_q}{q' - q} = \sigma_q \circ \delta_1 \ , \tag{9.1.1}$$

où la limite est prise au sens de la topologie de la convergence simple de $\mathrm{End}_K^{\mathrm{cont}}(\mathcal{A}_K(I))$.



Lemme 9.2. On a $\delta_1 = T\frac{d}{dT}$ et $\delta_q := \sigma_q \circ \delta_1 = \delta_1 \circ \sigma_q$. En particulier, l'opérateur δ_q vérifie

$$\delta_q(fg) = \sigma_q(f) \cdot \delta_q(g) + \delta_q(f) \cdot \sigma_q(g) \tag{9.2.1}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{A}_K(I)$.

9.1 $(\sigma, \delta)-$modules analytiques

Définition 9.3. *Soit $q \in \mathcal{Q}$. Nous notons*

$$(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I)) \tag{9.3.1}$$

la catégorie dont les objets sont des $\mathcal{A}_K(I)-$modules libres de type fini munis d'un opérateur σ_q-semilinéaire $\sigma_q^{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}$ et d'un opérateur différentiel $\delta_1^{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ avec la proprieté $\sigma_q^{\mathrm{M}} \circ \delta_1^{\mathrm{M}} = \delta_1^{\mathrm{M}} \circ \sigma_q^{\mathrm{M}}$. Les morphismes sont ceux qui commutent à σ_q^{M} et δ_1^{M}.

Un $(\sigma_q, \delta_q)-$module est dit admissible *si la résolvante de l'opérateur différentiel δ_1^{M} est égale à la résolvante de l'opérateur σ_q^{M} et si elle converge dans un voisinage de la diagonale de type $\mathcal{U}_R$. La catégorie des $(\sigma_q, \delta_q)-$modules admissibles sera note*

$$(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \ . \tag{9.3.2}$$

Remarque 9.4. *Comme $\delta_q = \sigma_q \circ \delta_1$ (cf. 9.1.1), la donnée du couple $(\sigma_q^{\mathrm{M}}, \delta_1^{\mathrm{M}})$ sur le module* M *est équivalente à la donnée du couple $(\sigma_q^{\mathrm{M}}, \delta_q^{\mathrm{M}})$, où*

$$\delta_q^{\mathrm{M}} := \sigma_q^{\mathrm{M}} \circ \delta_1^{\mathrm{M}} \ . \tag{9.4.1}$$

À partir d'un $\sigma-$module analytique (constant ou non) sur U on peut construire, pour tout $q \in U$, un $(\sigma_q, \delta_q)-$module, par les formules

$$\delta_q^{\mathrm{M}} := q \cdot \lim_{q' \to q} \frac{\sigma_{q'}^{\mathrm{M}} - \sigma_q^{\mathrm{M}}}{q' - q} \;. \tag{9.4.2}$$

En particulier δ_1^{M} est égal à $(\sigma_q^{\mathrm{M}})^{-1} \circ \delta_q^{\mathrm{M}}$ et est une connexion sur M. On démontre que, si M est un $\sigma-$module analytique constant, alors la résolvante $Y(x,y)$ qui, par hypothèse, est solution de chaque σ_q^{M}, est aussi solution de l'opérateur δ_1^{M}.

Notation 9.5. Par la suite nous utiliserons aussi la notation

$$(\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \tag{9.5.1}$$

pour indiquer la catégorie $\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}}$. Nous appelons ses objets les $(\sigma, \delta)-$modules analytiques admissibles sur U.

On obtient un foncteur

$$(\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \xrightarrow{\mathrm{Res}_q^U} (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \;, \tag{9.5.2}$$

qui est pleinement fidèle. Donc si $U' \subset U$ le foncteur de restriction

$$(\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \xrightarrow{\mathrm{Res}_{U'}^U} (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_{U'}^{\mathrm{adm}} \;, \tag{9.5.3}$$

est aussi pleinemen fidèle. Par le théorème 7.5, on obtient alors une équivalence de catégories

$$\bigcup_U (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \xrightarrow[\sim]{\bigcup_U \mathrm{Res}_q^U} (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \;. \tag{9.5.4}$$

où U parcourt les ouverts qui contiennent q. Par ailleurs, on a les restrictions naturelles

$$\sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \xrightarrow{\mathrm{Res}_q^U} \sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \;, \tag{9.5.5}$$

qui est pleinement fidèle seulement si q n'est pas racine de l'unité. Dans ce cas on obtient une équivalence de catégories

$$\bigcup_U \sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \xrightarrow[\sim]{\bigcup_U \mathrm{Res}_q^U} \sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \;, \tag{9.5.6}$$

si et seulement si q n'est pas une racine de l'unité. On obtient alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bigcup_U \sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\bigcup_U \mathrm{Res}_q^U"'] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \bigcup_U (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))_U^{\mathrm{adm}} \arrow[d, "\bigcup_U \mathrm{Res}_q^U", "\wr"'] \\ \sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} & (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}. \arrow[l, "\mathrm{Oublide}\ \delta_q"] \end{tikzcd} \tag{9.5.7}$$

Si q n'est pas une racine de l'unité, alors toutes les flêches de ce diagramme sont des équivalences. Dans ce cas on peut oublier la donnée de l'operateur δ_q.

Par contre si $q = \xi$ est une racine de l'unité, alors la restriction de droite reste une équivalence et la restriction de gauche ne l'est pas. Dans ce cas l'information "au voisinage de ξ" est préservée par l'opérateur δ_ξ. On peut avoir l'impression que le foncteur "Oubli δ_ξ" est intéressant. Par contre on montre que dans le cas très important des équations avec structure de Frobenius le foncteur ne donne aucune information, car tout $\sigma_\xi-$module avec structure de Frobenius est trivial (i.e. somme directe de l'objet unité).

Notation 9.6. Pour ces raisons, désormais on va travailler uniquement avec les $(\sigma_q, \delta_q)-$modules, en sachant que, si q n'est pas une racine de l'unité, alors

$$\sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \;=\; (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}\;. \tag{9.6.1}$$

10. Déformation et Confluence

Soit $U \subseteq \mathcal{Q}$ un sous groupe ouvert. Notons par $(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U$ la sous-catégorie pleine de $(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}$ qui est l'image du foncteur 9.5.2, de façon que le foncteur (9.5.2) induise une équivalence

$$(\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Res}^U_q} (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U\;. \tag{10.0.2}$$

Pour tout $q, q' \in U$ on obtient par composition l'équivalence de déformation :

$$\begin{tikzcd}
 & (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U \arrow[rr, dotted, "\mathrm{Def}_{q,q'}", "\sim"'] & & (\sigma_{q'}, \delta_{q'}) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U
\end{tikzcd}$$

Dans le cas $q' = 1$ on appelle ce foncteur *confluence* :

$$\mathrm{Conf}_q : (\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U \xrightarrow{\ \sim\ } \delta_1 - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}_U\;. \tag{10.0.3}$$

En particulier, si q n'est pas une racine de l'unité, alors le théorème 7.5, et l'identification 9.6.1, garantissent l'existence d'un tel sous-groupe. Donc pour tout q different d'une racine de l'unité on a un foncteur pleinement fidèle

$$\sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}} \xrightarrow{\mathrm{Conf}_q} \delta_1 - \mathrm{Mod}(\mathcal{A}_K(I))^{\mathrm{adm}}\;. \tag{10.0.4}$$

11. Equations sur l'anneau de Robba

On adapte sans difficulté la théorie précédente a l'étude des équations sur l'anneau de Robba $\mathcal{R}_K$ et l'anneau $\mathcal{H}^\dagger_K$.

Soit $U \subseteq \mathrm{D}^-(1,1)$ un sous-groupe, et soit $\mathrm{M} \in \sigma - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{\mathrm{an,const}}_U$. Par définition M provient par extension des scalaires d'un module M_ε sur $\mathcal{A}_K(]1-\varepsilon, 1[)$. De façon complètement analogue au cas des équations différentielles, on définit, pour $1-\varepsilon < \rho < 1$, la *rayon générique* $Ray(\mathrm{M}_\varepsilon, \rho)$ de M_ε.

Lemme 11.1. Soit $r := \lim_{\rho\to 1^-} Ray(\mathrm{M}_\varepsilon, \rho)$. Alors M est admissible sur $\mathrm{D}^-(1,r)$ (i.e. quitte à diminuer ε, M_ε est admissible sur $\mathrm{D}^-(1,r)$).

Définition 11.2. *On note*

$$(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \tag{11.2.1}$$

$$(\textit{resp.}\quad (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]}_{\mathrm{D}^-(1,1)}) \tag{11.2.2}$$

la sous catégorie pleine de

$$(\sigma_q, \delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{\mathrm{adm}} \tag{11.2.3}$$

$$(\textit{resp.}\quad (\sigma, \delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{\mathrm{adm}}_{\mathrm{D}^-(1,r)}) \tag{11.2.4}$$

formée par les $(\sigma_q, \delta_q)-$modules (resp. analytiques constants) qui vérifient

$$\lim_{\rho\to 1^-} Ray(\mathrm{M}_\varepsilon, \rho) \geqslant r\;. \tag{11.2.5}$$

Le corollaire suivant est alors une conséquence immédiate de la section 10

Corollaire 11.3. Pour tout $q \in \mathrm{D}^-(1,r)$ on a une équivalence

$$(\sigma,\delta) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]}_{\mathrm{D}^-(1,r)} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Res}_q^{\mathrm{D}^-(1,r)}} (\sigma_q,\delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \ . \tag{11.3.1}$$

De plus pour tous $q, q' \in \mathrm{D}^-(1,1)$ (resp. $q, q' \notin \boldsymbol{\mu}(\mathrm{D}^-(1,1))$), et tout r qui vérifient

$$\max(|q-1|, |q'-1|) < r \leqslant 1 \ , \tag{11.3.2}$$

on a l'équivalence de déformation

$$(\sigma_q,\delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Def}_{q,q'}} (\sigma_{q'},\delta_{q'}) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \ . \tag{11.3.3}$$

Rappelons encore que, si q n'est pas une racine de l'unité, alors le foncteur

$$(\sigma_q,\delta_q) - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \xrightarrow[\sim]{\text{“Oublie } \delta_q\text{”}} \sigma_q - \mathrm{Mod}(\mathcal{R}_K)^{[r]} \tag{11.3.4}$$

est une équivalence.

12. Quasi-unipotence des $\sigma-$modules admissibles

On généralise a tout $\sigma-$module (admissible) avec structure de Frobenius le théorème de monodromie locale $p-$adique. Ce théorème est obtenu par “*déformation*” du théorème de monodromie locale $p-$adique pour les équations différentielles.

Nous supposons désormais que K est de valuation discrète et que son corps résiduel k est parfait. Cette hypothèse intervient dans le théorème de monodromie locale $p-$adique pour les équations différentielles.

12.1 Monodromie locale : quasi unipotence des modules avec structure de Frobenius

Les extensions finies séparables du corps $k(\!(t)\!)$ se relèvent bijectivement, par henselianité, à des extensions finies non ramifiées du corps $\mathcal{E}^\dagger_K$. En tensorisant avec $\mathcal{R}_K$ on obtient une classe d'extension de l'anneau $\mathcal{R}_K$ dites spéciales.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Extensions finies} \\ \text{séparables de } k(\!(t)\!) \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Extensions finies} \\ \text{speciales de } \mathcal{R}_K \end{array} \right\} . \tag{12.0.5}$$

Definition 12.1. Un module différentiel est dit *quasi-unipotent* s'il est *trivialisé* par une extension de $\mathcal{R}_K$ de la forme $\mathcal{R}'[\log(T)]$ où $\mathcal{R}'$ est une extension finie spéciale de $\mathcal{R}_K$.

Rappelons que M est “trivialisé” par l'anneau $\mathcal{R}'[\log(T)]$, si $\mathrm{M} \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}'[\log(T)]$ est isomorphe à une somme directe itérée de l'objet unité (dans la catégorie des modules différentiels sur $\mathcal{R}'[\log(T)]$).

On sait que les modules différentiels *quasi-unipotents* ont une structure de Frobenius, la réciproque est vraie quitte à permettre une extension finie des constantes :

Théorème 12.2 monodromie locale $p-$adique**.** Si M est un module différentiel avec structure de Frobenius sur $\mathcal{R}_K$, alors il existe une extension finie K'/K telle que $\mathrm{M} \otimes_K K'$ est *quasi-unipotent*.

De façon complètement analogue à la situation des équations différentielles, on donne la définition de *structure de Frobenius* et de *quasi-unipotence* pour les $(\sigma_q,\delta_q)-$modules et pour les $(\sigma,\delta)-$modules sur un sous groupe ouvert $U \subseteq \mathrm{D}^-(1,1)$. On généralise alors, sans peine, le théorème de la monodromie locale $p-$adique :

Théorème 12.3 monodromie locale $p-$adique (généralisée)**.** Si M est un $(\sigma, \delta)-$module sur $\mathrm{D}^{-}(1,1)$ avec structure de Frobenius sur $\mathcal{R}_K$, alors il existe une extension finie K'/K telle que $\mathrm{M} \otimes_K K'$ est *quasi-unipotent*. En particulier, si $q \in \mathrm{D}^{-}(1,1)$ n'est pas une racine de l'unité, alors tout σ_q-module avec structure de Frobenius est *quasi-unipotent*.

Références

And02 Y. André. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :285–317, 2002.

Dwo62 B. Dwork. On the zeta function of a hypersurface. volume 12 of *Publ.Math.IHES*, pages 5–68. IHES, 1962.

Ked04 Kiran S. Kedlaya. A p-adic local monodromy theorem. *Ann. of Math. (2)*, 160(1) :93–184, 2004.

Mat02 Shigeki Matsuda. Katz correspondence for quasi-unipotent overconvergent isocrystals. *Compositio Math.*, 134(1) :1–34, 2002.

Meb02 Z. Mebkhout. Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :319–351, 2002.

SS94 Tsutomu Sekiguchi and Noriyuki Suwa. Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(2) :105–110, 1994.