Théorie abélienne des équations différentielles p-adiques

Rennes,

18 Janvier, 2007

Table des matières

NOTATIONS

$$\begin{array}{ccccc} & & \Lambda & \subset & K \\ & & \cup & & \cup \\ \mathbb{Z}_p & \subset & \mathbf{W}(\mathbb{F}_q) & \subset & \mathbf{W}(k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{F}_p & \subset & \mathbb{F}_q & \subset & k \end{array}$$

- $\Lambda/\mathbb{Q}_p$ finie, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$,
- k =corps parfait, contenant $\mathbb{F}_q$,
- $K = \Lambda \otimes_{\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)} \mathbf{W}(k)$,
- $\mathcal{A}_K(]r_1, r_2[) = \{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i T^i,\ \text{s.t. } \lim_{i\to\pm\infty} |a_i|\rho^i = 0, r_1 < \forall\rho < r_2\}$
  (= Fonctions Analytiques sur la couronne)
- $\mathcal{R}_K := \bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{A}_K(]1-\varepsilon, 1[)$ (= Anneau de Robba)
- $\mathcal{E}_K := \{\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i T^i \text{ s.t. } \sup_i |a_i| < +\infty,\ \text{and } \lim_{i\to-\infty} |a_i| = 0\}$
  (= Anneau de Amice)
- $\mathcal{E}^\dagger_{K,T} := \mathcal{R}_K \cap \mathcal{E}_K$ (= Anneau de Robba borné).
- Pour L/K finie, on note $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_L)$ le groupe (par $\otimes$) des classes d'isomorphisme d'équations différentielles de rang un sur $\mathcal{R}_L$.
- Pour tout extenson H/K on pose $\mathcal{R}_H := \mathcal{R}_K \otimes_K H$.

CONTEXTE ET MOTIVATIONS

$$\begin{array}{cccccccc}
k((t))^{\mathrm{sep}} & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right]\mathcal{P} & & & & (\mathcal{E}_K^\dagger)^{\mathrm{nr}} & & \widetilde{\mathcal{R}}_K \\
| & & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]\mathcal{I} & & & | & & | \\
k((t))^{\mathrm{mod}} & & & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]\mathrm{G} & \rightsquigarrow & + & \rightsquigarrow & + \\
| & & & & & | & & | \\
k^{\mathrm{sep}}((t)) & & & & & + & & + \\
| & & & & & | & & | \\
k((t)) & & & & & \mathcal{E}_K^\dagger & & \mathcal{R}_K
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccl}
\mathrm{Rep}^{\mathrm{fin}}_\Lambda(\mathcal{I}_{k((t))}) & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{c}\text{Eq.diff.}/\mathcal{R}_{K^{\mathrm{alg}}}\\ \text{avec structure}\\ \text{de Frobenius}\end{array}\right\} = \mathrm{Rep}_{K^{\mathrm{alg}}}(\mathcal{I}\times\mathbb{G}_a) \\
V & \longmapsto & (V\otimes_\Lambda \widetilde{\mathcal{R}}_K)^G
\end{array}$$

- Expliciter ce foncteur dans le cas abélien ($\Longleftrightarrow$ pour $\dim_\Lambda V = 1$) ;
- Classifier les équations différentielles solubles abéliennes sur $\mathcal{R}_K$;
- Donner des critères de solubilité ;
- Expliciter les extensions de Kummer de $\mathcal{E}_K^\dagger$ qui proviennent d'une extension de Artin-Schreier de $k((t))$.

REDUCTION AU CAS DE RANG UN

Proposition 1 ([And02]) *Soit M une équation différentielle* avec structure de Frobenius *sur* $\mathcal{R}_{K^{\mathrm{alg}}}$. *Si le groupe de Galois Tannakien de M est abélien, alors M est extension d'équations de rang un.*

Proposition 2 *Si* M_1 *et* M_2 *sont de rang un* solubles, *alors*

$$\dim_K \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{R}_K}(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \begin{cases} 0 & si \quad \mathrm{M}_1 \not\xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2 \\ & \\ 1 & si \quad \mathrm{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Il existe une base $\mathbf{e}$ de M telle que $\nabla(\mathbf{e}) = G(T)\mathbf{e}$, avec $G(T)$ en forme de Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cccc}
g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\
0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & g_2 & 1 & 0 & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & g_2 & 0 & & & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_3 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots \;\cdots & \cdots & \cdots \;\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \;\cdots & \cdots & \cdots \;\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right)$$

NOTATIONS EN THÉORIE DE LUBIN-TATE

Une série de L-T sur $\mathbb{Z}_p$ est une série $P(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ satisfaisant

$$P(X) \equiv \mathrm{w}X \pmod{X^2}\ ; \quad P(X) \equiv X^p \pmod{p\mathbb{Z}_p[[X]]}$$

où $\mathrm{w} \in \mathbb{Z}_p$ est un uniformisant.

Théorème 3 ([LT65]) *Il existe un unique loi de groupe formel* $\mathfrak{G}_P(X,Y) \in \mathbb{Z}_p[[X,Y]]$ *telle que* $P(\mathfrak{G}_P(X,Y)) = \mathfrak{G}_P(P(X),P(Y))$. *Pour tout* $a \in \mathbb{Z}_p$, *il existe* $[a]_P(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ *telle que*

1. $[a]_P(X) = aX + \cdots$;
2. $\mathfrak{G}_P([a]_P(X),[a]_P(Y)) = [a]_P(\mathfrak{G}_P(X,Y))$.

• Par unicité de $[\mathrm{w}]_P(X)$, on a $P(X) = [\mathrm{w}]_P(X)$.

Théorème 4 ([Haz78]) *Soient* $P_1 = (\mathrm{w}_1 X + \cdots)$, *et* $P_2 = (\mathrm{w}_2 X + \cdots)$ *deux séries de L-T correspondants aux groupes* $\mathfrak{G}_{P_1}, \mathfrak{G}_{P_2}$. *Alors* $\mathfrak{G}_{P_1}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{G}_{P_2}$ *(sur* $\mathbb{Z}_p$*) si et seulement si* $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$.

Le module de Tate

• Soit $P(X)$ une série de L-T. Alors :

• On defini une *nouvelle* structure de $\mathbb{Z}_p-$module sur $\mathrm{D}^-_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}}(0,1)$:

$$y \boxplus z := \mathfrak{G}_P(y,z) \ , \qquad a \cdot z := [a]_P(z) \ ,$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}_p$, $y, z \in \mathrm{D}^-_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}}(0,1) = \{x \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}} \mid |x| < 1\}$.

• <u>points de w−torsion :</u>

$$\mathrm{Ker}([\mathrm{w}^n]_P) = \{x \in \mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}} \ \mid \ |x| < 1, \ \ [\mathrm{w}^n]_P(x) = 0\} \ ;$$

• <u>Module de Tate :</u>

$$\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P) := \varprojlim_n \left(\mathrm{Ker}([\mathrm{w}^{n+1}]_P) \xrightarrow{[\mathrm{w}]_P} \mathrm{Ker}([\mathrm{w}^n]_P) \right) \ ;$$

• <u>Generateur de $\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P)$:</u> $\mathrm{T}(\mathfrak{G}_P) = \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbb{Z}_p$, avec $\boldsymbol{\pi} := (\pi_j)_{j \geq 0}$ suite dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ satisfaisant (on rappelle que $P(X) = [\mathrm{w}]_P(X)$) :

$$\pi_0 \neq 0 \ , \ \ |\pi_0| < 1 \ , \ \ P(\pi_0) = 0 \ , \ \ P(\pi_{j+1}) = \pi_j, \ \ \text{pour tout } j \geq 0.$$

EXPONENTIELLES DE DWORK-ROBBA-MATSUDA

Dwork :	$\exp(\pi T^{-1})$, $\quad \theta(T^{-1}) = \exp(\pi(T^{-1} - T^{-p}))$, $\boldsymbol{\pi^{p-1} = -p}\,;$
Robba :	$E_m(T^{-1}) := \exp(\pi_m T^{-1} + \pi_{m-1}\frac{T^{-p}}{p} + \cdots + \pi_0 \frac{T^{-p^m}}{p^m})$, **mais les $\boldsymbol{\pi_i}$ étaient inconnus ;**
Matsuda :	$\exp((\xi-1)T^{-1} + (\xi^p - 1)\frac{T^{-p}}{p} + \cdots + (\xi^{p^m} - 1)\frac{T^{-p^m}}{p^m})$, $\boldsymbol{\pi_j = \xi^{p^{m-j}} - 1}$, avec $\xi^{p^{m+1}} = 1$ (primitive).

Théorème :

(1) *Les nombres π_j sont des points de p^j-torsion d'un groupe de Lubin-Tate $\mathfrak{G}$, tels que $[\mathrm{w}]_{\mathfrak{G}}(\pi_{j+1}) = \pi_j$, pour tout $j \geq 0$. En d'autres termes la suite $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j\geq 0} \in \mathrm{T}(\mathfrak{G})$ est un* générateur.

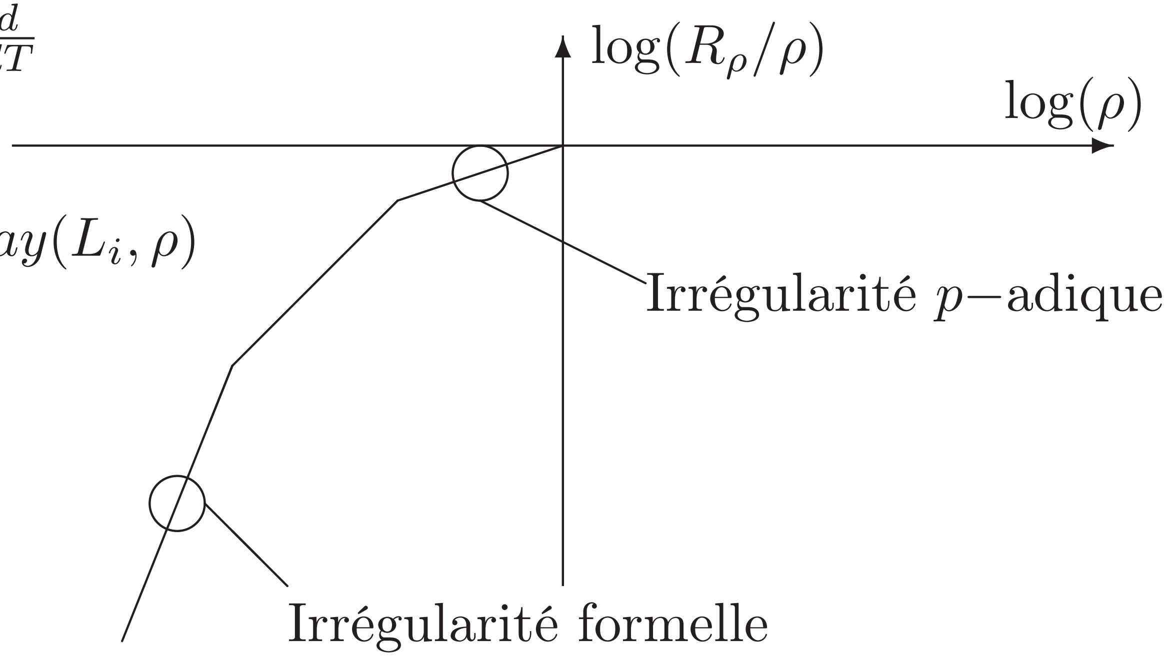
(2) *La série $\theta_{p^m}(T^{-1}) := E_m(T^{-p})/E_m(T^{-1})$ est* surconvergente *(i.e. converge pour $|T| > 1-\varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$; i.e. appartient à $\mathcal{R}_K$) si et seulement si le groupe $\mathfrak{G}$* est isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_m$.

L'EXEMPLE DE DWORK

Opérateur	Solution à l'∞	Irr.Formelle	Irr.$p-$adique
$L_1 := \partial_T + \pi_0 T^{-1}$	$\exp(\pi_0 T^{-1})$	1	1
$L_2 := \partial_T + p\pi_0 T^{-p}$	$\exp(\pi_0 T^{-p})$	p	1

$\partial_T := T\frac{d}{dT}$

$R_\rho := Ray(L_i, \rho)$



• Comme $\theta(T) := \exp(\pi_0(T^{-p} - T^{-1})) = \frac{\exp(\pi_0 T^{-p})}{\exp(\pi_0 T^{-1})}$ est surconvergent, alors ces deux opérateurs sont isomorphes (sur $\mathcal{R}_K$).

$\boldsymbol{\pi}-$EXPONENTIELLES

Théorème : • *Soit* $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j\geq 0}$ *un générateur fixé de* $\mathrm{T}(\mathfrak{G})$ *;*

• *Soit* $m \geq 0$ *et* $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_K)$ *;*

• *Soit* $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_m) \in (\mathcal{O}_K)^{m+1}$ *son vecteur fantôme, i.e.*

$$\phi_j := \lambda_0^{p^j} + p\lambda_1^{p^{j-1}} + \cdots + p^j\lambda_j \ ;$$

• *Soit* $d = np^m \geq 1$, $m = v_p(d)$, $(n,p) = 1$. *Alors l'exponentielle*

$$\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T) := \exp(\pi_m\phi_0 T^n + \pi_{m-1}\phi_1 \frac{T^{np}}{p} + \cdots + \pi_0\phi_m \frac{T^{np^m}}{p^m})$$

1) *converge toujours dans le disque* $|T| < 1$,

2) *et elle est* surconvergente $\Longleftrightarrow |\lambda_i| < 1, \ \forall\, i = 0, \cdots, m.$

3) *Si* $|\lambda_0|, \dots, |\lambda_{r-1}| < 1$, *et* $|\lambda_r| = 1$, *alors* $\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1})$ *est solution d'un module différentiel dont l'irrégularité (p-adique) est* np^{m-r},

4) *La classe d'isomorphisme du module dont* $\mathrm{e}_d(\boldsymbol{\lambda}, T^{-1})$ *est solution dépend seulement de* $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{W}_m(k)$ *et il a une structure de Frob.*

Notations en théorie de Kummer et Artin-Schreier-Witt

- Artin-Schreier-Witt (A-S-W) : $(L, |.|)$ =complet, $\mathrm{car}(L) \neq \mathrm{car}(k_L)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\imath"] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, "\bar{\mathrm{F}}-1"] \arrow[d, "\mathrm{V}"] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{V}"] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[d, "\jmath"] \\
\mathbb{Z}/p^{m+2}\mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbf{W}_{m+1}(k_L) \arrow[r, "\bar{\mathrm{F}}-1"] & \mathbf{W}_{m+1}(k_L) \arrow[r, two heads, "\delta"] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+2}\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

où $\imath : 1 \mapsto p$ est l'inclusion usuelle, $\jmath$ est la composition avec $\imath$, et $\mathrm{G}_{k_L} := \mathrm{Gal}(k_L^{\mathrm{sep}}/k_L)$. Donc (cf. Corps Locaux : [Ser62])

$$0 \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathbf{CW}(k_L) \xrightarrow{\bar{\mathrm{F}}-1} \mathbf{CW}(k_L) \to \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \to 0\ ,$$

où $\mathbf{CW}(k_L) := \varinjlim \mathbf{W}_m(k_L) \xrightarrow{\mathrm{V}} \mathbf{W}_{m+1}(k_L)$.

- Kummer (K) : Supposons $\boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}} \subset L$. Soit $\mathrm{G}_L := \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{alg}}/L)$.

Alors on a la suite exacte :

$$1 \to \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}(L) \to L^\times \xrightarrow[x \mapsto x^{p^{m+1}}]{} L^\times \to \mathrm{Hom}(\mathrm{G}_L, \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}) \to 0$$

DE ARTIN-SCHREIER-WITT À KUMMER

• Soit L un corps de val.disc. de car.0, de corps résiduel k_L de car.p. On suppose que $\pi_m \in L$.

•**But :** Obtenir un générateur explicite de l'ext. non ramifiée de L attachée, par henselianité, à une extension de A-S-W de k_L donnée.

• Les suites exactes de A-S-W et de Kummer sont des **complexes** qui calculent la cohomologie de Galois. Nous voulons un morphisme de complexes (θ, e) qui induise un isom. sur les cohomologies

Ce n'est pas possible ! ?

$$\begin{tikzcd}
\text{car.}0 & 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m(L) \arrow[r, "x \to x^{p^{m+1}}"] & \mathbb{G}_m(L) \arrow[r] & 0 & \text{Kummer} \\
\text{car.}p \arrow[u, dotted] & 0 \arrow[r] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, "F-1"'] \arrow[u, dotted, "\theta"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "e"'] & 0 & \text{A-S-W}
\end{tikzcd}$$

• On relève le complexe de A-S-W en car.0 et on le "déforme" dans celui de Kummer en utilisant la ***valeur en $T = 1$*** de certaines $\boldsymbol{\pi}-$exponentielles surconvergentes (voir après).

Théorème : *Soit* $\varphi : \mathcal{O}_L \to \mathcal{O}_L$ *un Frobenius. Soit* $\mathfrak{G} \cong \widehat{\mathbb{G}}_m$*. La série* $\theta^{(\varphi)}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, T) := \mathrm{e}_{p^m}(\varphi(\boldsymbol{\lambda}), T^p)/\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, T)$*, est surconvergente et :*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}} \arrow[r] & L^\times \arrow[r, "f \mapsto f^{p^{m+1}}"] & L^\times \arrow[r, two heads, "\delta_{\mathrm{Kum}}"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_L, \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}) \\
& \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L^{\varphi=1}) \arrow[u] \arrow[d, two heads] \arrow[r, hook] & \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L) \arrow[u, "\theta^{(\varphi)}_{p^m}(-,1)"] \arrow[d, two heads] \arrow[r, "\varphi - 1"] & \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L) \arrow[u, "\mathrm{e}_{p^m}(-,1)^{p^{m+1}}"'] \arrow[d, two heads] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \arrow[uu, dotted, bend left, "\wr"] \arrow[r] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, "\bar{\mathrm{F}} - 1"] & \mathbf{W}_m(k_L) \arrow[r, two heads, "\delta"] & \mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) \arrow[uu, hook, dotted, "\overline{e}"']
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{O}_L^{\varphi=1} := \{a \in \mathcal{O}_L \mid a^\varphi = a\}$*. Explicitement* $\theta^{(\varphi)}_{p^m}(-,1)$ *induit l'identification* $1 \mapsto \xi_m^{-1} : \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^{m+1}}$*, où* ξ_m *est l'unique racine* p^{m+1}*−ième de l'unité telle que* $|(\xi_m - 1) - \pi_m| < |\pi_m|$.

La flèche $\alpha \mapsto \overline{\mathrm{e}}(\alpha)$ *induite par* $\mathrm{e}_{p^m}(-,1)^{p^{m+1}}$ *verifie :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_{k_L} \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\odot"] & \mathrm{G}_L \arrow[l, two heads] \arrow[d, dotted, "\overline{e}(\alpha)"] \\
\mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim", "1 \mapsto \xi_m^{-1}"'] & \boldsymbol{\mu}_{p^{m+1}}
\end{tikzcd}.$$

Rapel : Soit $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{W}_m(k_L)$ un vecteur de Witt. Alors l'extension de Artin-Schreier attachée à $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ est par définition $(k_L^{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Ker}(\delta(\overline{\boldsymbol{\lambda}}))}$ où $\alpha = \delta(\overline{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{G}_{k_L}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z})$ est le caractère de A-S défini par $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$. Soit $\overline{\boldsymbol{\nu}} = (\overline{\nu_0}, \ldots, \overline{\nu_m}) \in \mathbf{W}_m(k_L^{\mathrm{sep}})$ tel que $\bar{\mathrm{F}}(\overline{\boldsymbol{\nu}}) - \overline{\boldsymbol{\nu}} = \overline{\boldsymbol{\lambda}}$, alors

$$(k_L^{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Ker}(\alpha)} = k_L(\{\overline{\nu_0}, \ldots, \overline{\nu_m}\})$$

Corollaire : *L'extension de L attachée, par henselianité à l'extension de A-S-W de k_L définie par le vecteur de Witt $\boldsymbol{\lambda}$ est*

$$L(\theta_{p^m}^{(\varphi)}(\boldsymbol{\nu}, 1))$$

où $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_{L^{\mathrm{unr}}})$ est solution de $\varphi(\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\lambda}$.

Remarque : Le diagramme précedent donne l'égalité :

$$\theta_{p^m}^{(\varphi)}(\boldsymbol{\nu}, 1)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1)^{p^{m+1}}\ , \qquad (1)$$

pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{W}_m(\mathcal{O}_L)$. Mais l'égalité $\theta_{p^m}^{(\varphi)}(\boldsymbol{\nu}, 1) = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1)$, n'a pas de sens car $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1)$ n'est pas surconvergente !

Classification des équations différentielles de rang un sur $\mathcal{R}_K$

- Maintenant revenons au cas $L = \mathcal{E}_K^\dagger$, $k_L = k((t))$, et $\mathfrak{G}_P \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_m$.
- Même si $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{\lambda}, 1)$ n'existe pas (e_{p^m} n'est pas surconv.), on définit

$$\mathrm{e}_{p^m}(-,1) : \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}]) \longrightarrow \mathcal{O}_K[[T^{-1}]]$$

$$\mathrm{e}_{p^m}((f_0^-,\ldots,f_m^-),1) := \exp(\pi_m \phi_0^-(T) + \pi_{m-1}\frac{\phi_1^-(T)}{p} + \cdots + \pi_0 \frac{\phi_m^-(T)}{p^m})$$

où $\phi_j^-(T)$ est la $j-$ème composante fantôme de $(f_0^-,\ldots,f_m^-)$.

Théorème: *La série formelle* $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$ *converge pour* $|T| > 1$, *et est sur-conv. si et seulement si l'équation d'Artin-Schreier*

$$\bar{\mathrm{F}}(\overline{\boldsymbol{\nu}^-}) - \overline{\boldsymbol{\nu}^-} = \overline{\boldsymbol{f}^-(T)} \in \mathbf{W}_m(k((t)))$$

a une solution $\overline{\boldsymbol{\nu}^-}$ *dans* $\mathbf{W}_m(k((t)))$. *En particulier la fonction*

$$\theta_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1) := \mathrm{e}_{p^m}\big(\varphi(\boldsymbol{f}^-(T)) - \boldsymbol{f}^-(T), 1\big)$$

est surconv. (i.e. converge pour $|T| > 1-\varepsilon$*) et appartient à* $\mathcal{E}_K^\dagger$.

Théorème : *Soit* $\boldsymbol{f}^- := (f_0^-, \dots, f_m^-) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$, *et* $a_0 \in \mathbb{Z}_p$. *Alors*

$$y(T) := T^{a_0} \cdot \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T), 1)$$

est la solution à l'infini de l'équation différentielle

$$\boxed{\mathrm{L}(a_0, \boldsymbol{f}^-(T)) \ := \ \partial_T - g(a_0, \boldsymbol{f}^-)},$$

$$g(a_0, \boldsymbol{f}^-) = a_0 - \sum_{j=0}^{m} \pi_{m-j} \sum_{i=0}^{j} f_i^-(T)^{p^{j-i}} \frac{\partial_T f_i^-(T)}{f_i^-(T)} \in \mathcal{O}_K[T^{-1}];$$

• *Cette équation est* soluble en 1, *et réciproquement* <u>*tout éq.diff. sur* $\mathcal{R}_K$ *de rang un soluble est isomorphe à une équation de ce type.*</u>

• *Elle a une* structure de Frobenius *si et seulement si* $a_0 \in \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$;

• *Sa classe d'isom. dépend bijectivement du* <u>*couple*</u> $(\overline{a}_0, \alpha)$, *où* $\overline{a}_0$ *est la réduction dans* $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ *de* a_0, *et* $\alpha := \delta(\overline{\boldsymbol{f}^-})$ *est l'image de* $\overline{\boldsymbol{f}^-}$ *dans* $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}_{k(\!(t)\!)}, \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}) = \mathbf{W}_m(k(\!(t)\!))/(\bar{\mathrm{F}} - 1)\mathbf{W}_m(k(\!(t)\!))$.

Si l'on veut classifier toute les équations de rang un, on est obligé de passer à $K_\infty := K(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$. Par passage à la limite on trouve :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbf{CW}(t^{-1}k_\infty[t^{-1}])/(\bar{\mathrm{F}}-1)\mathbf{CW}(t^{-1}k_\infty[t^{-1}])}_{\mathrm{H}^1(\mathcal{P}_{k_\infty((t))},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty}) \\
(\ \overline{a}_0\ ,\ \overline{\boldsymbol{f}^-}\ ) & \longrightarrow & [\mathrm{L}(a_0,\boldsymbol{f}^-)]
\end{array}$$

où $\mathrm{Pic}^{\mathrm{sol}}(\mathcal{R}_{K_\infty})$ est le groupe, par produit tensoriel, des classes d'isomorphisme d'équations de rang un *solubles* sur $\mathcal{R}_{K_\infty}$.

Calcul du foncteur de Fontaine pour le rang un

$$\left\{\begin{matrix}\text{Representations}\\ \mathrm{G}_{k((t))}\xrightarrow{\alpha}\mathrm{GL}_n(K)\\ \text{avec image finie}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\varphi-\nabla-\text{modules}\\ \text{sur } \mathcal{E}_K^\dagger\end{matrix}\right\}$$

$$V_\alpha \longmapsto (\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)\ ,\ \varphi_\alpha\ ,\ \nabla_\alpha)$$

$$(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)\ ,\ \varphi_\alpha\ ,\ \nabla_\alpha) := \Big((\mathrm{V}_\alpha\otimes\mathcal{E}^{\dagger,\mathrm{unr}})^{\mathrm{G}_{k((t))}}\ ,\ 1\otimes\varphi_{\mathcal{E}^{\dagger,\mathrm{unr}}}\ ,\ 1\otimes\partial_T\Big)$$

- Si V_α est de rang un, alors $\alpha(\mathrm{G}_{k((t))})\subseteq K^\times$ est un groupe *abélien*,

et α se factorise par l'abélianisé $\mathrm{G}^{\mathrm{ab}}_{k((t))}$ et $\alpha=\alpha_{\mathcal{P}}\cdot\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}\cdot\alpha_k$:

$$\alpha(\mathrm{G}_{k((t))})=\alpha(\mathrm{G}_k)\times\alpha(\mathcal{I}_{k((t))}/\mathcal{P}_{k((t))})\times\alpha(\mathcal{P}_{k((t))})$$

où $\mathcal{P}_{k((t))}\subset\mathcal{I}_{k((t))}\subset\mathrm{G}_{k((t))}$ sont l'inertie et l'inertie sauvage.

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{V}_\alpha = \mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{P}}}\otimes\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}}\otimes\mathrm{V}_{\alpha_k}\\ \mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_\alpha)=\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{P}}})\otimes\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}})\otimes\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_k})\end{cases}$$

- La connexion ∇_{α_k} est triviale, mais φ_{α_k} ne l'est pas.
- $\nabla_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}$ et $\varphi_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}$ se calculent facilement :

• **<u>Repr.de rang un de $\ell-$torsion de $\mathcal{I}$ (cas cyclique) :</u>** On a

$$\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}(\mathrm{G}_{k((t))}) = \mathrm{Gal}(k((t'))/k((t))).$$

pour un corps $k((t'))/k((t))$. Comme l'ordre ℓ est premiere à p, alors

$$t' = t^{1/\ell}\ , \quad (\ell, p) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} k((t^{1/\ell})) & & \mathcal{E}_K^\dagger(T^{1/\ell}) \\ \Big| & \longleftrightarrow & \Big| \\ k((t)) & & \mathcal{E}_K^\dagger \end{array}}$$

Une base de $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}})$ est donnée par

$$\boxed{\mathbf{e} \otimes T^{1/\ell}}$$

$$\Big(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}})\ ,\ \nabla\Big) \iff \nabla(\mathbf{e} \otimes T^{1/\ell}) = 1/\ell \cdot (\mathbf{e} \otimes T^{1/\ell})$$

$$\Big(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{I}/\mathcal{P}}})\ ,\ \varphi\Big) \iff \varphi\,(\mathbf{e} \otimes T^{1/\ell}) = (\varphi(T)/T)^{1/\ell} \cdot (\mathbf{e} \otimes T^{1/\ell})$$

Calcul de la partie de $p-$torsion (cas cyclique) :

- $\alpha_{\mathcal{P}}(\mathrm{G}_{k((t))}) = \mathrm{Gal}(\mathrm{F}/k((t)))$, et $[\mathrm{F} : k((t))] = p^{m+1}$, alors il existe

$\boldsymbol{f}^{-}(T) := (f_0^{-}, \ldots, f_m^{-}) \in \mathbf{W}_m(T^{-1}\mathcal{O}_K[T^{-1}])$ tel que

$$\boxed{\mathrm{F} = \left(k((t))^{\mathrm{sep}} \right)^{\mathrm{Ker}(\alpha_{\mathcal{P}})} = k((t))(\{\overline{\nu}_0, \ldots, \overline{\nu}_m\})}$$

où $\overline{\boldsymbol{\nu}} := (\overline{\nu}_0, \ldots, \overline{\nu}_m) \in \mathbf{W}_m(k((t))^{\mathrm{sep}})$ est solution de l'équation

$$\bar{\mathrm{F}}(\overline{\boldsymbol{\nu}}) - \overline{\boldsymbol{\nu}} = \left(\overline{f_0^{-}}, \ldots, \overline{f_m^{-}} \right) \in \mathbf{W}_m(k((t))) \ .$$

Soit $\mathcal{F}^{\dagger}/\mathcal{E}_K^{\dagger}$ l'extension non ramifié attachée à $\mathrm{F}/k((t))$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{F} = k((t))(\overline{\nu}_0, \ldots, \overline{\nu}_m) & & \mathcal{F}^{\dagger} = \mathcal{E}_K^{\dagger}\Big(\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^{-}(T), 1)\Big) \\ \Big| & \longleftrightarrow & \Big| \\ k((t)) & & \mathcal{E}_K^{\dagger} \end{array}}$$

Ceci resoulte du fait que $\boxed{\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu},1)^{p^{m+1}} = \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-,1)^{p^{m+1}} \ ,}$ et donc un générateur de Kummer est $\theta_{p^m}(\boldsymbol{\nu},1)$, ou bien $\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$.

Une base de $\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{P}}}) = (\mathrm{V}_\alpha \otimes \mathcal{E}^{\dagger,\mathrm{unr}})^{\mathrm{G}_{k((t))}}$ est alors donnée par

$$\boxed{\mathbf{e} \ \otimes \ \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)}$$

Notons $\theta := \mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-(T),1)$, alors

$$\Big(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{P}}}) \ , \ \varphi \ , \ \nabla\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla(\mathbf{e}\otimes\theta) = \partial_T(\theta)/\theta\cdot(\mathbf{e}\otimes\theta) \\ \varphi\,(\mathbf{e}\otimes\theta) = \varphi(\theta)/\theta\cdot(\mathbf{e}\otimes\theta) \end{cases}$$

on trouve que

- $\partial_T(\theta)/\theta \ = \ \partial_T(\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-,1))/\mathrm{e}_{p^m}(\boldsymbol{f}^-,1) \ = \ g(0,\boldsymbol{f}^-)$
- $\varphi(\theta)/\theta \ = \ \theta_{p^m}(\boldsymbol{f}^- + \varphi_0(\boldsymbol{f}^-) + \cdots + \varphi_0^{r-1}(\boldsymbol{f}^-),1)$,

où φ_0 est un relevé de l'application $f \mapsto f^p$ de $k(\!(t)\!)$, et $\varphi = \varphi_0^r$.
Donc $\Big(\mathbf{D}^\dagger(\mathrm{V}_{\alpha_{\mathcal{P}}}) \ , \ \nabla\Big)$ est le module diff. défini par $L(0,\boldsymbol{f}^-(T))$.

Un critère de solubilité pour les éq.diff. de rang un :

Théorème : Soit $L := \partial_T - g(T)$ une éq.diff., avec

$$g(T) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i T^i \quad \in \quad \mathcal{R}_K \ .$$

Alors L est *soluble* si et seulement si $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ et pour tout $n \geq 1$, $(n,p) = 1$ les familles

$$\langle a_{-n}, a_{-np}, a_{-np^2}, \cdots \rangle \quad \text{et} \quad \langle a_n, a_{np}, a_{np^2}, \cdots \rangle$$

sont les composantes fantômes de deux vecteurs de Witt $\boldsymbol{\lambda}_{-n}$ et $\boldsymbol{\lambda}_n$ dans $\mathbf{W}(\mathcal{O}_K)$.

Corollaire : Soit $p \neq 2$. Si K est non ramifié sur $\mathbb{Q}_p$, alors tout éq.diff. soluble est isomorphe à une équation modérée, i.e. du type

$$\partial_T - a_0 \ ,$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}_p$.

THE END

Références

[And02] Y. André. Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique. *Invent. Math.*, 148(2) :285–317, 2002.

[Haz78] M. Hazewinkel. *Formal groups and applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., New York, 1978.

[LT65] J. Lubin and J. Tate. Formal complex multiplication in local fields. *Ann. of Math. (2)*, 81 :380–387, 1965.

[Ser62] J. P. Serre. *Corps locaux*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII. Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.