INTRODUCTION AUX THÉORÈMES DE HILBERT-SAMUEL ARITHMÉTIQUES

Huayi Chen

Table des matières

1. Introduction

En géométrie algébrique, un théorème de Hilbert-Samuel au sens général s'agit de décrire le comportement asymptotique d'un anneau gradué par $\mathbb{N}$. Par exemple, étant donnée une algèbre graduée $R_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ sur un corps de base k telle que chaque composante homogène R_n soit un espace vectoriel de rang fini sur k, la fonction de Hilbert de $R_\bullet$ est définie comme l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui envoie $n \in \mathbb{N}$ sur le rang de R_n sur k. Le théorème de Hilbert-Samuel dans ce cadre-là affirme que, si $R_\bullet$ est engendrée comme k-algèbre par R_1, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[T]$ tel que $P(n) = \mathrm{rg}_k(R_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment positif. Ce résultat peut être obtenu en utilisant la méthode classique de dévissage par exemple. Bien entendu, ce résultat est valable pour un anneau gradué général $R_\bullet$ tel que chaque composante homogène R_n soit un R_0-module de longueur finie et qui est engendré comme R_0-algèbre par R_1 (le résultat se généralise naturellement pour un module gradué de type fini sur un tel anneau, voir [**6**, VIII §4]).

Dans beaucoup de situations pratiques, l'anneau gradué s'écrit comme un système linéaire gradué d'un faisceau inversible. Soient X un schéma projectif sur un corps de base k et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. La somme directe $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ forme une k-algèbre graduée. Cette algèbre est de type fini notamment quand L est ample. Dans ce cas-là on peut déduire du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch et le théorème d'annulation de Serre le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de cette algèbre graduée. Il est aussi possible d'adapter la méthode de dévissage dans le cadre géométrique pour relier le coefficient du terme principal de la fonction de Hilbert au nombre d'intersection de L, toujours sous l'hypothèse de positivité du fibré inversible.

Dans le cas où le fibré inversible n'est pas ample, l'algèbre graduée des sections globales n'est pas nécessairement de type fini et le théorème d'annulation de Serre ne s'applique plus. La méthode de dévissage n'est donc pas adéquate à étudier la fonction de Hilbert de ce genre de fibrés inversibles. En revanche, les résultats de Fujita [**18**] et Takagi [**31**] (approximation de Fujita) montrent que, au moins dans le cas où X est un schéma *intègre* et projectif sur un corps et L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible gros (c'est-à-dire qu'une puissance tensorielle de L admet un sous-faisceau inversible ample), la fonction de Hilbert de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ est équivalente à un polynôme dont le degré est égal à la dimension de Krull de X lorsque $n \to +\infty$. Cependant, contrairement au cas où L est ample, le coefficient du terme dominant pourrait être un nombre irrationnel, comme montré par Cutkosky [**16**]. En utilisant la méthode combinatoire d'Okounkov [**27**], le théorème d'approximation de Fujita a été généralisé dans [**24, 26**] au cas d'un système linéaire gradué qui contient un diviseur ample.

L'analogue arithmétique du théorème de Hilbert-Samuel a d'abord été démontré par Gillet et Soulé [**21**] en utilisant leur théorème de Riemann-Roch arithmétique. Ensuite ce résultat a été revisité et généralisé dans divers contextes par différents auteurs. On considère un morphisme projectif et plat $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ et un fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$. En géométrie d'Arakelov, un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique cherche à décrire le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert arithmétique du système de fibrés vectoriels normés $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$. Il y a cependant au moins deux points de virgation dans cette formulation. D'abord il y a plusieurs choix naturels de la structure du fibré vectoriel normé $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$, comme par exemple la norme L^2 et la norme sup. Si le théorème de Gromov (voir [**30**] VIII.2.5 Lemma 2) permet de comparer la norme L^2 et la norme sup et a été utilisé dans les travaux comme Abbes-Bouche [**1**] et Randriambololona [**29**], le travail de Berman et Freixas i Montplet [**2**] considère des métriques hermitiennes singulières, où la norm sup sur l'image directe du fibré peut ne pas avoir sens (voir aussi [**17**] pour le cas de l'espace de module des courbes pointés). Un autre point provient du choix de l'invariant arithmétique dans la définition de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique. Dans la littérature, il y a au moins deux possibilités : le degré d'Arakelov et le logarithme du nombre des sections petites. On peut comparer par exemple [**35**] et [**28**]. Même si le faisceau inversible $\mathscr{L}$ est ample et sa métrique est semi-positive, en général ces deux constructions donnent des fonctions de Hilbert-Samuel arithmétiques non-équivalentes.

Similairement à la situation géométrique, la méthode du théorème de Riemann-Roch arithmétique et la combinaison de la dévissage avec des méthodes analytiques s'appliquent difficilement au cas où la fibre générique de $\mathscr{L}$ n'est pas ample. Inspiré par les travaux sur la méthode combinatoire dans le cadre de la géométrie algébrique, deux approches différentes ont été proposées pour étudier le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert-Samuel arithmétique. Celle de [**36, 37**] adapte la méthode de Lazarsfeld-Mustaţă dans le cadre arithmétique en considérant la fibre du $\mathbb{Z}$-schéma au-dessus d'une place non-archimédienne, tandis que celle de [**12, 5**] repose sur le résultat-même du théorème d'approximation de Fujita des systèmes linéaires gradués, ainsi que la méthode de $\mathbb{R}$-filtration développée dans [**11**]. On renvoie les lecteurs dans [**7, 8**] pour le cas torique, où la méthode est aussi de nature combinatoire.

Je ne cherche pas à donner un aperçu panoramique des résultats du type de théorème de Hilbert-Samuel, mais plutôt me limite au cas d'une algèbre graduée sur un corps de base, ainsi que quelques analogues arithmétiques, en mettant un attention particulière sur la similitude et la différence des méthodes utilisées. Le cours est organisé comme suit. Dans le premier paragraphe, on traite le cas d'une algèbre de semi-groupe et la méthode combinatoire ; dans le deuxième paragraphe, une interprétation géométrique du problème sera présentée en faisant le lien avec la théorie d'intersection ; dans le troisième paragraphe, on discute l'analogue métrique du problème ; enfin, dans le quatrième paragraphe, on traite des analogues arithmétiques du théorème de Hilbert-Samuel.

2. Méthode combinatoire

Le prototype du théorème de Hilbert-Samuel est le cas de l'algèbre de polynômes. Soient k un corps commutatif et $R_\bullet = k[T_0, \dots, T_d]$ l'algèbre des polynômes à $d+1$ variables (où $d \in \mathbb{N}$), gradué par le degré de polynôme (autrement dit, R_n est l'espace vectoriel sur k des polynômes homogènes de degré n). La fonction de Hilbert de $R_\bullet$ est

$$(n \in \mathbb{N}) \longmapsto \binom{d+n}{d}.$$

C'est un polynôme de degré d en n, dont le coefficient du terme dominant est $1/d!$: on a

$$\binom{d+n}{d} = \frac{(n+d)\cdots(n+1)n}{d!} = \frac{1}{d!}n^d + O(n^{d-1}), \quad n \to +\infty. \tag{1}$$

L'algèbre de polynômes est un cas particulier d'algèbres de semi-groupes. Soient $d \in \mathbb{N}$ et Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ (muni de la loi d'addition). On désigne par $k[\Gamma]$ l'algèbre du semi-groupe Γ. Par définition $k[\Gamma]$ est la somme directe d'une famille de k-modules libres de rang 1 paramétrée par Γ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on désigne par e^γ le générateur canonique du k-module libre de rang 1 indexé par γ. La loi de multiplication sur $k[\Gamma]$ est choisie de sorte que $e^{\gamma+\gamma'} = e^\gamma e^{\gamma'}$ pour tout couple $(\gamma, \gamma') \in \Gamma^2$. L'algèbre $k[\Gamma]$ est canoniquement munie d'une $\mathbb{N}$-graduation :

$$k[\Gamma] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^d \\ (n,\alpha) \in \Gamma}} k e^{(n,\alpha)}.$$

Un exemple typique de semi-groupe dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ est celui qui provient d'un *corps convexe* dans $\mathbb{R}^d$, par lequel on entend une partie convexe et compact dans $\mathbb{R}^d$, dont l'intérieur est non-vide. Étant donné un corps convexe $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, on construit un sous-ensemble $\Gamma(\Delta)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ comme suit :

$$\Gamma(\Delta) := \{(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d \mid n \geqslant 1,\ \tfrac{1}{n}\alpha \in \Delta\} \cup \{(0,0)\}.$$

Par la convexité de Δ, on obtient que $\Gamma(\Delta)$ est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. En outre, la fonction de Hilbert de l'algèbre $k[\Gamma(\Delta)]$ est donnée par la formule

$$(n \in \mathbb{N}) \longmapsto \#\{\alpha \in \mathbb{Z}^d \mid \tfrac{1}{n}\alpha \in \Delta\}.$$

Par la propriété de la somme de Riemann, on obtient

$$\#\{\alpha \in \mathbb{Z}^d \mid \tfrac{1}{n}\alpha \in \Delta\} = \mathrm{vol}(\Delta) n^d + o(n^d), \quad n \to +\infty,$$

où vol est la mesure de Lebesgue. Dans le cas où Δ est le simplexe

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d \mid x_1 + \cdots + x_d \leqslant 1\},$$

dont le volume est $1/d!$, on retrouve le résultat dans le cas de l'algèbre des polynômes.

Khovanskiĭ **[25]** a montré que la méthode de corps convexe peut être appliquée à un sous-semi-groupe général de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Soit Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. On suppose que $\Gamma \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}^d) = \{(0,0)\}$ pour des raisons de simplicité [1]. Soient $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ et $\Gamma_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^d$ et le sous-espace vectoriel de

1. Cette hypothèse supplémentaire est anodine car $(\Gamma \cap (\mathbb{N}_{\geqslant 1} \times \mathbb{Z}^d)) \cup \{(0,0)\}$ est aussi un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ engendrés par Γ, respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\Gamma_n := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid (n, \alpha) \in \Gamma\}.$$

Similairement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, soit

$$\Gamma_{\mathbb{Z},n} := \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \mid (n, \alpha) \in \Gamma_{\mathbb{Z}}\}.$$

Il s'avère que

$$\mathbb{N}(\Gamma) := \{n \in \mathbb{N} \mid \Gamma_n \neq \varnothing\}$$

est un sous-semi-groupe de $\mathbb{N}$. En outre, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par $\mathbb{N}(\Gamma)$ s'identifie à

$$\mathbb{Z}(\Gamma) := \{n \in \mathbb{N} \mid \Gamma_{\mathbb{Z},n} \neq \varnothing\}.$$

On suppose que le groupe $\mathbb{Z}(\Gamma)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Alors $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d)$ est un espace affine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, dont le sous-espace vectoriel sous-jacent est $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^d)$. En outre, l'ensemble $\Gamma_{\mathbb{Z}} \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}^d)$ est un réseau dans $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^d)$. On munit ce dernier de l'unique mesure de Haar telle que le réseau $\Gamma_{\mathbb{Z}} \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}^d)$ soit de covolume 1.

Soit $A(\Gamma)$ la projection canonique de $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^d$. C'est un espace affine dans $\mathbb{R}^d$. La mesure de Haar sur $\Gamma_{\mathbb{R}} \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^d)$ induit (par translation puis par projection) une mesure borélienne sur $A(\Gamma)$ que l'on note $\mathrm{vol}(\cdot)$. En outre, on désigne par $\Delta(\Gamma)$ l'adhérence de l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 1} \{n^{-1}\alpha \mid \alpha \in \Gamma_n\}.$$

C'est une partie fermée et convexe dans $A(\Gamma)$ qui engendre $A(\Gamma)$ comme espace affine. En particulier, l'intérieur relatif de $\Delta(\Gamma)$ dans $A(\Gamma)$ est non-vide.

En utilisant le théorème de Bésout, par un argument élémentaire on obtient que l'ensemble $(\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}(\Gamma)) \setminus \mathbb{N}(\Gamma)$ est fini. La méthode de Khovanskiĭ est une généralisation aux dimensions supérieures de ce résultat (on renvoie dans [**25**, Proposition 1] pour une démonstration, voir aussi [**24**, §1] et [**4**, §1]).

Lemme 2.1. — *Pour tout sous-ensemble convexe et compact E de $A(\Gamma)$ qui est contenu dans l'intérieur relatif de $\Delta(\Gamma)$, on a*

$$E \cap \{\tfrac{1}{n}\alpha \mid \alpha \in \Gamma_n\} = E \cap \{\tfrac{1}{n}\alpha \mid \alpha \in \Gamma_{\mathbb{Z},n}\}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ suffisamment positif.

Encore par la somme de Riemann on déduit du lemme précédent le résultat suivant. Remarquons que aucune condition de finitude n'est exigée pour le sous-semi-groupe Γ.

Théorème 2.2. — *Soient Γ un sous-semi-groupe de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$ et $R_\bullet := k[\Gamma]$. Alors*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}(\Gamma),\, n \to +\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(R_n)}{n^d} = \mathrm{vol}(\Delta(\Gamma)).$$

Okounkov [**27**] a généralisé cette méthode combinatoire à l'étude de la log-concavité de la fonction de multiplicité. Son approche a été développée par Lazarsfeld et Mustaţă [**26**], et Kaveh et Khovanskiĭ [**24**] respectivement à étudier le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert d'une algèbre graduée intègre (non-nécessairement de type fini). L'idée remonte à la méthode très classique d'associer à une algèbre $\mathbb{N}$-filtrée son algèbre graduée correspondante. Cette procédure, qui change la structure d'algèbre en général, permet de garder toutes les informations de la fonction de Hilbert. On introduit une relation d'ordre totale $\leqslant$ sur $\mathbb{Z}^d$, supposée être «additive», autrement dit, $\alpha \leqslant \beta$ entraîne $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbb{Z}^d)^3$. Cette propriété est par exemple satisfaite par la relation d'ordre lexicographique.

Soit $R_\bullet$ une k-algèbre gradué telle que $R_0 = k$. On entend par *valuation homogène à valeurs dans* $(\mathbb{Z}^d, \leqslant)$ sur $R_\bullet$ toute application

$$v : \coprod_{n \in \mathbb{N}} R_n \longrightarrow \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(a) pour tout élément homogène f de $R_\bullet$, $v(f) \in \mathbb{Z}^d$ si et seulement si f est non-nul, et $v(f) = 0$ si $f \in R_0 \setminus \{0\}$.

(b) si f est g sont deux éléments homogènes de $R_\bullet$, on a $v(fg) = v(f) + v(g)$;

(c) si $n \in \mathbb{N}$ et si x et y sont deux éléments de R_n, on a $v(x + y) \geqslant \min(v(x), v(y))$.

(d) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, l'espace vectoriel quotient

$$\mathrm{gr}^\alpha(R_n) := \{x \in R_n \,|\, v(x) \geqslant \alpha\}/\{x \in R_n \,|\, v(x) > \alpha\}$$

a pour dimension 0 ou 1 sur k.

Sous ces conditions la somme directe

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \mathrm{gr}^\alpha(R_n)$$

est munie d'une structure de k-algèbre graduée. En outre, elle est isomorphe à l'algèbre du semi-groupe

$$\Gamma(R_\bullet) := \{(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d \,|\, \mathrm{gr}^\alpha(R_n) \neq \{0\}\}.$$

Il s'avère que les algèbres graduées $R_\bullet$ et $k[\Gamma(R_\bullet)]$ ont la même fonction de Hilbert. Par le théorème 2.2 on peut utiliser la partie convexe $\Delta(\Gamma(R_\bullet))$ pour décrire le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de $R_\bullet$. Il faut cependant remarquer que l'existence d'une valuation homogène sur $R_\bullet$ n'est pas immédiate. En tout cas elle implique que l'anneau $R_\bullet$ est intègre. Dans le cas où $R_\bullet$ est un système linéaire gradué d'un diviseur de Cartier sur un k-schéma projectif et intègre possédant un point rationnel régulier, une telle valuation homogène peut être construite en choisissant un système de paramètres de l'anneau local en ce point rationnel régulier. Cependant l'existence d'un point rationnel régulier entraîne que le K-schéma est en fait géométriquement intègre. On renvoie dans **[13]** pour une approche alternative basée sur la géométrie d'Arakelov relativement à un corps de fonctions où cette hypothèse n'est pas nécessaire.

3. Approche géométrique

Soit $R_\bullet$ une k-algèbre graduée de type fini, qui est engendrée comme k-algèbre par R_1. Le spectre projectif de $R_\bullet$ est un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}(R_1)$ et l'homomorphisme canonique

$$\alpha_n : R_n \longrightarrow H^0(\mathrm{Proj}(R_\bullet), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(R_\bullet)}(n))$$

est un isomorphisme lorsque $n \in \mathbb{N}$ est assez positif. On peut donc ramener l'étude asymptotique de la fonction de Hilbert au cas d'un système linéaire gradué.

Soient X un schéma projectif sur $\mathrm{Spec}\, k$ et L un $\mathcal{O}_X$-module ample. On considère la k-algèbre graduée

$$R(L)_\bullet := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$$

et on cherche à comprendre le comportement asymptotique de la fonction de Hilbert de L

$$(n \in \mathbb{N}) \longmapsto F_L(n) := \mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n})).$$

Comme L est ample, il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $H^0(X, L^{\otimes n_0})$ est non-nul. Pour simplicité on suppose qu'il existe une section non-nulle $s \in H^0(X, L)$ tel que l'homomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $f_s : L^\vee \to \mathcal{O}_X$ défini par s est injectif. Soient Y le sous-schéma fermé de X défini par l'annulation de s et $i : Y \to X$ le morphisme d'inclusion. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on a une suite exacte d'homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow L^{\otimes(n-1)} \xrightarrow{\ \mathrm{Id}\otimes f_s\ } L^{\otimes n} \longrightarrow L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow 0\ ,$$

qui induit une suite exacte de groupes de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes(n-1)}) \xrightarrow{\ \cdot s\ } H^0(X, L^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(Y, i^*(L^{\otimes n})) \longrightarrow H^1(X, L^{\otimes(n-1)})\ ,$$

où l'isomorphisme $H^0(X, L^{\otimes n} \otimes i_*(\mathcal{O}_Y)) \cong H^0(Y, i^*(L)^{\otimes n})$ provient de l'adjonction entre i_* et i^*. Comme L est ample, le théorème d'annulation de Serre montre que $H^1(X, L^{\otimes n}) = \{0\}$ et donc

$$F_L(n) - F_L(n-1) = F_{i^*(L)}(n)$$

pour n assez positif, où F_L et $F_{i^*(L)}$ sont respectivement les fonctions de Hilbert de L et $i^*(L)$. Ainsi par récurrence on montre qu'il existe un polynôme P_L de degré $\dim(X)$ tel que $F_L(n) = P_L(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez positif. En outre, le coefficient du terme dominant du polynôme P_L est

$$\frac{\deg(c_1(L)^{\dim(X)} \cap [X])}{\dim(X)!}.$$

En conclusion, on a le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Soient X un schéma projectif de dimension d sur* $\operatorname{Spec} k$ *et L un $\mathcal{O}_X$-module ample, alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!} = \deg(c_1(L)^d \cap [X]).$$

Une démonstration alternative consiste à appliquer le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch, qui affirme que

$$\begin{aligned}\chi(X, L^{\otimes n}) := \sum_{i=0}^{d} \mathrm{rg}_k(H^i(X, L^{\otimes n})) &= \deg(\mathrm{ch}(L^{\otimes d})\mathrm{Td}(X)) \\ &= \deg(c_1(L)^d \cap [X])\frac{n^d}{d!} + O(n^{d-1}).\end{aligned}$$

On utilise aussi le théorème d'annulation de Serre pour identifier $\chi(X, L^{\otimes n})$ à $H^0(X, L^{\otimes n})$ pour n assez positif.

Soient X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} K$ et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On définit le *volume* de L comme

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!}, \tag{2}$$

où d est la dimension de X. On a vu plus haut que, si L est un $\mathcal{O}_X$-module ample, alors $\mathrm{vol}(L) = \deg(c_1(L)^d \cap [X])$. En outre la limite supérieure dans la formule précédente est en fait une limite.

Dans le cas où X est un schéma intègre, il est plus commode d'utiliser le langage des diviseurs de Cartier. Soit $\mathcal{O}_X^\times$ le faisceau de groupes abéliens défini comme suit : pour tout sous-ensemble ouvert U de X, $\mathcal{O}_X^\times(U)$ est l'ensemble des $a \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que l'homothétie $a : \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}_U$ soit un isomorphisme. Similairement, soit $\mathscr{M}_X^\times$ le faisceau de groupes abéliens qui envoie U sur l'ensemble des $a \in \mathscr{M}_X(U)$ tels que l'homothétie $a : \mathscr{M}_U \to \mathscr{M}_U$ soit un isomorphisme. On voit aussitôt que $\mathcal{O}_X^\times$ est un sous-faisceau de groupes abéliens de $\mathscr{M}_X^\times$. On entend par *diviseur de Cartier* toute section sur X du faisceau quotient $\mathscr{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times$. On dit qu'un diviseur D de Cartier est *effectif* et on note $D \geqslant 0$ s'il appartient à $(\mathscr{M}_X^\times \cap \mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_X^\times$. On désigne par $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de Cartier sur X et par $\mathrm{Div}^+(X)$ le sous-semi-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs effectifs.

Les diviseurs de Cartier sont étroitement liés aux faisceaux inversibles. Soit L un $\mathcal{O}_X$-modules inversible. A toute section globale non-nulle s de $L\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathscr{M}_X$, on peut associer un diviseur de Cartier $\mathrm{div}(s)$ comme suit. Pour tout sous-ensemble ouvert U de X sur lequel le $\mathcal{O}_X$-module L se trivialise par une section $s_0\in\Gamma(U,L)$, il existe une unique fonction rationnelle non-nulle f telle que $s=fs_0$. La classe de f dans $\Gamma(U,\mathscr{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times)$ ne dépend pas du choix de la trivialisation locale s_0. Donc le recollement des classes de fonctions rationnelles quand U varie donne un diviseur de Cartier $\mathrm{div}(s)$.

Réciproquement, si D est un diviseur de Cartier sur X, on désigne par $\mathcal{O}_X(D)$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module de $\mathscr{M}_X$ engendré par $-D$. C'est un $\mathcal{O}_X$-module inversible. L'application θ de $\mathrm{Div}(X)$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ qui envoie tout diviseur de Cartier D sur la classe d'isomorphisme du $\mathcal{O}_X$-module inversible $\mathcal{O}_X(D)$ est un morphisme surjectif de groupes (voir [**22**, IV.21.3.4-5]). On dit que le diviseur D est *ample* si le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ est ample.

Les constructions au-dessus peuvent aussi être obtenues par la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceau abélien

$$1\longrightarrow\mathcal{O}_X^\times\longrightarrow\mathscr{M}_X^\times\longrightarrow\mathscr{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times\longrightarrow 0\ ,$$

qui s'écrit comme

$$1\longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_X^\times)\longrightarrow H^0(X,\mathscr{M}_X^\times)\xrightarrow{\mathrm{div}}\mathrm{Div}(X)\xrightarrow{\theta}H^1(X,\mathcal{O}_X^\times)\ .$$

On désigne par $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ le produit tensoriel $\mathrm{Div}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Les éléments dans $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ sont appelés les $\mathbb{R}$-diviseurs sur X. Un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X est dit *effectif* (et on note $D\geqslant_{\mathbb{R}}0$) s'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de diviseurs de Cartier effectif. Il est claire que, si D est un diviseur de Cartier effectif, alors son image dans $\mathrm{Div}(X)_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif. La réciproque est vrai lorsque X est un schéma normal.

Soit $K=k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X. On entend par *système linéaire* sur X tout sous-k-espace vectoriel de K qui est de rang fini sur k. Si V est un système linéaire sur X, on désigne par $k(V)$ le sous-extension de K/k engendrée par les éléments de la forme a/b, où a et b appartiennent à $V\setminus\{0\}$. Pour tout $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier D sur X, on définit

$$H^0(D):=\{f\in K\mid D+\mathrm{div}(f)\geqslant_{\mathbb{R}}0\}\cup\{0\}.$$

C'est un exemple de système linéaire sur X. En outre, on a un isomorphisme canonique entre $H^0(D)$ et $H^0(X,\mathcal{O}_X(D))$. Ainsi on peut utiliser les systèmes linéaires à étudier les sections globales d'un faisceau inversible.

On entend par *système linéaire gradué* sur X toute sous-k-algèbre graduée

$$V_\bullet=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_nT^n$$

de l'anneau des polynômes

$$K[T] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KT^n$$

telle que chaque V_n est un système linéaire gradué.

Supposons que le k-schéma X possède d'un point rationnel régulier x. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier et son corps des fractions s'identifie à K. Son complété est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $k[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$. On obtient ainsi une application $v : K \to \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$, où le groupe $\mathbb{Z}^d$ est muni de la relation d'ordre lexicographique. En effet, à toute série formelle

$$S = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d} \lambda_\alpha T_1^{\alpha_1}\cdots T_d^{\alpha_d},$$

on associe (avec la convention $\inf\varnothing = +\infty$)

$$\inf\{\alpha\in\mathbb{N}^d \,|\, \lambda_\alpha \neq 0\}.$$

La composition de cette application avec l'homomorphisme d'inclusion $\mathcal{O}_{X,x} \to K[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$ donne une application $v : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathbb{N}^d \cup \{+\infty\}$ qui s'étend à une application $v : K \to \mathbb{Z}^d \cup \{+\infty\}$ en prenant

$$v(f/g) = v(f) - v(g) \text{ pour } (f,g)\in K^2,\ g\neq 0.$$

Il s'avère que, pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$, l'application ν induit une valuation homogène à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. On peut donc appliquer la méthode combinatoire dans le paragraphe précédent pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.2. — *Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur X. On suppose que $V_\bullet$ est* birationnel, *c'est-à-dire $K = k(V_n)$ pour certain $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Soit*

$$\mathbb{N}(V_\bullet) := \{n\in\mathbb{N} \,|\, V_n \neq \{0\}\}.$$

Alors la limite

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \lim_{n\in\mathbb{N}(V_\bullet),\, n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(V_n)}{n^d/d!}$$

existe dans $]0,+\infty]$. *En outre, on a*

$$\frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{d!} = \mathrm{vol}(\Delta(\Gamma(V_\bullet))).$$

Si de plus $V_\bullet$ est contenu dans un système linéaire gradué de type fini, alors $\Delta(\Gamma(V_\bullet))$ *est compact et* $\mathrm{vol}(V_\bullet)$ *est fini.*

Dans le cadre géométrique, la méthode combinatoire permet de tirer plus d'information géométrique que l'interprétation de la fonction volume par la mesure de la partie convexe $\Delta(V_\bullet) := \Delta(\Gamma(V_\bullet))$ (appelé *corps de Newton-Okounkov* dans la littérature). Par exemple, en utilisant le fait que la valuation homogène à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ provient d'une valuation sur K, on déduit de l'inégalité de Brunn-Minkowski le résultat suivant.

Théorème 3.3. — *Soient $U_\bullet$, $V_\bullet$ et $W_\bullet$ trois systèmes linéaires gradués sur X qui sont birationnels. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment positif, on a*

$$U_n \cdot V_n := \{fg \mid f \in U_n,\ g \in V_n\} \subset W_n.$$

Alors on a

$$\Delta(U_\bullet) + \Delta(V_\bullet) := \{x + y \mid x \in \Delta(U_\bullet),\ y \in \Delta(V_\bullet)\} \subset \Delta(W_\bullet).$$

En particulier,

$$\mathrm{vol}(U_\bullet)^{\frac{1}{d}} + \mathrm{vol}(V_\bullet)^{\frac{1}{d}} \leqslant \mathrm{vol}(W_\bullet)^{\frac{1}{d}}.$$

4. Version métrique

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps k est muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ telle que la topologie sur k induite par $|\cdot|$ est complète. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. On munit $\mathrm{d\acute{e}t}(V)$ du *déterminant* $\|\cdot\|_{\mathrm{d\acute{e}t}}$ de la norme $\|\cdot\|$, défini comme

$$\forall\, \eta \in \mathrm{d\acute{e}t}(V), \quad \|\eta\|_{\mathrm{d\acute{e}t}} := \inf\{\|x_1\| \cdots \|x_r\| \mid \eta = x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\}.$$

Soit $R_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} R_n$ une k-algèbre graduée telle que chaque R_n soit un espace vectoriel de rang fini sur k. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on fixe une norme $\|\cdot\|_n$ sur l'espace vectoriel R_n. La version métrique du problème de Hilbert-Samuel cherche à déterminer le comportement asymptotique de la suite $\{(\mathrm{d\acute{e}t}(V_n), \|\cdot\|_{n,\mathrm{d\acute{e}t}})\}$ d'espaces vectoriels de rang 1 sur k.

Dans le cadre géométrique où $R_\bullet$ est un système linéaire gradué, la suite de normes $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ provient souvent d'une métrique. Soit X un schéma sur $\mathrm{Spec}\, k$. On désigne par F_X le foncteur de la catégorie $\mathbf{An}_k$ des k-algèbres vers la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles, qui envoie toute k-algèbre A sur l'ensemble des k-morphismes de $\mathrm{Spec}\, A$ vers X. Soit $\mathbf{E}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An}_k$ des corps extensions de k. Ensemblistement le schéma s'identifie à la limite inductive de la restriction de F_X à $\mathbf{E}_k$.

Soit $\mathbf{EV}_k$ la catégorie des extensions valuées de $(k, |\cdot|)$. Ses objets sont les corps K extensions de k muni de valeurs absolues qui prolongent $|\cdot|$. Ses morphismes sont les morphismes k-linéaires de corps qui préservent les valeurs absolues. On a un foncteur d'oubli ϖ de $\mathbf{EV}_k$ dans $\mathbf{An}_k$ qui consiste à oublier la structure de valeur absolue.

Soit X un schéma sur $\mathrm{Spec}\, k$. On entend par *espace de Berkovich* associé à X la limite inductive du foncteur composé $F_X \circ \varphi$, noté X^{an}. La propriété universelle de limite inductive induit une application $j : X^{\mathrm{an}} \to X$. Si x est un point de X^{an}, tout k-morphisme $y : \mathrm{Spec}\, K \to X$ représentant le point x

(où K est muni d'une valeur absolue $|\cdot|_y$ qui prolonge $|\cdot|$) se factorise de façon unique par le morphisme canonique $\operatorname{Spec}\kappa(x) \to X$ (où $\kappa(x)$ désigne le corps résiduel de $j(x)$) et ainsi $\kappa(x)$ devient un sous-corps de K. Il s'avère que la restriction de la valeur absolue $|\cdot|_y$ à $\kappa(x)$ ne dépend pas du choix de y (et de $|\cdot|_y$), et on la note comme $|\cdot|_x$. Soit $\widehat{\kappa}(x)$ le complété de $\kappa(x)$ par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_x$, sur lequel $|\cdot|_x$ s'étend de façon unique.

L'ensemble X^{an} est naturellement muni d'une topologie de Zariski, celle la moins fine que rend l'application j continue. Berkovich a défini une autre topologie sur X^{an}, qui est plus fine que la topologie de Zariski. Soit U un sous-schéma ouvert de X et f une fonction régulière sur U. Pour tout point $x \in U^{\mathrm{an}}$, on désigne par $f(x)$ la classe résiduelle de f dans $\kappa(x)$ et par $|f|(x)$ sa valeur absolue par rapport à $|\cdot|_x$. On obtient ainsi une fonction $|f| : U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_+$. La *topologie de Berkovich* sur X^{an} est définie comme la topologie la moins fine qui rend continue l'application j et toutes les fonctions de la forme $|f|$, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur les sous-schémas ouverts de X.

La construction d'espace de Berkovich est fonctoriel. Si $\phi : Y \to X$ est un morphisme de k-schémas, alors le morphisme de foncteurs $F_\phi : F_Y \to F_X$ correspondant à ϕ induit par passage à la limite inductive une application $\phi^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$. Cette application est continue si on munit Y^{an} et X^{an} de la topologie de Berkovich.

Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On appelle *métrique* sur L toute famille $\varphi := (|\cdot|_\varphi(x))_{x\in X^{\mathrm{an}}}$, où chaque $|\cdot|_\varphi(x)$ est une norme sur $L(x) := L \otimes_{\mathcal{O}_X} \widehat{\kappa}(x)$. On dit que la métrique φ est continue si, pour tout sous-schéma ouvert U de X et toute section $s \in H^0(U, L)$, la fonction

$$|s|_\varphi : (x \in U^{\mathrm{an}}) \longmapsto |s(x)|_\varphi(x)$$

est continue sur U^{an}. Dans le cas où le morphisme canonique de schémas $X \to \operatorname{Spec} k$ est propre, l'espace topologique X^{an} est compact. En particulier, pour toute section $s \in H^0(X, L)$, on a

$$\|s\|_{\varphi,\sup} := \sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} |s|_\varphi(x) < +\infty,$$

et $\|\cdot\|_{\varphi,\sup}$ définit une norme sur $H^0(X, L)$, qui est ultramétrique lorsque $|\cdot|$ est non-archimédienne.

Si φ et φ' sont deux métriques sur le même $\mathcal{O}_X$-module inversible L, alors il existe une fonction strictement positive λ sur X^{an} tel que

$$\forall\, x \in X^{\mathrm{an}}, \quad |\cdot|_\varphi(x) = \lambda(x)|\cdot|_{\varphi'}(x).$$

On définit la *distance entre φ et φ'* comme

$$d(\varphi, \varphi') := \sup_{x\in X^{\mathrm{an}}} |\ln \lambda(x)|.$$

Si X est propre sur $\operatorname{Spec} k$ et si les métriques φ et φ' sont continues, la distance entre φ et φ' est finie.

Similairement, si V est un espace vectoriel de rang fini sur k et si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux norms sur V, on définit

$$d(\|\cdot\|,\|\cdot\|') := \sup_{0\neq s\in V} \big|\ln\|s\| - \ln\|s\|'\big|.$$

Soit L un $\mathcal{O}_X$-module inversible, muni d'une métrique φ. Soit $i : Y \to X$ un morphisme de schémas. Si y est un point de Y^{an} et si x est l'image de y dans X^{an} par i^{an}, alors $(\widehat{\kappa}(y),|\cdot|_y)$ est une extension valuée de $(\widehat{\kappa}(x),|\cdot|_x)$, où $x = i^{\mathrm{an}}(y)$. En particulier, la norme $|\cdot|_\varphi(x)$ sur $L(x) = L\otimes_{\mathcal{O}_X}\widehat{\kappa}(x)$ induit par extension de corps une norme sur

$$i^*(L)(y) = i^*(L)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\kappa}(y) \cong L(x)\otimes_{\widehat{\kappa}(x)}\widehat{\kappa}(y).$$

On obtient ainsi une métrique sur $i^*(L)$ que l'on note $i^*(\varphi)$ appelé la *tirée en arrière* de φ par le morphisme i. Cette métrique est continue lorsque φ est continue.

Exemple 4.1. — Soit $(V,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de rang fini sur k. Soit $\mathcal{O}_V(1)$ le faisceau inversible universel de l'espace projectif $\pi : \mathbb{P}(V) \to \operatorname{Spec} k$. Rappelons que l'on a un homomorphisme surjectif universel de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$-modules $f : \pi^*(V) \to \mathcal{O}_V(1)$, et tout k-point $\rho : \operatorname{Spec} A \to \mathbb{P}(V)$ de $\mathbb{P}(V)$ à valeurs dans une k-algèbre A correspond à un A-module quotient projectif de rang un de $V\otimes_k A$, donné par

$$\rho^*(f) : \rho^*(\pi^*(V)) \to \rho^*(\mathcal{O}_V(1)).$$

En particulier, si x est un point de X^{an}, alors la norme $\|\cdot\|$ sur V induit par extension de scalaire une norme $\|\cdot\|_{\widehat{\kappa}(x)}$ sur $V\otimes_k\widehat{\kappa}(x)$ puis par quotient une norme sur $\mathcal{O}_V(1)(x)$. On obtient ainsi une métrique continue sur $\mathcal{O}_V(1)$, appelée *métrique de Fubini-Study* associée à $\|\cdot\|$, notée $|\cdot|_{\mathrm{FS}}$.

On peut montrer que, si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur le même espace vectoriel V qui est de rang fini sur k, alors on a

$$d(|\cdot|_{\mathrm{FS}},|\cdot|'_{\mathrm{FS}}) \leqslant d(\|\cdot\|,\|\cdot\|'),$$

l'égalité est satisfaite si $|\cdot|$ est archimédienne (par le théorème de Hahn-Banach) ou si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont toutes ultramétriques.

Dans le cas où $|\cdot|$ est une valeur absolue non-archimédienne et non-triviale, une autre façon d'obtenir une métrique continue consiste à construire la métrique à partir d'un modèle entier. Soit $\mathfrak{o}_k$ l'anneau de valuation de $(k,|\cdot|)$. Si X est un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$ et L est un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On entend par *modèle* de (X,L) la donnée d'un $\mathfrak{o}_k$-schéma projectif et plat $\mathfrak{X}$ et un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible $\mathfrak{L}$ tels que la fibre générique de $\mathfrak{X}$ est isomorphe à X et que la restriction de $\mathfrak{L}$ à la fibre générique est isomorphe à L. Si x est un point de X^{an}, on désigne par $\mathfrak{o}_x$ l'anneau de valuation de $\widehat{\kappa}(x)$. Par le critère valuatif de propreté, le morphisme canonique $p_x : \operatorname{Spec}\widehat{\kappa}(x) \to X$ s'étend de façon unique en un morphisme $\mathscr{P}_x : \operatorname{Spec} \mathfrak{o}_x \to \mathfrak{X}$. La tirée en arrière $\mathscr{P}_x^*(\mathfrak{L})$ induit une norme $|\cdot|_{\mathfrak{L}}(x)$ sur $L(x)$ telle que

$$\forall\, s \in L(x), \quad |s|_{\mathfrak{L}}(x) = \inf\{|a|_x \mid a \in \widehat{\kappa}(x)^{\times},\ a^{-1}s \in \mathscr{P}_x^*(\mathfrak{L})\}.$$

On peut montrer que $|\cdot|_{\mathfrak{L}}$ définit une métrique continue sur L, appelée la *métrique induite par le modèle* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$.

Soient X un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$ et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible ample, et φ une métrique continue sur L. Pour tout $x \in X^{\mathrm{an}}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $L^{\otimes n}(x)$ sur $\widehat{\kappa}(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de $L(x)$. Ainsi la norme $|\cdot|_{\varphi}(x)$ induit par puissance tensorielle une norme $|\cdot|_{n\varphi}(x)$ sur $L^{\otimes n}(x)$ telle que, pour tout élément $\ell \in L(x)$, on ait

$$|\ell^{\otimes n}|_{n\varphi}(x) = |\ell|_{\varphi}(x)^n. \tag{3}$$

Ainsi on obtient une métrique $n\varphi$ sur $L^{\otimes n}$, qui est continue. On munit l'espace vectoriel $H^0(X, L^{\otimes n})$ de la norme $\|\cdot\|_{n\varphi,\sup}$.

Pour simplicité, on suppose que s est une section globale dans $H^0(X, L)$ qui induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes(n-1)}) \xrightarrow{\cdot s} H^0(X, L^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(Y, i^*(L^{\otimes n})) \longrightarrow 0,$$

où n est un entier positif, Y est le sous-schéma fermé de X défini par l'annulation de s, et $i : Y \to X$ est le morphisme d'inclusion. On a un isomorphisme canonique entre des espaces vectoriels de rang un sur k :

$$\operatorname{dét}(H^0(X, L^{\otimes(n-1)})) \otimes \operatorname{dét}(H^0(Y, i^*(L^{\otimes n}))) \cong \operatorname{dét}(H^0(X, L^{\otimes n})). \tag{4}$$

Cependant, si on munit ces espaces de déterminant des normes

$$\|\cdot\|_{(n-1)\varphi,\sup,\text{dét}},\ \|\cdot\|_{n\varphi,\sup,\text{dét}} \text{ et } \|\cdot\|_{i^*(n\varphi),\sup,\text{dét}},$$

respectivement, l'isomorphisme au-dessus n'est pas une isométrie en général. Cependant, si la métrique φ est semi-positive, le défaut de isométrie peut être décrit par des invariants de la métrique.

Définition 4.2. — Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit φ_n la métrique continue sur L dont la $n^{\text{ème}}$ puissance symétrique s'identifie à la tirée en arrière de la métrique de Fubini-Study $|\cdot|_{n\varphi,\sup,\mathrm{FS}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(H^0(X,L^{\otimes n}))}(1)$ par l'immersion fermée $X \to \mathbb{P}(H^0(X, L^{\otimes n}))$. On dit que la métrique φ est *semi-positive* si

$$\lim_{n\to+\infty} d(\varphi_n, \varphi) = 0.$$

Dans le cas où la valeur absolue $|\cdot|$ est archimédienne, φ est semi-positive si et seulement si elle est pluri-sous-harmonique (voir [**32**]) ; dans le cas où la valeur absolue $|\cdot|$ est non-archimédienne et non-triviale, φ est semi-positive si et seulement si elle est limite uniforme d'une suite de métriques induites par modèles amples sur l'anneau de valuation de $(k, |\cdot|)$ (voir [**15**, §3]). Cette condition est aussi équivalente à la pluri-sous-harmonicité non-archimédienne (voir [**23**, §6] et [**10**, §6.8]).

Si la métrique φ est semi-positive, le défaut d'isométrie de l'isomorphisme (4) peut être estimé en fonction de la mesure de Monge-Ampère. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\dim_k(H^0(X,L^{\otimes n}))}\ln\frac{\|\cdot\|_{n\varphi,\sup,\text{dét}}}{\|\cdot\|_{(n-1)\varphi,\sup,\text{dét}}\otimes\|\cdot\|_{i^*(n\varphi),\sup,\text{dét}}}\\ =-\int_{X^{\text{an}}}\ln|s|\,c_1(\varphi)^{\wedge d}+O(\ln(n)).\end{aligned}\tag{5}$$

Dans le cas où $|\cdot|$ est archimédien, la mesure $c_1(\varphi)^{\wedge d}$ est défini comme la puissance extérieure du courant. Dans le car non-archimédienne, cette mesure est définie au sens de [**9**].

Similairement au cas géométrique, la méthode combinatoire peut aussi être appliquée aux systèmes linéaires gradués normés. Soient X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} k$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur X. Rappelons que $V_\bullet=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}V_nT^n$ est une sous-k-algèbre graduée de $K[T]=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}KT^n$, où K désigne le corps des fonctions rationnelles sur k. On suppose que chaque espace vectoriel V_n est muni d'une norme $\|\cdot\|_n$ de sorte que, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, et tout $(s_m,s_n)\in V_m\times V_n$, on ait

$$\|s_m\cdot s_n\|_{n+m}\leqslant\|s_m\|_m\cdot\|s_n\|_n.\tag{6}$$

Comme dans le cas géométrique, on suppose l'existence d'un point régulier $x\in X(k)$ et on fixe un système de paramètre $\{z_1,\ldots,z_d\}$ dans l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{X,x}$. Ainsi l'homomorphisme de l'anneau des séries formelles $k[\![T_1,\ldots,T_d]\!]$ dans le complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ qui envoie T_i sur z_i est un isomorphisme.

Soit $v:K\to\mathbb{Z}^d\cup\{+\infty\}$ la valuation comme dans le paragraphe précédent. Cette valuation définit une $\mathbb{Z}^d$-filtration sur K (comme espace vectoriel sur k) : pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}^d$, soit

$$\mathcal{F}^\alpha(K)=\{s\in K\,|\,v(s)\geqslant\alpha\}.$$

Si V est un sous-espace vectoriel de rang fini de K, alors cette filtration induit par restriction une $\mathbb{Z}^d$-filtration sur V que l'on note encore comme $\mathcal{F}$ par abus de notation. On a vu que la somme directe des sous-quotients

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}\operatorname{gr}^\alpha(V_n)$$

forme une k-algèbre graduée qui est isomorphe à l'algèbre du semi-groupe $\Gamma(V_\bullet)$. Dans la suite, on identifie ces deux k-algèbres graduées. En outre, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $\alpha\in\mathbb{Z}^d$, la norme $\|\cdot\|_n$ sur V_n induit par passage au sous-quotient un norme $\|\cdot\|_{(n,\alpha),\text{sq}}$ sur $\operatorname{sq}^\alpha(V_n)$. On déduit de l'hypothèse (6) que, si

γ et γ' sont deux éléments de $\Gamma(V_\bullet)$, alors

$$\|e^{\gamma+\gamma'}\|_{\gamma+\gamma',\mathrm{sq}} \leqslant \|e^{\gamma}\|_{\gamma,\mathrm{sq}} \cdot \|e^{\gamma'}\|_{\gamma',\mathrm{sq}}.$$

Les normes déterminants $\|\cdot\|_{n,\mathrm{dét}}$ sont naturellement liées à ces normes sous-quotients. En effet, si on identifie V_n à

$$\bigotimes_{\alpha\in\Gamma_n} \mathrm{gr}^{\alpha}(V_n),$$

on a

$$\frac{1}{\mathrm{rg}_k(V_n)}\left|\ln\frac{\|\cdot\|_{n,\mathrm{dét}}}{\bigoplus_{\alpha\in\Gamma_n}\|\cdot\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}}\right| \leqslant \ln(\mathrm{rg}_k(V_n)),$$

où $\Gamma_n = \{\alpha\in\mathbb{Z}^d \,|\, (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)\}$.

En utilisant la méthode dans [**5**] (voir aussi [**34, 14**]), on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.3. — *Soient X un schéma projectif et intègre de dimension $d \geqslant 1$ sur* $\operatorname{Spec} k$ *qui possède un point rationnel régulier, et $V_\bullet$ un système linéaire gradué sur V. On suppose que*

$$\sup_{\substack{n\geqslant 1,\,\alpha\in\mathbb{Z}^d\\ (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)}} \Big(-\frac{1}{n}\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}\Big) < +\infty.$$

Alors la suite de mesures de probabilité

$$\frac{1}{\mathrm{rg}_k(V_n)}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}^d\\ (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet)}} \delta_{-\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}}, \quad n\in\mathbb{N}(V_\bullet)$$

converge faiblement vers une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$, où δ_x désigne la mesure de Dirac en x. En outre, si on désigne par G la fonction concave sur $\Delta(V_\bullet)$ dont le graphe est le bord supérieure de l'enveloppe convexe des points

$$\frac{1}{n}((n,\alpha), -\ln\|e^{(n,\alpha)}\|_{(n,\alpha),\mathrm{sq}}), \quad (n,\alpha)\in\Gamma(V_\bullet),\ n\geqslant 1,$$

alors la mesure de probabilité limite s'identifie à l'image directe de la mesure uniforme sur $\Delta(V_\bullet)$ par la fonction G.

5. Cas arithmétique

Dans ce paragraphe, on suppose que k est un corps de nombres. On désigne par Σ_k l'ensemble des places de k. Pour tout $\sigma\in\Sigma_k$, soit $|\cdot|_\sigma$ la valeur absolue sur k qui prolonge la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ (dans ce cas-là la place σ est dite *archimédienne*) ou la valeur absolue p-adique pour certain nombre premier p, où la valeur absolue de p est $1/p$ (dans ce cas-là la place σ est dite *non-archimédienne*). On désigne par K_σ le complété de K par rapport à la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$, sur lequel la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$ s'étend de façon unique.

On appelle *fibré vectoriel adélique* sur $\operatorname{Spec} k$ la donnée $\overline{V}$ d'un espace vectoriel de rang fini V sur k et une famille de norme $(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}$, où chaque $\|\cdot\|_\sigma$ est une norme sur $V_\sigma := V \otimes_k k_\sigma$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) si la place σ est non-archimédienne, alors la norme $\|\cdot\|_\sigma$ est ultramétrique ;

(b) il existe une base $(e_i)_{i=1}^r$ de V sur k telle que, pour toute sauf un nombre fini de places $\sigma \in \Sigma_k$, on a

$$\forall\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\in k_\sigma,\quad \|\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_r e_r\|_\sigma = \max(|\lambda_1|_\sigma,\ldots,|\lambda_r|_\sigma).$$

On renvoie les lecteurs dans **[19]** pour une présentation détaillée de la théorie des fibrés vectoriels adéliques, voir aussi **[3]** pour le cadre classique de fibrés vectoriels hermitiens sur l'anneau des entiers dans un corps de nombres.

Soit $\overline{V}$ un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$. Le rang de V sur k est appelé le *rang* de $\overline{V}$. Si $\overline{V}$ est de rang 1, on définit son *degré d'Arakelov* comme

$$\widehat{\deg}(\overline{V}) = -\sum_{\sigma\in\Sigma_k}[k_\sigma:\mathbb{Q}_\sigma]\ln\|s\|_\sigma,$$

où s est un élément non-nul de V. Rappelons que la formule du produit

$$\forall\, a\in k^\times,\quad \sum_{\sigma\in\Sigma_k}\ln|s|_\sigma = 0$$

montre que cette définition ne dépend pas du choix de s. Plus généralement, si $\overline{V} = (V,(\|\cdot\|_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}))$ est un fibré vectoriel adélique de rang quelconque, on désigne par $\operatorname{dét}(\overline{V})$ la donnée $(\operatorname{dét}(V),(\|\cdot\|_{\sigma,\operatorname{dét}})_{\sigma\in\Sigma_k})$ et on définit le degré d'Arakelov de $\overline{V}$ comme $\widehat{\deg}(\operatorname{dét}(\overline{V}))$.

Soit $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$ un schéma projectif sur $\operatorname{Spec} k$. On appelle *fibré inversible adélique* la donnée $\overline{L}$ d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible et une famille $(\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k}$ de métriques, où chaque φ_σ est une métrique continue sur L_σ, la tirée en arrière de L par le changement de base $X_{k_\sigma}\to X$, qui satisfait à la condition suivante : il existe un modèle entier $(\mathscr{X},\mathscr{L})$ de (X,L) tel que, pour toute sauf un nombre fini de places non-archimédienne σ, la métrique φ_σ soit induite par le modèle $(\mathscr{X}_{\mathfrak{o}_{k_\sigma}},\mathscr{L}_{\mathfrak{o}_{k_\sigma}})$ de (X_σ,L_σ), où $\mathfrak{o}_{k_\sigma}$ est l'anneau de valuation de k_σ. Rappelons qu'un modèle entier de (X,L) est par définition la donnée $(\mathscr{X},\mathscr{L})$ un schéma projectif et plat $\mathscr{X}$ sur l'anneau des entiers algébriques dans k dont la fibre générique est isomorphe à X, ainsi qu'un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{L}$ dont la restriction à la fibre générique est isomorphe à L. Il s'avère que

$$\pi_*(\overline{L}) := (H^0(X,L),(\|\cdot\|_{\varphi_\sigma,\sup})_{\sigma\in\Sigma_k})$$

est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} k$.

Si $\overline{L}=(L,(\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k})$ est un fibré inversible adélique sur X, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on désigne par $\overline{L}^{\otimes n}$ le fibré inversible adélique $(L^{\otimes n},(n\varphi_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k})$, où $n\varphi_\sigma$ désigne la $n^{\text{ième}}$ puissance tensorielle de φ_σ, définie dans la formule (3).

Comme le degré d'Arakelov peut être calculé par une somme par rapport aux places de k, on déduit de la version métrique du théorème de Hilbert-Samuel le résultat suivant.

Théorème 5.1. — *Soient $\pi:X\rightarrow\operatorname{Spec}k$ un schéma projectif de dimension d sur $\operatorname{Spec}k$ et $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur X. On suppose que L est ample et que les métriques φ_σ sont semi-positives, alors on a*

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}\frac{\widehat{\deg}(\pi_*(\overline{L}^{\otimes n}))}{n^{d+1}/(d+1)!}=\widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{L})^{(d+1)}).$$

Dans le cas où L n'est pas ample, on applique le théorème 4.3 au cas où la valeur absolue est triviale. On désigne par $|\cdot|_0$ la valeur absolue triviale sur k. Si $\overline{V}$ est un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec}k$, on définit une norme $\|\cdot\|_{\overline{V}}$ comme suit (où on considère la valeur absolue triviale sur k). Pour tout $s\in V\setminus\{0\}$, soit $\widehat{\deg}(s)$ le nombre

$$-\sum_{\sigma\in\Sigma_k}[k_\sigma:\mathbb{Q}_\sigma]\ln\|s\|_\sigma,$$

appelé le *degré d'Arakelov* de s. Pour tout $s\in V$, soit $\|s\|_{\overline{V}}$ l'infimum de l'ensemble des $\lambda>0$ tels que s peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans k des vecteurs non-nuls de V de degré d'Arakelov au moins $-\ln(\lambda)$. Comme $|\cdot|_\sigma$ est la valeur absolue triviale, la restriction de $\|\cdot\|_{\overline{V}}$ à $V\setminus\{0\}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, dont le cardinal ne dépasse pas le rang de V sur k. Ces valeurs sont précisément les minima successifs au sens de Thunder [**33**]. Ces minima sont naturellement liés aux invariants arithmétiques de $\overline{V}$ via le lemme de Siegel (voir [**20**]). Notamment on a

$$\frac{1}{\operatorname{rg}_k(V)}\left|\widehat{\deg}(\overline{V})+\int_{\mathbb{R}}t\,\mathrm{d}\operatorname{rg}_k(B(V,e^{-t}))\right|=O(\ln(\operatorname{rg}_k(V))).\tag{7}$$

En outre, si on désigne par $\widehat{h}^0(\overline{V})$ le logarithme du nombre des éléments $s\in V$ tels que $\sup_{\sigma\in\Sigma_k}\|s\|_\sigma\leqslant 1$, alors on a

$$\frac{1}{\operatorname{rg}_k(V)}\left|\widehat{\deg}(\overline{V})+\int_0^{+\infty}t\,\mathrm{d}\operatorname{rg}_k(B(V,e^{-t}))\right|=O(\ln(\operatorname{rg}_k(V))).\tag{8}$$

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur un k-schéma projectif et intègre X. On suppose que X possède un point rationnel régulier. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $\overline{V}_n:=\pi_*(\overline{L}^{\otimes n})$. Il s'avère que la suite de normes $(\|\cdot\|_{\overline{V}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la condition de sous-multiplicativité (6). Ainsi on déduit du théorème 4.3 le résultat suivant.

Théorème 5.2. — *Soient* $\pi : X \to \operatorname{Spec} k$ *un schéma projectif et intègre, de dimension* d *sur* $\operatorname{Spec} k$ *et* $\overline{L}$ *un fibré inversible adélique sur* X *tel que* L *soit gros. Il existe alors une fonction concave* G *sur le corps de Newton-Okounkov* $\Delta(L)$ *de l'algèbre graduée* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}(\overline{V}_n)}{n^{d+1}/(d+1)!} = \int_{\Delta(L)} G(x)\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\widehat{h}^0(\overline{V}_n)}{n^{(d+1)}/(d+1)!} = \int_{\Delta(L)} \max(G(x),0)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Références

[1] Abbes A., Bouche T., «Théorème de Hilbert-Samuel “arithmétique”», *Annales de l'Institut Fourier* **45** (1995), no.2, 375-401.

[2] Berman R., Freixas i Montplet G., «An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for singular hermitian line bundles and cusp forms», *Compositio Mathematica* **150** (2014), no.10, 1703-1728.

[3] Bost J.-B., «Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz)», Exposé 795 au séminaire Bourbaki, *Astérisque* **237** (1996), 115-161.

[4] Boucksom S., «Corps d'Okounkov (d'après Okounkov et Kaveh-Khovanskii)», Exposé 1059 au séminaire Bourbaki, *Astérisque* **361** (2014), 1-41.

[5] Boucksom S., Chen H., «Okounkov bodies of filtered linear series», *Compositio Mathematica* **147** (2011), no.4, 1205-1229.

[6] Bourbaki N., *Éléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitres 8-9*, Masson, Paris, 1983.

[7] Burgos Gil J. I., Philippon P., Sombra M., «Heights of toric varieties, entropy and integration over polytopes», *Geometric science of information*, 286–295, Lecture Notes in Comput. Sci. 9389, Springer, Cham, 2015.

[8] Burgos Gil J. I., Philippon P., Sombra M.«Successive minima of toric height functions», *Annales de l'Institut Fourier* **65** (2015), no.5, 2145-2197.

[9] Chambert-Loir A., «Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **595** (2006), 215-235.

[10] Chambert-Loir A., Ducros A., «Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich», `arXiv:1204.6277`.

[11] Chen H., «Convergence des polygones de Harder-Narasimhan», *Mémoires de la Société Mathématique de France. Nouvelle Série* **120** (2010), 1-116.

[12] Chen H., «Arithmetic Fujita approximation», *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **43** (2010), no.4, 555-578.

[13] Chen H., «Okounkov bodies : an approach of function field arithmetic», prépublication, 2017.

[14] Chen H., Maclean C., «Distribution of logarithmic spectra of the equilibrium energy», *Manuscripta Mathematica* **146** (2015), no.3-4, 365-394.

[15] Chen H., Moriwaki A., «Extension property of semipositive invertible sheaves over a non-archimedean field», *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie V.*, à paraître.

[16] Cutkosky S. D., «Zariski decomposition of divisors on algebraic varieties», *Duke Mathematical Journal* **53** (1986), no.1, 149-156.

[17] Frexias i Montplet G., «An arithmetic Hilbert-Samuel theorem for pointed stable curves», *Journal of the European Mathematical Society* **14** (2012), no.2, 321-351.

[18] Fujita T., «Approximating Zariski decomposition of big line bundles», *Kodai Mathematical Journal* **17** (1994), no.1, 1-3.

[19] Gaudron É., *Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global*, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* **119** (2008), 21-95.

[20] Gaudron É., *Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés*, *Manuscripta Mathematica* **130** (2009), no.2, 159-182.

[21] Gillet H., Soulé C., «An arithmetic Riemann-Roch theorem», *Inventiones Mathematicae* **110** (1992), no.3, 473-543.

[22] Grothendieck A., «Éléments de géométrie algébrique, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné», *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **4, 8, 11, 17, 24, 28, 32**.

[23] Gubler W., Künnemann K., «Positivity properties of metrics and delta-forms», *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, à paraître.

[24] Kaveh K., Khovanskiĭ A. G., «Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory», *Annals of Mathematics. Second Series* **176** (2012), no.2, 925-978.

[25] Khovanskiĭ A. G., «The Newton polytope, the Hilbert polynomial and sum of finite sets», *Functional Analysis and its Applications* **26** (1992), no.4, 276-281.

[26] Lazarsfeld R., Mustaţă M., «Convex bodies associated to linear series», *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **42** (2009), no.5, 783-835.

[27] Okounkov A., «Brunn-Minkowski inequality for multiplicities», *Inventiones Mathematicae* **125** (1996), no.3, 405-411.

[28] Moriwaki A., «Continuity of volumes on arithmetic varieties», *Journal of Algebraic Geometry* **18** (2009), no.3, 407-457.

[29] Randriambololona H. «Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les faisceaux cohérents», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **590** (2006), 67-88.

[30] Soulé C., Abramovich D., Burnol J.-F., Kramer J. *Lectures on Arakelov geometry*, volume 33 of Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge Press, 1992.

[31] Takagi S., «Fujita's approximation theorem in positive characteristics», *Journal of Mathematics of Kyoto University* **47** (2007), no.1, 179-202.

[32] Tian G., «On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds», *Journal of Differential Geometry* **32** (1990), no.1, 99-130.

[33] Thunder J.L.«An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma», *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* **475** (1996), 167-185.

[34] Witt Nyström D., «Transforming metrics on a line bundle to the Okounkov body», *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* **47** (2014), no.6, 1111-1161.

[35] Yuan X., «Big line bundles over arithmetic varieties», *Inventiones Mathematicae* **173** (2008), no.3, 603-649.

[36] Yuan X., «On volumes of arithmetic line bundles», *Compositio Mathematica* **145** (2009), no.6, 1447-1464.

[37] Yuan X., «Volumes of arithmetic Okounkov bodies», *Mathematische Zeitschrift* **280** (2015), no.3-4, 1075-1084.

---

11 juin 2017

Huayi Chen, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, Université Paris Diderot • *E-mail :* huayi.chen@imj-prg.fr
Url : webusers.imj-prg.fr/~huayi.chen/