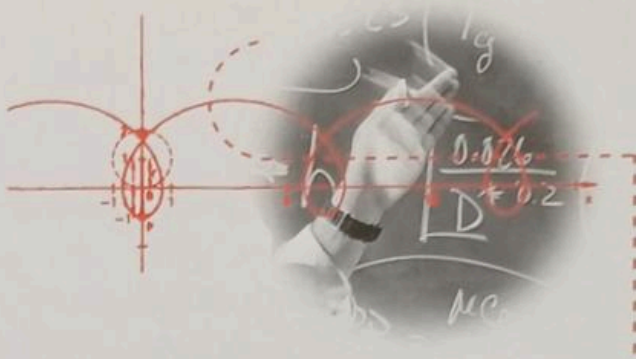
TEXAS INSTRUMENTS

Avril - Mai 99



Hypothèses 15 Lycée

Sommaire

Le calcul formel : utilité, difficultés

Réflexions de fond autour des problèmes de l'utilisation du calcul formel; deux chercheurs de mathématiques de l'INRIA, Bruno Salvy et Philippe Dumas répondent à nos questions.

La calcul symbolique, enfin à la portée de tous

Philippe Fortin enseigne les mathématiques en classes préparatoires à Pau. Après un rapide historique de l'évolution des outils de calcul formel il pose quelques questions qui dérangent : "la calculatrice pour quoi faire?", "l'équité", "la formation des enseignants" et il indique des pistes pour y répondre.

La TI-89 en classe de 1ère S.T.L.Bio

Jacques Verdier professeur de mathématiques au lycée A. Varoquaux de Tomblaine (54) nous raconte deux séances d'utilisation de la TI-89 dans sa classe autour de l'étude d'une fonction du troisième degré. Il nous fait part de ses impressions et nous explique comment certaines réactions des élèves l'ont amené à changer de stratégie.

Et si on utilisait le théorème de Fermat pour montrer qu'un nombre n'est pas premier ?

André Guillemot, professeur de mathématiques au lycée E. Zola de Rennes (35) nous propose ici un exercice intéressant mettant en œuvre une méthode originale pour prouver qu'un nombre entier n'est pas premier.

Et si on enrichissait un peu notre TI-89 ?

Alain Pomirol, professeur de mathématiques au lycée J. Moulin à Langon (33) nous propose ici quelques fonctions présentes dans Derive mais pas dans la TI-89. Voilà une excellente occasion de faire avec les élèves un peu de programmation intéressante.

Quoi de neuf au B.O?

Le B.O. N°6 du 11 février 1999 revient une nouvelle fois sur "l'Utilisation des calculatrices électroniques" et précise :" ... La maîtrise de l'usage des calculatrices représente un objectif important pour la formation de l'ensemble des élèves car elle constitue un outil efficace dans le cadre de leurs études et dans la vie professionnelle, économique et sociale. ...". Voilà qui complète les instructions des BO précédents (juin et décembre 1997) qui exigeaient l'utilisation des calculatrices graphiques à partir de la classe de première et incitaient à la familiarisation des élèves avec les outils de calcul formel et symbolique.

Un numéro d'Hypothèses consacre presque exclusivement au calcul formel

Encore un numéro consacré au calcul formel, dites-vous ? Oui mais reconnaissons que l'enjeu est énorme. Les consignes officielles nous amènent à réfléchir de plus en plus à l'intégration des outils de calcul symbolique mais, confrontés dans nos classes, à la réalité quotidienne nous n'avons pas toujours le temps d'y penser. Hypothèses nous propose de rencontrer, au fil des pages, des chercheurs en mathématiques, un spécialiste du calcul formel, des enseignants de terrain, qui tous à leur façon essayeront de nous amener à construire notre propre idée. Forts de ces réflexions nous pourrons alors aller plus loin, ou même, si ce n'est déjà fait, faire comme nos collègues : essayer... Si le doute subsiste et si vous hésitez encore à vous lancer retenez les dates des 30, 31 août et 1er septembre 1999, où se dérouleront les troisièmes journées d'été (voir dernière page).

Le calcul formel : utilité, difficultés

Trois années après la sortie de la TI-92, première calculatrice symbolique, et surtout avec la mise sur le marché en septembre dernier de la TI-89, qui met le calcul formel à la portée de presque toutes les bourses, de nombreuses questions sur l'objet exact du calcul symbolique, sur sa manipulation, sur son intégration dans l'enseignement restent posées.

Nous sommes allés demander à Bruno Salvy et Philippe Dumas, chercheurs à l'Inria (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique), de nous donner leur avis de spécialistes du calcul formel sur des questions fondamentales qui nous sont fréquemment posées.

Hypothèses : peut-on donner une définition du Calcul Formel ?

BS/PhD : Le calcul formel consiste à donner des représentations finies exactes à des objets mathématiques, et à effectuer des opérations sur ces représentations. Il est complémentaire du calcul numérique qui ne traite que des nombres, de manière approchée. Il est donc proche de l'algèbre, en insistant sur l'effectivité. Les logiciels de calcul formel comme Maple ou Derive, qui est installé sur les TI-92 et TI-89, traitent des symboles à travers des règles de manipulation. Par exemple, la fonction logarithme est un symbole associé à des règles qui interviennent dans la dérivation, l'intégration, la transformation d'un logarithme de produit en une somme de logarithmes, etc. De même le nombre π est un symbole et non une variable informatique à laquelle serait associée une valeur décimale. À ce symbole sont liées certaines règles d'évaluation : l'expression $\sin(\pi)$ est remplacée par 0 ; par une demande explicite de l'utilisateur une valeur approchée est calculée à une certaine précision.

Hypothèses : quels sont les problèmes clés que pose le calcul formel ?

BS/PhD : le problème fondamental du calcul algébrique est la reconnaissance de 0. La plupart des algorithmes contiennent des tests où l'on doit reconnaître qu'une quantité est nulle (degré d'un polynôme, pivot de Gauss, division,...). En mathématiques, cette question est anodine. Elle devient cruciale en calcul formel et c'est pour cette raison que les calculs ne sont pas effectués comme "à la main". Pour garantir le résultat d'un calcul, il faut délimiter une classe d'expressions et un algorithme pour lesquels les tests à zéro sont calculables. Presque toujours, les systèmes se ramènent à des classes où 0 n'a qu'une représentation, comme les fractions rationnelles sous forme développée, ou la forme linéarisée des polynômes trigonométriques qui évite la relation $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ Le problème est encore accentué en présence de symboles que l'utilisateur imagine typés. Ainsi dans un calcul sur des coefficients binomiaux, l'utilisateur pense souvent que ses symboles désignent des entiers. Du point de vue mathématique, ces variables peuvent prendre presque toute valeur complexe. Les calculs s'interprètent alors dans un domaine plus grand que celui auquel pense l'utilisateur. À l'inverse il n'y a pas de raison que l'expression $\sin(n\pi)$ soit récrite en 0 si l'utilisateur n'en fait pas la demande explicite, car la lettre n est un symbole et non un entier. Gérer des hypothèses de type sur les variables pose des problèmes de reconnaissance de zéro encore plus difficiles. Au bout du compte, on bute sur des limites théoriques : d'après un théorème de Richardson, dès que les expressions manipulées contiennent π, ln(2), une variable, la valeur absolue, la fonction sinus ou cosinus, l'addition et la multiplication, l'égalité à zéro est indécidable, c'est-à-dire qu'il ne peut exister d'algorithme reconnaissant 0. En pratique, on utilise souvent une classe d'expressions plus large que celle-ci. La clé de la réussite du calcul consiste alors à se ramener à une classe d'expressions plus simple, où l'on sait le calcul possible.

Hypothèses : et quels sont les problèmes pour l'utilisateur ?

BS/PhD : la simplification est certainement le problème majeur que rencontrent les novices. C'est en grande partie le pendant du problème de la reconnaissance de 0. Il y aussi une méprise. La simplification n'est pas intrinsèque mais contextuelle ; elle ne prend sens qu'en fonction du but que s'est fixé l'utilisateur. Il est donc préférable de parler de transformations d'expressions. Par exemple, la forme $(x^2+x-1)^{1000}$ n'est ni plus simple ni plus compliquée que la forme développée du même polynôme. Elle est adaptée si l'on veut parler des racines de ce polynôme, mais pas si l'on veut disposer du coefficient de x^{1000}. Une expression algébrique n'admet pas de représentation unique et c'est à l'utilisateur de décider de la forme qui lui convient.

Pour l'exemple, de ce polynôme, ce pourrait être l'équation différentielle $(1+x+x^2)y' = 1000(1+2x)y$, dont on déduit la récurrence $(n+1)u_{n+1}+ nu_n+ (n-1)u_{n-1}=1000(u_n+2u_{n-1})$ qui permet de calculer rapidement les coefficients. Pour ces raisons de représentation, un calcul peut aboutir à une réponse qui paraît compliquée à l'utilisateur qui sait que son problème possède une réponse plus "simple": le système a adopté une représentation adaptée au calcul sur une classe qui contient la donnée du problème et aboutit à une réponse dans cette classe. Il reste à l'utilisateur à effectuer les transformations qui ramènent le résultat dans la classe qui l'intéresse. Par exemple la somme $\sum_{k=0}^{p} C_n^k \times C_n^{p-k}$ est évaluée par Maple à l'aide de la fonction Gamma d'Euler et de la fonction hypergéométrique 3F2. On peut alors utiliser des transformations pour se ramener au coefficient binomial promis par la formule de Vandermonde. Dans d'autres cas, il est vain de s'acharner à retrouver l'expression "comme dans le livre" : celle qui est fournie par le système permet de poursuivre les calculs. Le deuxième problème est la résolution. L'enseignement des mathématiques amène à penser qu'étant donnée une équation algébrique, différentielle ou autre, la résoudre est la voie royale pour traiter un problème. Il n'en est rien : les vrais problèmes n'admettent pas de solution explicite. Les problèmes de physique se modélisent souvent par des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on traite de manière qualitative pour prévoir le comportement du système étudié. Il est toujours possible d'obtenir des informations sans résoudre. Ainsi, il est facile de connaître des propriétés sur les racines d'une équation polynomiale (somme, produit, nombre de solutions dans un intervalle réel, localisation dans un intervalle d'extrémités rationnelles) sans la résoudre. Souvent ces informations sont suffisantes. L'utilisateur devrait donc se poser les questions suivantes : qu'est ce que résoudre ? que veut-on faire de l'éventuelle réponse obtenue ? ne peut-on y parvenir autrement ?

Hypothèses : à quoi sert un tel outil ?

BS/PhD : il sert énormément ! Le calcul formel peut jouer le rôle de "pipette" pour le mathématicien. L'expérimentation permet de développer l'intuition. Par exemple si l'on veut calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^k}\,dx$$

avec n et k des entiers qui assurent la convergence de cette intégrale, on voit tout de suite qu'il faut distinguer deux cas suivant que n et k ont la même parité ou sont de parités contraires. De plus la machine permet d'aborder des problèmes jusqu'alors inaccessibles par la lourdeur des calculs qu'ils entraînent; le champ d'expérimentation est donc beaucoup plus large. On peut même aborder des problèmes plus proches de la réalité ou des modèles plus complexes que les cas d'école usuellement traités, et ainsi se concentrer sur la nature profonde des phénomènes étudiés sans être handicapé par les difficultés de surface du calcul . Le calcul formel permet ainsi à l'expérimentation de prendre une plus grande place dans le travail du mathématicien. Elle peut aussi devenir le levier d'un nouveau type d'apprentissage. Les exercices proposés n'ont plus à être truqués afin d'obtenir une solution dont l'expression est de petite taille. La contrainte pour l'enseignant est de prévoir une classe d'expression contenant les solutions en fonction de la classe des données de l'exercice. Le calcul symbolique est lié aux mathématiques de manière interactive. En effet le calcul formel demande que les mathématiques deviennent concrètes ; l'existence d'un objet doit se traduire par un procédé effectif de construction. Ceci amène à s'interroger à la fois sur la faisabilité et sur la complexité des calculs que l'on veut effectuer. Par exemple un logiciel de calcul formel ne passe pas par la décomposition en éléments simples pour calculer une primitive de fraction rationnelle, parce que cela suppose de résoudre exactement une équation algébrique. Le calcul formel amène donc à revoir les résultats mathématiques. Ainsi il fournit une aide importante à la découverte et à la compréhension des mathématiques. C'est cé pour quoi il a été créé.

Le calcul symbolique enfin à la portée de tous

Moins d'une vingtaine d'années après le début de la diffusion massive des premières calculatrices scientifiques, il est possible de trouver sur le marché des calculatrices graphiques formelles aux caractéristiques sans précédent. Il ne fait déjà pratiquement aucun doute que nous allons vivre dans les prochaines années une évolution importante dans notre façon d'enseigner les mathématiques. C'était de toutes façons prévisible, mais l'arrivée de ce type d'outils ne pourra qu'accélérer ce processus. Si elle est pour certains très positive, cette généralisation de l'utilisation du calcul formel suscite néanmoins de nombreuses interrogations. Avant d'aller plus loin, nous allons commencer par un rapide retour sur l'évolution que nous avons connue ces dernières années, puis par une analyse des principales raisons de l'échec relatif de l'introduction de l'utilisation pédagogique des ordinateurs au lycée. Cela semble nécessaire pour mieux définir les caractéristiques que devrait posséder un outil individuel de calcul formel. Il reste ensuite à aborder les questions relatives à l'égalité des chances, et les réponses à apporter dans ce domaine. Cela passe sans doute par une modification importante de la politique des établissements vis à vis de l'achat des calculatrices. Comme nous le verrons, les bénéfices que l'ont peut attendre de l'introduction de ces outils de calcul symbolique méritent que l'on se pose ce type de questions. Il sera par contre indispensable d'offrir une véritable formation aux enseignants dans ce domaine, quelques exemples très simples suffisent pour s'en convaincre.

Le début de l'aventure...

Il existe depuis de nombreuses années différents produits permettant de faire du calcul symbolique. Dans une certaine mesure, on peut dire que tout était déjà en place dans les années 80 avec l'arrivée de *muMath*, précurseur de *Derive*, et premier logiciel pouvant être utilisé sur les micro-ordinateurs de l'époque. Depuis, d'autres logiciels de plus en plus puissants ont également vu le jour grâce à la constante évolution des performances des micro-ordinateurs. C'est ainsi que l'on peut disposer aujourd'hui de logiciels très élaborés comme par exemple *Maple* ou *Mathematica*, capables de s'attaquer à des problèmes mathématiques de très haut niveau. Dès les années 80, plusieurs enseignants, travaillant en particulier dans le cadre des groupes d'informatique des IREM de différentes régions, ont commencé à entreprendre un travail de réflexion sur les conséquences que l'arrivée de produits de ce type pourrait avoir dans la pratique de notre enseignement: Il est vrai que ce travail a été un peu occulté par les différentes expérimentations sur d'autres outils informatiques destinés à l'enseignement des mathématiques, diffusés en particulier par le CNDP, comme par exemple les imagiciels, ou encore le logo. C'était l'époque des nano-réseaux... En France, tout s'est brusquement accéléré ces dernières années avec la décision d'inclure l'apprentissage des outils de calcul symbolique en classes préparatoires scientifiques. *Maple* et *Mathematica* ont définitivement remplacé *Pascal*. **De l'interdiction des calculatrices il y a quelques années, on est passé à l'obligation de maîtriser les outils de calcul formel.** A l'oral de certaines écoles d'ingénieurs (Arts et Métiers, Centrale...) le candidat peut être amené à utiliser l'un de ces outils, ou une calculatrice symbolique, pour résoudre l'exercice qui lui est proposé. Par ailleurs, ces calculatrices sont naturellement autorisées dans de nombreuses épreuves écrites.

Calcul symbolique sur ordinateur. Les raisons d'un échec.

Comme nous venons de le voir, les logiciels de calcul sont déjà largement répandus, et ils existent depuis plusieurs années. Pourquoi ne les rencontre-t-on pas davantage au niveau du lycée ? Il y a en fait plusieurs raisons...

- Les outils utilisés en classes préparatoires comme *Mathematica* ou *Maple* sont très puissants mais ils sont difficiles à maîtriser. Ils ne sont pas adaptés à l'utilisation au niveau du lycée.
- Il existe des logiciels plus simples à utiliser, comme *Derive*, mais l'accès à un ordinateur n'est absolument pas quelque chose d'anodin dans un lycée disposant d'un équipement standard.
- Utiliser ponctuellement un ordinateur, avec son matériel de rétroprojection, dans une salle de cours habituelle est également très difficile. Le matériel est fragile et coûteux. Le temps nécessaire à la mise en place est relativement important. Il faut aussi impérativement en assurer le retour dès la fin du cours...

- Même lorsqu'il est possible de se rendre dans une salle d'informatique à l'occasion d'un cours de mathématiques, c'est une démarche lourde, qui pose des problèmes de planifications, d'effectifs, ou encore de maîtrise des outils disponibles. De plus, le fait de quitter la salle de cours habituelle pour se rendre dans une salle spécialement aménagée en vue du travail sur ordinateur n'a aucun sens si l'on souhaite seulement utiliser un logiciel de calcul symbolique de façon ponctuelle à l'occasion d'un cours "classique".

Vers l'outil idéal ?

Ces contraintes sont connues depuis qu'a commencé l'introduction massive de l'informatique dans les lycées. Les enseignants consultés sur ces questions ont tiré les mêmes conclusions :

- **Pour être efficace, un outil de calcul formel doit être individuel. L'élève doit pouvoir l'utiliser en cours, mais aussi à son domicile[1].**
- **Son utilisation ne doit pas entraîner de perte de temps.** En particulier, il doit être toujours prêt à l'emploi, sans qu'il soit nécessaire d'attendre le chargement d'un système d'exploitation, puis d'un logiciel spécifique pour l'utiliser.
- Il doit être suffisamment robuste pour être utilisé sans problème en milieu scolaire.
- Il doit également être facile de l'utiliser avec un rétroprojecteur classique.
- Il doit être possible d'échanger facilement et rapidement des données entre les outils de chaque élève et du professeur.
- Son prix doit être aussi bas que possible, et ce matériel doit être facilement évolutif pour accompagner un étudiant pendant plusieurs années sans surcoût inutile.
- Pour mieux "rentabiliser" son utilisation dans un établissement, ce matériel doit également être polyvalent. On doit par exemple pouvoir envisager de l'utiliser aussi dans le cadre d'expériences en sciences physiques, ou en biologie. Concrètement, cela signifie qu'il doit être possible de le raccorder à un système de capteurs.

On commence aujourd'hui à trouver sur le marché des calculatrices conçues pour répondre à ces exigences. Dans le domaine du calcul symbolique, le niveau de performances de certains modèles est remarquable. On peut en effet disposer d'une puissance de calcul très importante, comparable à celle qui était jusque ici réservée à des logiciels fonctionnant sur des ordinateurs de bureau. Certains modèles offrent également la possibilité d'écrire des programmes de calcul symbolique, ce qui permet d'ajouter les fonctionnalités éventuellement absentes dans tel ou tel domaine. De plus, sur certaines calculatrices évoluées, toute la mémoire contenant le code des fonctions internes de la calculatrice (interface, algorithmes de résolution d'équations, de calcul de primitives...), est en technologie Flash. On peut ainsi disposer d'une machine aux possibilités différentes par une simple mise à jour depuis un ordinateur, sans avoir besoin de racheter une nouvelle calculatrice. Pour faciliter l'utilisation devant la classe, les calculatrices destinées aux enseignants disposent d'un connecteur. Celui-ci permet de relier une tablette, utilisable sur un rétroprojecteur ordinaire, et d'un coût considérablement plus faible que celui d'une tablette destinée à un ordinateur. La communication de machine à machine est immédiate et il est également possible de connecter certains modèles de calculatrices à des systèmes de mesures (température, tension, capteurs ultra-son, pH...) ou encore de communiquer avec un ordinateur. A l'exception du prix, que certains jugent encore excessif, on peut donc considérer que l'on peut disposer dès aujourd'hui de calculatrices répondant à la quasi-totalité des contraintes que nous évoquions précédemment. Naturellement, toutes les calculatrices graphiques formelles présentes sur le marché n'offrent pas encore l'ensemble de ces possibilités. Il existe de très grandes différences entre le niveau de performances des unes et des autres. On peut cependant raisonnablement penser que la situation actuelle va progressivement aller dans le sens d'une homogénéisation des performances entre les produits proposés par les différents constructeurs, ce qui facilitera la banalisation définitive de l'utilisation des outils de ce type dans notre enseignement.

[1] Cela a été clairement mis en évidence lors d'une expérimentation à grande échelle de *Derive* en Autriche. De nombreux établissements ont été dotés de ce produit. En particulier, certaines classes ont également reçu des micro-ordinateurs portables de format A5 que les élèves pouvaient conserver après les cours. Il a été tout de suite possible de vérifier.

La calculatrice en classe... mais pour quoi faire ?

Une calculatrice symbolique ne sert pas seulement à faire quelques calculs isolés, c'est un outil facilitant l'enseignement des mathématiques. Plusieurs expérimentations ont été menées, à l'initiative du ministère de l'Éducation Nationale, de certains IREM, d'inspecteurs pédagogiques, ou encore d'enseignants particulièrement motivés. Il faut bien préciser que ces expérimentations ont porté sur des classes ou des groupes d'élèves équipés de façon homogène. Cette homogénéité de l'équipement est une condition indispensable. Prenons par exemple le cas d'un enseignant désireux de commencer par une étude expérimentale de la dérivation, sous deux aspects : graphique (corde, tangente) et symbolique (notion intuitive de développement limité, par le biais du calcul d'expressions du type $f(a+h)$ pour quelques fonctions polynomiales). Si les élèves ne sont pas tous équipés de modèles similaires, il devra immanquablement répondre aux multiples questions concernant la façon de construire une courbe ou encore de faire un zoom sur 8 modèles différents de calculatrices. De plus, seuls deux ou trois élèves pourront effectivement faire sur leur calculatrice le calcul formel demandé. Il est vrai qu'à défaut d'un équipement de ce type, le professeur peut encore illustrer certaines parties du cours en utilisant une machine rétroprojetable. Cependant, dans ce cas l'élève sera seulement spectateur, alors qu'il serait possible d'aller beaucoup plus loin si les élèves pouvaient manipuler eux-mêmes. Nous venons d'évoquer rapidement l'exemple de l'introduction d'une notion nouvelle à l'aide d'une "démarche expérimentale", mais il y a bien d'autres façons de concevoir l'utilisation pédagogique d'une calculatrice. On peut par exemple citer le travail d'apprentissage de la méthode du pivot de Gauss, étudiée en classe de première. Avec une calculatrice dotée de possibilités de calcul symbolique, l'élève va pouvoir se concentrer sur ce qui fait la nouveauté du cours, c'est à dire sur la recherche de combinaisons permettant de simplifier les équations du système. On peut naturellement tout faire à la main, mais deux problèmes vont venir gêner l'apprentissage, surtout chez les élèves qui sont déjà un peu en difficulté. D'une part, un élève va passer beaucoup plus de temps à effectuer les opérations qu'à réfléchir sur le choix de telle ou telle combinaison pertinente. D'autre part, s'il commet une erreur de calcul, il n'aura aucun moyen de s'en rendre compte. Ce n'est qu'en arrivant au résultat final qu'il pourra constater le problème. Avec une calculatrice formelle évoluée, il pourra mémoriser les équations dans des variables e1, e2, e3,..., et son rôle consistera à choisir l'opération à effectuer. S'il choisit mal cette opération, le résultat obtenu par la calculatrice lui montrera immédiatement son erreur, puisque le terme qu'il cherchait à éliminer sera encore présent dans ce résultat. Il pourra donc facilement s'auto-corriger, et donc progresser dans la recherche de la solution. Naturellement, il restera à vérifier par la suite qu'il est bien capable d'effectuer l'ensemble de la démarche seul, même sans calculatrice. Tout ce qui vient d'être décrit ne concernait que la phase d'apprentissage de la méthode à utiliser. Ajoutons que l'on pourra même éventuellement proposer aux élèves les plus intéressés de réfléchir sur la programmation de cet algorithme dans leur calculatrice. Il est impossible de citer ici tous les exemples d'utilisation pédagogique de la calculatrice que l'on a pu rencontrer dans les différentes expérimentations faites ces trois dernières années. Nous avons mentionné un exemple concernant l'introduction d'une notion totalement nouvelle, et un autre sur l'apprentissage de la mise en œuvre d'une méthode de résolution. Il faudrait aussi penser par exemple à toutes les stratégies qu'un élève pourra développer lors de l'étude d'un exercice non trivial. Les expérimentations entreprises ces dernières années ont fait l'objet d'exposés lors de différentes universités d'été concernant les outils de calcul formel, ou encore lors du colloque international organisé sur ce thème à Montpellier en Mai 1998. D'autres travaux sont actuellement en cours de publication. Il est donc aujourd'hui possible de bénéficier de l'expérience acquise dans ce domaine. S'il est impossible de tout résumer ici, on peut cependant dégager quelques points particulièrement positifs résultant de l'utilisation des calculatrices symboliques dans une classe équipée de façon homogène.

- **Une meilleure compréhension de certains concepts.** Les outils de calculs symboliques facilitent un apprentissage actif, permettant aux élèves de dégager eux-mêmes certaines notions importantes.
- **Une amélioration de la capacité à résoudre un problème complexe.** Les calculatrices permettent aux étudiants de visualiser certains problèmes, de conjecturer certains résultats, de tester la validité de leurs hypothèses, d'explorer différentes méthodes d'aborder un problème.

- **Une amélioration de la confiance des élèves en leurs propres possibilités** lors de l'étude d'une nouvelle partie du cours, ou lors de la résolution d'un exercice. Les calculatrices symboliques permettant par exemple de s'affranchir des difficultés liées à la manipulation d'expressions algébriques.

Tous ces points contribuent à une amélioration significative de la dynamique de la classe. Le dernier est tout particulièrement important. **Replacer rapidement un étudiant en situation de confiance, lui montrer qu'il est capable de mettre en œuvre des idées nouvelles sans se heurter constamment à d'éventuelles lacunes, lui montrer qu'il peut prévoir un résultat, c'est aussi lui donner un goût pour les mathématiques.** Cela lui permettra d'acquérir plus rapidement les notions nouvelles, mais lui donnera aussi, à terme, la volonté de consolider la maîtrise des notions plus anciennes.

La question de l'équité

Le problème d'une aggravation des inégalités sociales provoquées par l'arrivée de ces nouvelles calculatrices est soulevé par de nombreux enseignants. En ce qui concerne l'utilisation aux examens, il faut savoir qu'il était déjà possible, et depuis de nombreuses années, d'utiliser des outils de calcul symbolique. Un constructeur diffusait un véritable micro-ordinateur au format A5, et donc autorisé lors des épreuves du bac. On pouvait en particulier l'équiper d'un logiciel de calcul symbolique comme *Derive*. Ce même constructeur proposait aussi des calculatrices haut de gamme permettant d'effectuer certains calculs symboliques. Seul le coût élevé de ces différents produits en limitait la diffusion. L'arrivée de calculatrices symboliques financièrement plus accessibles ne fait que mettre plus clairement en évidence une situation qui existait déjà. Il n'est peut-être pas non plus inutile d'indiquer que le coût d'une calculatrice n'excède guère le prix couramment demandé pour quelques heures de cours particuliers avec un professeur. Il y a malheureusement bien d'autres sources d'inégalités que la simple possession d'une calculatrice. En ce qui concerne ce domaine du soutien scolaire, on peut même aller plus loin. Une calculatrice symbolique performante permet à un élève ne disposant d'aucune aide particulière (parents, cours particuliers...) de vérifier sans difficulté la validité de tous les calculs techniques. Il est même parfaitement envisageable de pouvoir faire fonctionner sur cette calculatrice des logiciels permettant d'aider un élève en difficulté à trouver une méthode correcte, par exemple lors de la résolution d'une équation, ou d'un calcul de primitives. **À terme, l'introduction des outils de calculs symboliques pourrait donc permettre d'atténuer certaines inégalités...** Cela dit, il reste vrai qu'il faut trouver des solutions permettant de rendre possible l'accès de ces calculatrices à un plus grand nombre d'élèves. C'est un problème d'égalité des chances, et c'est comme nous l'avons vu un impératif pédagogique si l'on souhaite pouvoir utiliser largement une calculatrice dans le cadre de l'enseignement des mathématiques.

Vers une nouvelle politique d'équipement

La seule réponse possible au problème que nous venons d'évoquer serait de mettre en place des procédés permettant d'équiper de façon homogène l'ensemble des élèves d'une classe. **Au même titre qu'un manuel scolaire, la calculatrice est un outil pédagogique. Elle devrait donc bénéficier de la même procédure de choix de la part des enseignants au niveau d'un établissement. C'est également la condition indispensable pour un traitement efficace des problèmes sociaux que peut entraîner le coût financier trop important pour certains élèves de l'achat d'une calculatrice. Il n'y aurait sans doute à l'heure actuelle aucun système de prêt ou de location d'ouvrages scolaires si ces derniers n'étaient pas choisis collectivement au sein d'un établissement, avec un engagement d'utilisation pour une certaine durée.** En ce qui concerne les calculatrices, différentes solutions sont envisageables. Elles vont du prêt de matériel effectué ponctuellement par l'établissement auprès d'élèves en difficulté, à l'achat groupé des calculatrices nécessaires, ces calculatrices étant par la suite louées aux étudiants, tout comme cela se pratique avec les livres. **En ce qui concerne d'éventuels achats groupés, accompagnés de systèmes de location ou de prêts, il est important d'avoir à l'esprit que les**

calculatrices sont, contrairement aux ordinateurs, des produits durables. Certains élèves bénéficient encore d'opérations de prêts de certains modèles de calculatrices, six ans après leur première mise en service. L'introduction de la technologie Flash sur les modèles les plus récents ne peut que renforcer cette longévité. Il est ainsi effectivement envisageable qu'un établissement choisisse et achète (éventuellement par l'intermédiaire des associations de parents d'élèves) un lot de calculatrices destinées à être louées pendant plusieurs années à des élèves. Compte tenu de la baisse de prix que pourrait permettre l'achat direct de quantités importantes de calculatrices, un coût de location de l'ordre de 150 Francs /an serait sans doute suffisant pour équiper les élèves de calculatrices symboliques véritablement performante. Une aide des collectivités locales pourraient en outre permettre de faire encore baisser ce prix[2] pour l'ensemble des élèves, ou encore d'obtenir une gratuité pour les élèves en situation difficile.

La formation des enseignants

Il faut constamment garder à l'esprit qu'un outil de calcul symbolique, calculatrice ou logiciel, reste un outil nettement plus sophistiqué qu'un simple système de calcul numérique. Un véritable effort de formation des enseignants des disciplines scientifiques doit être entrepris. Les problèmes rencontrés lors de la manipulation d'outils de calcul symbolique sont en effet d'une nature très différentes de ceux que l'on rencontre avec les calculatrices graphiques classiques. Il serait difficile de présenter l'ensemble de ces problèmes dans un article de ce type. Voici seulement quelques exemples qui permettront de mieux les comprendre. Manipuler un outil de calcul symbolique, c'est par exemple découvrir que l'écriture des expressions mathématiques repose sur des conventions que nous utilisons sans même nous en apercevoir. Ainsi, si x est un réel, $f(x+1)$ et $f(x+1)$ s'écrivent de la même façon, mais désignent des expressions de nature très différente suivant que f est une fonction ou un autre réel. En prendre conscience permet de comprendre pourquoi certains logiciels, comme Maple, sont en apparence incapables de développer $x(x+1)$ sous la forme x^2+x, ou pourquoi certaines calculatrices refuseront une expression de ce type. D'autres conventions courantes finissent par nous faire oublier que les hypothèses sur les variables utilisées doivent absolument être explicitées si l'on désire effectuer certaines manipulations. Par exemple, $(-1)^{2n}$ n'a aucune raison d'être égal à 1 si n n'est pas un entier, et le traitement d'une équation faisant intervenir z et son conjugué sera très différent suivant que l'on suppose que z est un réel ou non... De même, rien ne permet de remplacer $\ln(ab)$ par $\ln(a)+\ln(b)$ si a et b ne sont pas des réels positifs...Certaines règles de "simplifications" sont également arbitraires. Est-il plus simple d'écrire $(n+1)n!$ ou $(n+1)!$... Tout dépend en fait des calculs qui seront effectués par la suite... Les formes obtenues par les systèmes de calcul formel effectuant des "simplifications" automatiques ne seront pas toujours celles qui nous attendons...Prenons enfin l'exemple simple de la résolution d'un système d'équations avec des paramètres. La résolution d'un système tel que $m.x+y = m$ et $x+m.y = 1$ conduit, si l'on en croit un logiciel de calcul symbolique[3], à l'unique solution (1, 0). Comment le comprendre si l'on n'a jamais eu l'occasion de voir que ce type d'outil effectue tous les calculs sur les fractions rationnelles sans se soucier des problèmes liés aux ensembles de définition ? A l'inverse, si l'on procède par étapes, il est parfaitement possible de montrer dans l'exemple précédent l'importance de certaines valeurs particulières du paramètre m. On pourrait également parler de tout ce qui concerne l'utilisation des nombres complexes. Un logiciel n'aura aucune difficulté pour calculer une expression comme $\ln(-2) - \ln(-3)$... Il ne s'agit pas d'exemples anecdotiques. Quelques minutes d'utilisation d'un outil de calcul formel suffisent pour être confronté à ce type de problèmes. Par ailleurs, si on veut profiter au mieux de toutes les potentialités de ces systèmes de calcul formel, une présentation d'idées déjà expérimentées par d'autres enseignants semble absolument indispensable. Il s'agit parfois de démarches très éloignées de ce que nous ferions avec des outils plus conventionnels. On peut noter que, lors de l'introduction de Maple en classes préparatoires, des centaines d'enseignants de mathématiques et de sciences physiques ont suivi des formations, en général de deux ou trois jours, pour être capables de bien utiliser ces outils, et avoir un premier

[2] On peut par exemple observer la situation des États Unis où ce sont majoritairement les établissments scolaires qui achète les calculatrices pour leurs étudiants. Les marges pratiquées par les distributeurs équipant ces établissements sont très nettement inférieures à celles que pratique en France un magasin vendant directement à des particuliers (il est vrai qu'il ne s'agit du même type de service). Si on y ajoute les écarts de prix liés au taux de la TVA, on arrive à des différences de prix véritablement importantes.

[3] Ou'il s'agisse d'un logiciel comme Maple ou d'une calculatrice symbolique.

aperçu de ce qui pourrait changer dans leur enseignement. Ces formations ont dans un premier temps été organisées par les écoles d'ingénieurs elles-mêmes, puis par les MAFPEN. Il semble donc dès à présent indispensable d'intégrer la découverte du calcul symbolique et de ses avantages pour l'enseignement dans la formation en IUFM... Il restera également à mettre en place des formations pour les enseignants déjà en poste, en associant étroitement les IREM qui disposent d'une expérience certaine. Les associations d'enseignants comme l'APMEP et l'UDP auront sans doute également un rôle important à jouer. Il restera aussi à réfléchir aux conséquences sur les modifications éventuelles des contenus de certains programmes. L'enjeu est considérable. Nous ne pouvons pas prendre le risque d'un échec dans ce domaine.

La TI-89 en classe de 1ère S.T.L. Bio

Voici l'énoncé tel qu'il a été donné aux élèves, pour recherche individuelle ou en groupes de deux, au cours de deux séances consécutives de T.D. (demi-classes de 16 élèves).

Dans cette recherche, on aura tout intérêt à utiliser au mieux les capacités de la calculatrice.

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{40}{3}x^3 - 49x^2 + 60x + 21$

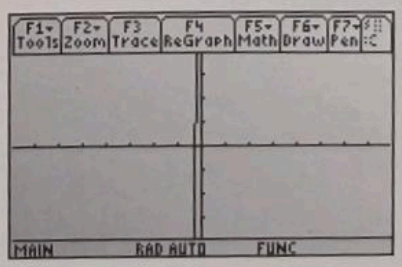
Étudier le sens de variation de cette fonction ; sur quel(s) intervalles est-elle croissante ? décroissante ?
Faire une représentation graphique de cette fonction dans un repère judicieusement choisi.
Le graphique semble-t-il en accord ou non avec l'étude du sens de variation ?
Si oui, tant mieux ; si non, peut-on modifier le repère pour obtenir satisfaction ?

Y a-t-il un (ou des) point(s) de la courbe où la tangente ait pour coefficient directeur 2 ?
Y a-t-il un (ou des) point(s) de la courbe où la tangente ait pour coefficient directeur -1 ?
Y a-t-il un (ou des) point(s) de la courbe où la tangente ait pour coefficient directeur -1/40 ?
Tracer les tangentes correspondantes sur le graphique.

Que pensez-vous que le point d'abscisse 49/40 représente pour cette courbe ?
Soient deux points d'abscisses $a = 49/40 + t$, et $b = 49/40 - t$ (t réel quelconque) ; calculer la moyenne des ordonnées de ces points ; comment interpréter ce résultat.

Le choix de la fonction donnée au départ :

Je voulais une fonction dont le sens de variation change pour deux valeurs extrêmement proches l'une de l'autre : j'ai choisi 5/4 et 6/5. J'ai pris une primitive de $\left(x - \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{6}{5}\right)$, que j'ai multipliée par 40 pour éviter les dénominateurs et « étirer » la courbe en hauteur, et ajouté 21 pour que les sommets ne puissent pas se trouver dans un écran « normal ». En effet la représentation avec le ZoomDecimal donne ceci :



Les valeurs obtenues pour le maximum relatif et le minimum relatif sont respectivement

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2183}{48} \simeq 45{,}4791667$ et $f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1137}{25} = 45{,}48$,

soit un écart en ordonnée de $\frac{1}{1200}$. Le but était donc de rechercher une fenêtre dans laquelle on puisse visualiser les deux sommets, ce qui était loin d'être évident.

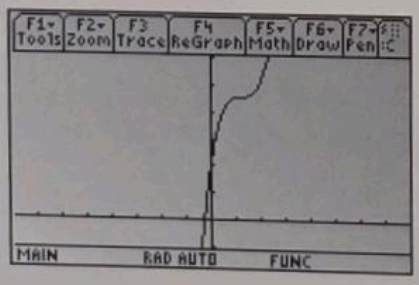
Les trois questions relatives aux tangentes donnaient respectivement deux, zéro, et une solution. Le troisième cas correspondait à la tangente au centre de la courbe, celle-ci « traversait » donc sa tangente : ce serait la première fois que les élèves se trouveraient dans cette situation (mis à part la cas d'école vu en cours : $y = x^3$ et sa tangente à l'origine).

La troisième partie du problème visait à faire découvrir la symétrie de la courbe ; j'y proposais une méthode, ce que je n'aurais pas dû faire : les élèves n'ont pas compris ce que je voulais leur faire faire, et ont proposé autre chose (cf. ci-dessous).

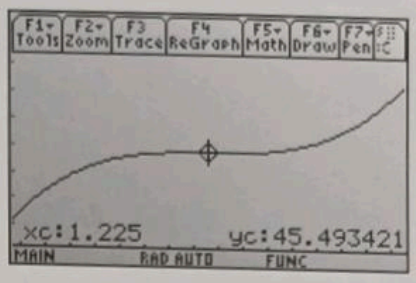
Les réactions des élèves :

1ère partie

Le calcul de la dérivée n'a posé aucun problème. Pour l'étude de son signe, j'ai remarqué que plus de la moitié des élèves préféraient la factoriser et faire un « tableau de signes », plutôt que d'utiliser le théorème du signe du polynôme du second degré. Le maximum et le minimum ont été trouvés et, comme prévu, le graphe ne correspondait pas au tableau de variation. La première idée des élèves a été de « remonter » l'écran jusqu'à arriver aux alentours de 45. Les courbes que l'on obtenait ne permettait pas la visualisation des deux sommets attendus :



Une bonne émulation s'est instaurée dans chacun des deux groupes, chacun faisant part de ses propositions (en branchant sa machine sur le rétroprojecteur), mais pratiquement tous ont commencé par des « ZoomIn » qui n'étaient pas efficaces. L'écran ci-dessous en est un exemple :



Mais, dans chacun des deux groupes, il y a eu un élève qui a eu l'idée de construire la fenêtre à partir des valeurs approchées calculées, en constatant que sa hauteur devait être d'environ 1/1000.

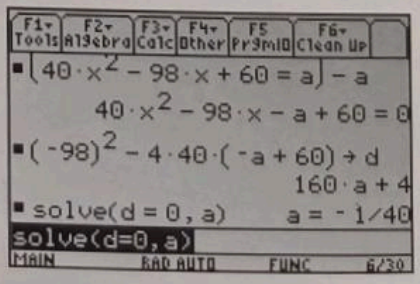
2ème partie

Aucune difficulté particulière. Mais un élève m'a posé la question : « Comment avez-vous fait pour choisir la valeur $\frac{-1}{40}$ qui ne donne qu'une solution ? vous devez avoir un truc ! »

Avant d'entamer la 3ème partie du T.D., nous avons donc décidé de répondre à cette question. Je ne voulais surtout pas leur dévoiler mon « truc », à savoir que j'avais choisi le coefficient directeur de la tangente au centre de symétrie, car je connaissais les propriétés des courbes du 3ème degré.

Il s'est rapidement avéré qu'il s'agissait de résoudre une équation du type $f'(x) = a$ dans laquelle on voulait que $\Delta = 0$ (pour qu'il n'y ait qu'une solution).

L'équation à résoudre était : $40x^2 - 98x + 60 = a$, soit $\Delta = (-98)^2 - 4 * 40 * (60 - a)$, d'où la réponse :



3ème partie

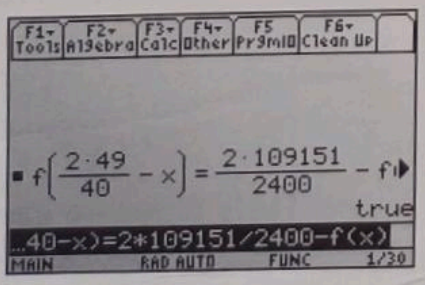
Le calcul de $f\left(\frac{49}{40}\right)$ donnait $\frac{109151}{2400}$. Il n'a pas été évident pour les élèves de s'apercevoir que ce point devait être un centre de symétrie (on n'avait jamais effectué auparavant de recherche du centre de symétrie d'une courbe du 3ème degré, sauf pour $f(x) = x^3 + k$). Une fois cela « vu », la propriété apparaissait « évidente » : il n'y avait plus rien à démontrer, puisque « ça se voyait sur le graphique » ; en particulier, ce point était bien le milieu du segment joignant les deux sommets, et cela leur suffisait. En outre, ils ne comprenaient pas du tout pourquoi je voulais leur faire faire le calcul proposé.

J'ai donc dû poser une autre question : comment faire pour prouver que le point $C\left(\frac{49}{40}, \frac{109151}{2400}\right)$ était bien le centre de symétrie ? Et cela n'a pas été facile à traduire ; une fois admis le fait qu'une certaine propriété devait être vraie **quel que soit** le point M choisi sur la courbe, j'ai eu des propositions du genre *« on prend deux points quelconques M(x ; f(x)) et M'(x' ; f(x')) et on montre que leur milieu est bien C »*, *ou « on prend un point quelconque M, on cherche son symétrique M', et on démontre que le milieu de [MM'] est bien C »*, etc.

Finalement, la classe s'est mise d'accord sur la problématique suivante : *« On prend un point quelconque M(x ; f(x)), on cherche son symétrique M' par rapport à C, et on démontre que M' est bien sur la courbe ».*

Il restait alors à déterminer les coordonnées de M' à partir de celles de M ; il y a eu deux écoles : ceux qui ont traduit en utilisant les coordonnées du milieu $\left(x_C = \frac{x_M + x_{M'}}{2} \text{ et } y_C = \frac{y_M + y_{M'}}{2}\right)$ et ceux qui ont traduit par l'égalité des deux vecteurs MC et CM'. Dans les deux cas, on obtenait : $\begin{cases} x_{M'} = 2x_C - x_M \\ y_{M'} = 2y_C - y_M \end{cases}$, soit $\begin{cases} x_{M'} = 2*\frac{49}{40} - x \\ y_{M'} = 2*\frac{109151}{2400} - f(x) \end{cases}$

Et il fallait vérifier si $f(x_{M'}) = y_{M'}$. La question a été posée (telle quelle) à la machine, et tout le monde a été content : elle disait « true », donc c'était vrai !

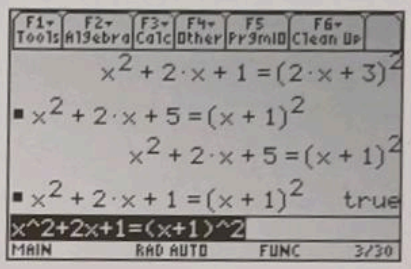


Remarque

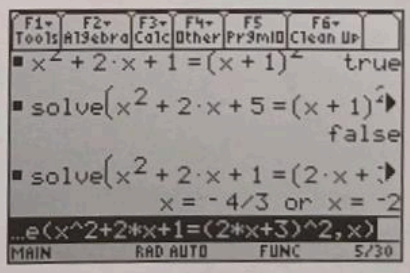
Je me suis rendu compte (à cause de certaines remarques incidentes des élèves) qu'il fallait que je donne quelques explications sur les réponses « true », « false » ou non-réponse de la machine quand on lui proposait une égalité.

J'ai donc travaillé sur les trois exemples suivants :

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2$ et $x^2 + 2x + 1 = (2x + 3)^2$. La machine donne :



La machine répond « true » pour l'égalité vraie quel que soit x, mais ne répond pas « false » pour celle qui est fausse quel que soit x, ce que les élèves n'ont pas du tout admis... Par contre, si on lui fait résoudre en tant qu'équations, elle répond bien « false » pour la seconde, et trouve bien les valeurs de x pour laquelle la troisième égalité est vraie ($x = -4/3$ et $x = -2$).



Cela m'a permis de bien refaire la distinction entre les égalités vraies quelle que soit la valeur de x (appelées parfois « identités remarquables »), celles qui sont fausses quelle que soit la valeur de x, et celles qui sont vraies pour certaines valeurs et fausses pour d'autres.

Annexe : la classe de 1ère S.T.L. Bio

(officiellement 1ère Sciences et Techniques de Laboratoire, option Biochimie et génie biologique).

Le programme mathématique de cette classe est très réduit (assez proche de celui des S.T.T. option gestion). Cependant ce ne sont pas du tout les mêmes élèves : ils ont choisi leur spécialité (depuis la seconde), et leur orientation est vécue de façon positive pour la plupart d'entre eux. D'autre part, ils sont très habitués à la démarche expérimentale, et n'ont pas peur de faire du « bricolage ». Par contre, ils sont effectivement assez faibles en mathématiques, et les « raisonnements » leur posent problème, de même que l'expression écrite ou orale de leurs démarches. Dans cette classe expérimentale où chacun dispose d'une TI-89, elle leur permet d'abord de ne pas faire d'erreurs de calcul (ce qui est un de leurs problèmes). Par ailleurs « l'ambiance » de travail est bonne, et les élèves n'hésitent pas à s'entraider, à monter aux autres ce qu'ils ont découvert ou à leur demander ce qu'ils n'arrivent pas à trouver. C'est pourquoi ce genre de T.D. en classe peut être fait de façon efficace.

Montrer, en utilisant le théorème de Fermat, qu'un nombre entier n'est pas premier.

Exercice préliminaire.

Petit théorème de Fermat: Si n est premier et si a n'est pas divisible par n, alors $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. L'objectif de cette première partie est de démontrer ce théorème dans le cas où $a = 2$; (la machine est ici inutile).

1°) Montrer que C_n^p est un multiple de n quand n est premier et $0 < p < n$.

2°) En utilisant la formule du binôme, montrer que $(a+b)^n \equiv a^n + b^n \pmod{n}$ quand n est premier.

3°) En déduire que, quand n est premier, $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ (choisir $a = b = 1$) et donc que, si 2^{n-1} n'est pas congru à $1 \pmod{n}$ alors n n'est pas premier.

C'est ce que nous allons utiliser pour prouver que certains entiers ne sont pas premiers.

Le nombre n = 2 099 597 est-il premier ?

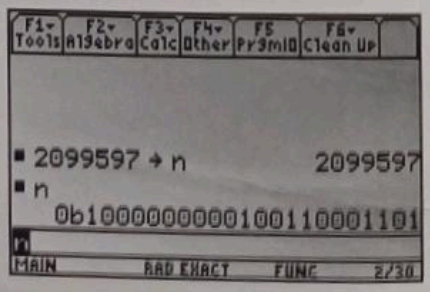
La TI-89 possède la fonction mod (mod(n,p) donne le reste dans la division euclidienne de n par p) mais ici la calculatrice ne permet pas de répondre directement (au-delà de $n=2^{2^{10}}$ la machine donne un message de dépassement de capacité). Procédons donc par étapes.

1°) Écrire n en base 2, en déduire que

$$n = 2^{21} + 2^{11} + 2^8 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2^{21} + 2^{11} + 396 + 1$$

et donc que : $2^{n-1} = 2^{2^{21}} \times 2^{2^{11}} \times 2^{396}$.

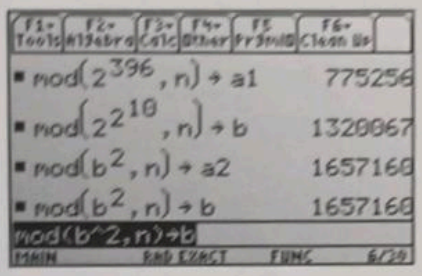
avec la TI-89: entrer 2 099 597 en n puis mettre la machine en mode binaire (page 2 de MODE) et n donne alors le résultat comme le montre l'écran suivant :

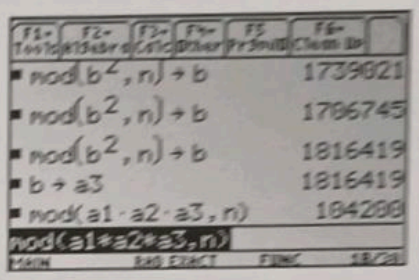


2°) Soit a1 = mod(2^{396},n), a2 = mod (2^{511},n) et a3 = mod (2^{521},n) ; a2 et a3 ne peuvent pas être calculés directement avec la TI-89 ; mais en remarquant que $2^{511} = (2^{255})^2$ on a a2 = mod (b^2,n) où b = mod (2^{255}, n).

3°) Pour trouver a3, il suffit de répéter 10 fois de suite, (appui de 10 fois sur ENTER), après l'obtention de a2, la séquence mod(b^2, n) STO b pour obtenir a3 ; et on termine par le calcul de mod (a, Xa2 Xa3, n) et on constate que l'on n'obtient pas 1, donc n n'est pas premier.

avec la TI-89: revenir au MODE décimal





La réciproque est fausse, exemple: n = 561

En effet 561 n'est pas premier (multiple de 3) mais mod (2^{560},561) donne 1.

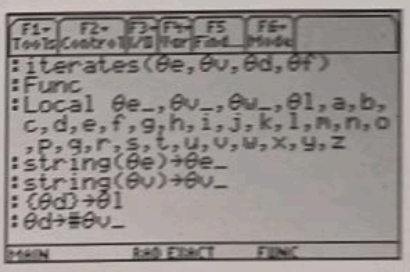
1 062 961 n'est pas premier : on peut procéder comme pour 2 099 597.

Remarque: Ce procédé ne donne pas la décomposition en facteurs premiers.

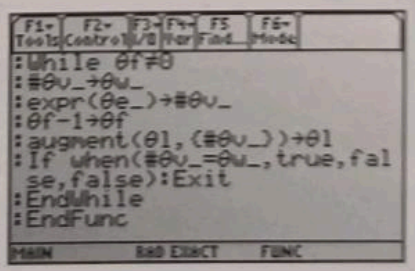
Et si on enrichissait la TI-89 ?

Itérations

Indispensables en calcul formel car elles rendent de grands services, les fonctions ITERE*(exp,var,init,nb)* et ITERATION *(exp,var, init,nb)* de DERIVE ne sont pas présentes dans la TI-89 (ITERATE et ITERATES en version anglaise). Nous donnons ici une version de ces fonctions pour la TI-89 accompagnée de quelques exemples d'utilisation.



iterates*(exp,var,init,nb)* : cette fonction répète l'instruction exp sto *var* où var est initialisée au début de l'itération par la valeur *init* et **retourne la liste des résultats en commençant la liste par la valeur *init*.** L'itération s'arrête si deux résultats consécutifs de la variable *var* sont égaux. Elle correspond à la fonction ITERATION de DERIVE. Si *nb* est positif, le nombre de boucles est limité à nb. La liste a donc au plus *nb* + 1 éléments, mais peut-être moins si la méthode converge (voir 2.) ; si *nb* est nul, la liste retournée est *{init}* (voir 3.)



iterate(*exp,var,init,nb*) : Cette fonction répète l'instruction exp sto var où var est initialisée au début de l'itération par la valeur init et retourne le dernier résultat. L'itération s'arrête si deux résultats consécutifs de la variable var sont égaux. . Si *nb* est positif, le nombre de boucles est limité à *nb* (voir 7) ; si *nb* est nul, la valeur *init* est retournée (voir 8). Elle correspond à la fonction ITERE de DERIVE

```
F1▾ Tools | F2▾ Control | F3▾ I/O | F4▾ Var | F5 Find... | F6▾ Mode
:iterate(θe,θv,θd,θf)
:Func
:Local θi,θe_,θv_,θw_,a,b,
 c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o
 ,p,q,r,s,t,u,v,w,x,y,z
:string(θe)→θe_
:string(θv)→θv_
:θd→#θv_
:While θf≠0
MAIN        RAD EXACT        FUNC
```

```
F1▾ Tools | F2▾ Control | F3▾ I/O | F4▾ Var | F5 Find... | F6▾ Mode
:While θf≠0
:#θv_→θw_
:expr(θe_)→#θv_
:θf-1→θf
:If when(#θv_=θw_,true,fal
 se,false):Exit
:EndWhile
:#θv_
:EndFunc
MAIN        RAD EXACT        FUNC
```

Exemples d'utilisation :

1. *iterates(floor(x/2),x,*1000,-1)
   donne {1000, 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3, 1, 0, 0}
2. *iterates(floor(x/2),x,*1000,3)
   donne {1000, 500, 250, 125}
   *iterates(floor(x/2),x,*1000,100)
   donne {1000, 500, 250, 125, 62, 31, 15, 7, 3, 1, 0, 0}
3. *iterates(floor(x/2),x,*1000,0) donne 1000
4. Méthode de Newton :
   iterates (x-u/*d*(u,x),x,x0,n)sto *newton*(u,x,x0,n)
   newton(x^2-3,*x*,2,5)
   donne {2, 1.75, 1.732143, 1.732051, 1.732051, 1.732051} en approximation, mode float7.

5. Fractions continues : *iterates(b+a/r,r,x,n)* sto *fc(b,a,x,n)*
   En appliquant l'affectation $b+\frac{a}{r}$sto r à elle même n fois en partant de $r = x$, on construit la liste des fractions continues :

$$x \quad b+\frac{a}{x} \quad b+\frac{a}{b+\frac{a}{x}} \quad b+\frac{a}{b+\frac{a}{b+\frac{a}{x}}} \quad b+\frac{a}{b+\frac{a}{b+\frac{a}{b+\frac{a}{x}}}} \cdots$$

Calculer fc(1,1,x,4) puis donner une conjecture sur la forme du résultat pour une valeur entière de n.

6. *iterate(floor(x/2),x,*1000,-1) donne 0
7. *iterate(floor(x/2),x,*1000,3) donne 125
8. *iterate(floor(x/2),x,*1000,0) donne 1000
9. Fonction puissance : iterate(*a*x,a,1,n)* sto *pow(x,n)*
   pow(2,8) donne 256
10. Suite de Fibonacci :
    iterate({v[2],v[1]+v[2]},v,{0,1},n)[1] sto *fib*(n)
    fib(100) donne 354224848179261915075
    en moins de 10 secondes !
11. Composées d'une fonction : iterate(*f(y),y,x,n)* sto *ff(x,n)*
    ff(2,5) donne *f(f(f(f(f(2)))))*

Si on a défini *f(x)* = *x*^2, *ff*(*t*,5) donne t^{32} et *ff*(2,5) donne 4294967296

Restrictions

1. *var* doit être une lettre comprise entre *a* et *z*. Cela interdit les lettres grecques et les noms de variables à plusieurs caractères.
2. L'expression *exp* ne supporte pas de paramètres non affectés autres que la variable var.

Remarque

On peut parfois passer outre cette dernière restriction en utilisant les listes. Par exemple pour calculer les polynômes de Chebychev de première espèce, définis par la récurrence :

pour n=0, T(n,x) = 1
pour n=1, T(n,x) = x
pour n>1, T(n,x) = 2x T(n-1,x) - T(n-2,x)
Polynôme de Chebychev : *iterate*({v[2],2*v[2]*v[3]-v[1],v[3]},v,{1,x,x},n)[1] sto *cheb(n,x)*
cheb(3,x) donne x (4 x^2 - 3) et
tCollect(cheb(3,cos(x)))
donne cos(3x)
Quelques secondes suffisent pour calculer par exemple
tCollect(cheb(15,cos(x))) !

Chaque lecteur pourra trouver d'autres applications ... Hypothèses se fera un plaisir de publier les contributions les plus intéressantes.

Les journées d'été des 30, 31 août et 1er septembre 1999

Les 30, 31 août et 1er septembre 1999 se dérouleront les troisièmes journées d'été " Utilisation des calculatrices graphiques et formelles dans l'enseignement". Ce sera pour tous les participants une occasion unique d'échanger sur leurs pratiques liées à l'utilisation de ces outils dans leurs classes. Une partie de ces journées sera consacrée à une formation autour du calcul formel (les articles du présent numéro d'Hypothèses sont un excellent hors d'œuvre). Les participants auront aussi l'occasion d'entendre les collègues qui expérimentent cette année,

dans leur classe, l'utilisation de la TI-89, leur parler de tous les aspects de cette expérience : intérêt, difficulté, réaction des élèves, prospective... Le reste du temps sera consacré à la découverte d'activités liées à l'utilisation des calculatrices de tous types. Il est prévu trois types de centres : mathématiques lycée, mathématiques en classes préparatoires et sciences physiques... il y en a sûrement un pour vous... Alors n'hésitez pas et inscrivez-vous...

Quelques sites qui méritent le détour.

http://www. ti.com/calc/France:

vous y trouverez de nombreuses informations et des outils liés aux calculatrices.

http://perso.wanadoo.fr/szmehl/:

si l'origine de certains symboles ou de certaines notions mathématiques vous sont encore inconnus, vous trouverez peut-être, sûrement, la réponse sur ce site.

http://www.univ-lyon1.fr/apmep/:

le site de l'APMEP, qui vous guidera vers de nombreux autres sites, tous plus intéressants les uns que les autres...
Et bien sûr, sur les sites académiques vous pourrez trouver de nombreuses informations liées aux mathématiques...

TEXAS INSTRUMENTS

http://www.ti.com/calc/france

Pour de plus amples informations sur les produits et services de Texas Instruments:

Texas Instruments
8-10 Avenue Morane Saulnier
F-78141 Vélizy Villacoublay Cedex
France
Tel. 01 30 70 12 00
Fax. 01 30 70 10 54

TI-PRODUCTS

PROF'S

TI SUPPORT

T3 NEWS

TEXAS INSTRUMENTS
S.A. au capital de 4 690 000 F
Siege social : Centre de Recherche et de Production, Direction Generale Europeenne BP 5 - 06271 Villeneuve Loubet Cedex
Tel 04 93 22 20 01
N° ISSN : 0998-965X
Directeur de la Publication : Christian Tordo. Responsables de la Redaction : Vincent Bastid. Coordinator : Daniel Vagost. Imprimeur : SLS Communications Group Ltd., Angleterre. ©1999 Texas Instruments Incorporated. 1999.NLMHypLyc/F

Vous pouvez envoyer vos travaux et commentaires au courrier des lecteurs : Texas Instruments - Sylviane Sertori - BP 67 -78141 Velizy-Villacoublay. Adresse e-mail : v-Bastid@ti.com